北京大学数学丛书

李群讲义

项武义　侯自新　孟道骥　著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

李 群 讲 义

项武义 侯自新 孟道骥 著

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

北京大学数学丛书

李 群 讲 义

项武义 侯自新 孟道骥 著

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店经售

*

850×1169毫米 32开本 9.5印张 240千字
1992年12月第一版 1992年12月第一次印刷
印数：0001—3,000册
ISBN 7-301-01759-6/O·276
定价：10.50 元

符 号 说 明

A_l	典型李代数
ad	李代数的伴随表示
ad($\mathfrak{g}$)	$\mathfrak{g}$ 的内导子代数
Ad	李群的伴随表示
$\widetilde{\mathrm{Ad}}$	群的伴随变换
Aut($\mathfrak{g}$)	$\mathfrak{g}$ 的自同构群
B_l	典型李代数
$B(X,Y)$	李代数的Killing型
C_l	典型李代数
$C(\mathfrak{g})$或$Z(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ 的中心
cl(G)	G的共轭类个数
γ_X	由X决定的测地线
D_l	典型李代数
D($\mathfrak{g}$)	$\mathfrak{g}$ 的导代数
$\mathrm{D}^{(k)}(\mathfrak{g})$	$\mathrm{D}^{(k-1)}(\mathfrak{g})$的导代数
dim	维数
$\partial(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ 的导子代数
Δ	根系
Δ^+	正根系
Δ^-	负根系
Exp	指数映射
E_6, E_7, E_8	例外李代数
F_4	例外李代数
G_2	例外李代数
GL(n,C)	复n阶可逆矩阵群（全线性群）
GL(n,R)	实n阶可逆矩阵群（全线性群）
GL(V)	线性空间V的全线性群
$\mathfrak{gl}(n,C)$	GL(n,C)的李代数

$\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$	GL$(n,\boldsymbol{R})$的李代数
$\mathfrak{gl}(V)$	GL(V)的李代数
$\mathfrak{g}_a$	属于a的根子空间
$\mathfrak{g}_C$, $\mathfrak{g}\otimes\boldsymbol{C}$	$\mathfrak{g}$的复化
$G/\widetilde{\mathrm{Ad}}$	G的共轭类构成的集合
$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$的内自同构群
ker	核
l_a	左平移
$L_2(G)$	G上平方可积函数空间
$N(T,G)$	T在G中的正规化子
$O(n,\boldsymbol{C})$	复n阶正交矩阵群
$O(n,\boldsymbol{R})$	实n阶正交矩阵群
$O(V)$	V的正交群
$\mathrm{ord}(G)$	G的阶
$\Pi(\pi)$	素根系
$r(G)=\mathrm{rank}(G)$	G的秩
r_a	右平移
SL$(n,\boldsymbol{C})$	复n阶特殊线性群
SL$(n,\boldsymbol{R})$	实n阶特殊线性群
SL(V)	V的特殊线性群
sl$(n,\boldsymbol{C})$	SL$(n,\boldsymbol{C})$的李代数
sl$(n,\boldsymbol{R})$	SL$(n,\boldsymbol{R})$的李代数
sl(V)	SL(V)的李代数
SO$(n,\boldsymbol{C})$	复n阶特殊正交群
SO$(n,\boldsymbol{R})$	实n阶特殊正交群
SO(V)	V上特殊正交群
so$(n,\boldsymbol{C})$	SO$(n,\boldsymbol{C})$的李代数
so$(n,\boldsymbol{R})$	SO$(n,\boldsymbol{R})$的李代数
so(V)	SO(V)的李代数
$Sp(V)$	V上的辛群
$Sp(n,\boldsymbol{C})$	复n阶辛群
sp(V)	$Sp(V)$的李代数

$\mathrm{sp}(n,\boldsymbol{C})$	$S_p(n,\boldsymbol{C})$的李代数
$\mathrm{SU}(n)$	n阶特殊酉群
$\mathrm{su}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$的李代数
S^1	幺模复数群
S^3	幺模四元数群
S_O	关于O点的中心对称
Tr	迹
$U(n)$	n阶酉群
V^*	线性空间V的对偶空间
$V_1 \oplus V_2$	线性空间V_1与V_2的直和
φ^*	线性表示φ的对偶表示
$\varphi_1 \oplus \varphi_2$	线性表示φ_1与φ_2的直和
$\varphi_1 \otimes \varphi_2$	线性表示φ_1与φ_2的张量积
$\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_2$	线性表示φ_1与φ_2的外张量积
χ_φ	线性表示φ的特征函数
∇_X	协变微分
$/\!/_\gamma$	沿γ的平行移动

引　言

近代数学研讨的基本手法是先将所要研讨的事物，择其精要，加以适度的抽象化，然后再将如此抽象所得的体系，赋以自然的结构，组织成一个数理模式。例如：常用的各种数系以及古典几何中熟知的各种空间模型等等。再者，这样构造的抽象数理模型，通常还会有相当的“自同构”或“对称性”，那就是保持该数理模型本身结构的变换群。例如：一个一元代数方程的对称群或某一个度量空间的保长变换群等等。在这方面一个很自然的想法是：设法利用一个数理模型的对称性去帮助对于该结构的研讨。这种想法的牛刀小试发迹于Galois对于方程式论的创见。他就是把握着代数方程的对称群作为研究代数方程结构的关键，并从而简明扼要地解决了方程式论中一些历史性的基本问题，这就是大家所熟知的 Galois 理论。Galois 的成就引起了当时和后来数学界研究群论和变换群的巨大兴趣。例如：Frobenius, Schur, Lie, Klein, Killing, Cartan和Weyl 等，都是这方面的热心人物并为这方面的理论做出了重大的贡献。

当我们试着把上述变换群的想法推广到几何或者分析的领域里去，就会发现几何或分析领域的自同构变换群，其本身通常也会具有自然的几何或分析的结构。这也就自然地产生了下述基本的结合体：

1．拓扑群(亦即连续群)：它同时具有群和拓扑这样两种结构，而且群的运算对于其拓扑来说是连续的。

2．李群(亦即可微群)：它同时具有群和可微结构，而且群的运算对于其可微结构来说是可微的。

3．拓扑(或可微)变换群：设G是作用于一个拓扑(或可微)空间X上的一个变换群。我们通常用符号$g\cdot x$表示x点经变换g作用所得的象点。若G本身是一个拓扑(或可微)群，而且

$$G\times X\to X: \qquad (g,x)\mapsto g\cdot x$$

又是连续(或可微)映射，则称(G,X)为一拓扑(或可微)变换群。

李群是代数结构和几何结构的自然结合体，而可微(亦称李)变换群则是群论在几何或分析领域中的自然表现，也是各种应用之所基。李群的结构丰富，而且具有深刻的内在理论；而李变换群在数学中的应用目前正在拓展，可以说是方兴未艾。本书的目的就是试图将李群的精要及主要应用作一简明的介绍。

现在让我们来看一看研讨李群这种自然的结合体的丰富内在结构的基本方法有哪些。

(A) 线性表示：向量空间是最简单也是最常用的数理模式，所以作用在一个向量空间上的线性变换群可以说是变换群中最简明朴实的例子。设G是一个给定的抽象群，将其表成某一向量空间V的线性变换群，就叫做G的一个线性表示。换句话说，一个线性表示就是一个把G中的元素表成V上的全线性变换群——$\mathrm{GL}(V)$——中的元素的同态映射φ：$G\to\mathrm{GL}(V)$。另一种等价的说法是一个变换映射Φ：$G\times V\to V$，它把(g,x)映射到$\varphi(g)(x)$，通常简写为$g\cdot x$(一个变换映射满足下列特征性质：$e\cdot x=x$，e是G的单位元，$g_1(g_2\cdot x)=(g_1\cdot g_2)\cdot x$)。从方法论的观点来看，我们可以把这样的一个线性表示φ，想像成是用$\mathrm{GL}(V)$作为“底片”，给抽象群G拍了一张侦察照片。Frobenius-Schur学派研究群论的基本方法就是通过一个群G的各种可能的线性表示来探讨G本身的结构。我们将在第一章中介绍紧致群的线性表示论。

(B) 李群结构的线性化：李群就是可微分的群。微分的基本想法就是在无穷小的层面上的线性化。因此可以自然地想到李群的结构应该具有它的线性化所得的一种“无穷小群”的结构。这

也就是Sophus Lie在可微分的群的结构理论上的重大成就。我们将把这种线性的"无穷小群"的结构叫做李代数，把可微分的群改称为李群。在第二章中，我们就要详细说明如何去实现李群结构的线性化和李代数在李群结构论上的基本重要性。

（C）**伴随变换的几何**：由一个群G的内在结构，可以得出G作用在它本身上的变换映射。即：

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}:\ G\times G\rightarrow G,\qquad (g,x)\mapsto gxg^{-1},$$

称之为G的伴随变换，它把$g\in G$表示成G的一个自同构$x\mapsto gxg^{-1}$（因为这种自同构是用G的内在结构直接构造的，所以叫做内自同构）。从群的结构论来看，G的伴随变换群就是G的不可交换性的几何形态，而一个群的不可交换性则是群的结构中的重点。我们将在第三章中研讨连通紧致李群的伴随变换群的轨几何(orbital geometry)，它是紧致李群的结构和分类理论的枢纽。

在第四章中，我们将综合上述三种方法，得出紧致李群的结构和分类理论。它是李群论的精要，也是在几何、分析领域中具有广泛应用的基础理论。从这里出发，再进而得出复半单李群或实半单李群的理论可以说是相当直截了当的推广了。在第五章中，我们将用代数的观点，讨论复半单李代数的结构与分类。而第六章则涉及实半单李代数的理论，特别是它与对称空间理论的联系。这将有利于读者进一步理解李群论，并使读者在李群理论的应用上得到某种启发。

作　者

目　录

第一章　不变积分与紧致群表示论……………………………（1）

§1　紧致群与不变积分……………………………………（1）

§2　紧致群的线性表示论…………………………………（3）

§3　$L_2(G)$空间……………………………………………（12）

§4　一些基本的实例………………………………………（17）

第二章　李群结构的线性化——李代数　…………………（22）

§1　单参数子群与李代数…………………………………（22）

§2　基本定理………………………………………………（33）

第三章　伴随变换的几何　…………………………………（40）

§1　伴随变换与伴随表示…………………………………（40）

§2　极大子环群……………………………………………（43）

§3　权系、根系和 Cartan 分解……………………………（52）

§4　伴随变换的轨几何……………………………………（63）

§5　Weyl 公式和复不可约表示的分类……………………（70）

第四章　紧致连通李群的结构与分类………………………（74）

§1　紧致李代数……………………………………………（74）

§2　根系、Cartan 分解与紧致李代数的结构……………（80）

§3　分类定理与基底定理…………………………………（93）

§4　素根系几何结构的分类………………………………（106）

§5　典型紧单李群的伴随表示及其根系…………………（117）

第五章　复半单李代数的结构与分类………………………（129）

§1　幂零和可解李代数·可解性的Cartan检验……………（129）

§2　半单性和完全可约性…………………………………（148）

§3　复半单李代数的结构与分类…………………………（163）

第六章　实半单李代数和对称空间……………………………(177)
§1　实半单李代数的结构……………………………………………(178)
§2　变换群与古典几何………………………………………………(185)
§3　李群和对称空间…………………………………………………(191)
§4　齐性黎曼流形……………………………………………………(212)
§5　实半单李代数的分类……………………………………………(223)
附录一　紧致群的不变积分存在定理……………………………(250)
附录二　流形上的Frobenius定理 ………………………………(256)
附录三　连通群与覆盖群……………………………………………(265)
附录四　反射变换群的几何 ………………………………………(272)
参考文献………………………………………………………………(279)
汉英名词索引 ………………………………………………………(281)

第一章　不变积分与紧致群表示论

§1　紧致群与不变积分

让我们先来举几个紧致(拓扑)群的常见实例：

1）*有限群*：任给一个有限元的群，对于离散拓扑来说，构成一个紧致群。

2）*幺模复数群*：所有的幺模复数$\{e^{i\theta}; 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，在乘法运算下成一紧致群。它是连通的，可交换的。因为它也是复平面上的单位圆，所以将以符号S^1表示之。

3）*幺模四元数群*：四元数体是由所有能表成

$$a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\quad (a,b,c,d\in \boldsymbol{R})$$

的实四维向量，并赋以

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1,\ \mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},\ \mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},\ \mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}$$

的双线性乘法所成的不可交换的体。其中的幺模向量全体在上述乘法下成一个紧致群。它是连通的，不可交换的。它在几何上可视为$\boldsymbol{R}^4$中的三维单位球面，以S^3表示之。

4）*n维欧氏空间的正交变换群*：设$\boldsymbol{R}^n$是一个n维欧氏空间，则其上的所有正交(亦即保长)变换构成一个紧致群，叫做n阶正交群，以符号$O(n)$表之。

5）*n维酉空间的酉变换群*：设$\boldsymbol{C}^n$是一个n维酉空间，则其上所有的酉变换(即：使$(gx,gy)=(x,y)$对任何$x,y\in\boldsymbol{C}^n$恒成立的变换)构成一个紧致群，叫做n阶酉群，以符号$U(n)$表之。不难看出$U(1)=S^1$。

现在给出拓扑群和紧致群的定义。

定义　设G是一个非空集合，假如：

1） G为一个群；

2） G为拓扑空间；

3） G中所具有的群的运算：$(a,b)\mapsto a\cdot b$；$a\to a^{-1}(a,b\in G)$在拓扑空间中是连续的，

那末就称G为拓扑群。

若在2)中加上紧致性要求，G称为紧致拓扑群，简称为紧致群。

对于一个拓扑群G上给定的连续函数$f(x)$，我们可以结合群上的右平移ρ_a：$G\to G$，$\rho_a(x)=x\cdot a$，而得出一个新的函数

$$f_a(x)=f(x\cdot a).$$

紧致群的一个重要特征是对于其上的连续函数f，有一个自然的求平均值运算，它是一个满足下列条件的映射I：$C(G)\to \mathbf{C}$（或$\mathbf{R}$），其中$C(G)$表示G上所有连续函数全体组成的集合，即

1） 不变性：$I(f_a)=I(f)$，$f\in C(G)$，$a\in G$；

2） 线性：$I(\lambda f+\mu g)=\lambda I(f)+\mu I(g)$，$f,g\in C(G)$，$\lambda,\mu\in \mathbf{C}$（或$\mathbf{R}$）；

3） 若f在G中处处非负，则$I(f)\geqslant 0$，再加上f不恒等于零的条件，则$I(f)>0$；

4） 若$f\equiv c$（常数），则$I(f)=c$。

例1 设G是一个有限群，则显然可以定义

$$I(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\quad (|G|=G\text{的元素个数})$$

是f的平均值，它满足1)—4)。

例2 设$G=S^1$，则可以用积分来定义平均值如下：

$$I(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,d\theta, \tag{1}$$

不难验证它也是满足1)—4)的。

例3 设$G=S^3$。把它几何地想成$\mathbf{R}^4$中的单位球面，则可用

$S^3(1)$上的体积元素$\mathrm{d}\sigma$来定义平均值如下：

(2) $$I(f)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{S^3(1)}f(x)\mathrm{d}\sigma,$$

其中$2\pi^2$是$S^3(1)$的体积。不难看出它也自然满足上述四条。

在附录一中，我们将给出紧致群上具有性质 1)— 4)的平均运算的存在性和唯一性定理的证明。

定理1 设G为一个紧致群，$C(G)$为其上的所有复值(或实值)连续函数的集合，则满足性质 1)— 4)的平均运算I：$C(G)\to \boldsymbol{C}$(或$\boldsymbol{R}$)唯一存在，称之为G上的(正规)**不变积分**，并用符号

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g$$

表示$I(f)$。

下面我们就要运用“平均法”来系统地研讨紧致群的线性表示论。

§2 紧致群的线性表示论

在本节中，我们将以符号G表示一个任给的紧致群，而不再另加说明。设V是一个复或实的向量空间，$\mathrm{GL}(V)$是由V上的所有可逆线性变换所组成的群，叫做V的**全线性群**。V上线性变换全体组成的向量空间$\mathscr{L}(V,V)$自然与$\boldsymbol{C}^{n^2}$(或$\boldsymbol{R}^{n^2}$)同构，在$\mathscr{L}(V,V)$中引入$\boldsymbol{C}^{n^2}$(或$\boldsymbol{R}^{n^2}$)的拓扑结构，于是$\mathrm{GL}(V)$是$\mathscr{L}(V,V)$中的开集。不难看出$\mathrm{GL}(V)$是一个拓扑群。

定义 若映射φ：$G\to\mathrm{GL}(V)$是拓扑群的同态映射(即：作为群的映射是同态，作为拓扑空间的映射是连续映射)，称φ为G的一个**线性表示**，简称为**表示**。通常也用符号(G,V)来表示之。

本节中我们将以不变积分所提供的平均法为主要手段来研讨G的线性表示。

定理2 设(G,V)是一个复(实)表示，则V上必存在一个G-不变的酉积(内积)。即：

$$(gx,gy)=(x,y),\qquad 对任何g\in G,\ x,y\in V$$

恒成立。

证 设$\langle x,y\rangle$是V上的一个任选的酉积(内积)，令

$$(x,y)=\int_G \langle gx,gy\rangle \mathrm{d}g, \tag{3}$$

则对任给的$a\in G$，均有

$$(ax,ay)=\int_G \langle gax,gay\rangle \mathrm{d}g \quad (由不变性)$$

$$=\int_G \langle gx,gy\rangle \mathrm{d}g=(x,y),$$

所以(x,y)是G-不变的酉积(内积)。 ▎

推论 设$G\subset \mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})$($n$维复向量空间上的全线性群，或视所有$n$阶可逆复矩阵组成的矩阵群)是一个紧致子群，则必存在一个适当的$A\in \mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})$，使得

$$AGA^{-1}\subset U(n)。$$

因此$U(n)$是$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})$的一个极大紧致子群，而$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})$的任何极大紧致子群都和$U(n)$共轭。

证 设$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$是$\boldsymbol{C}^n$在原给酉积$\langle\ ,\ \rangle$下的标准正交基，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是在上述$G$-不变酉积$(\ ,\ )$下的一组标准正交基。$A$是将$\boldsymbol{\alpha}_i$映到$\boldsymbol{e}_i(i=1,\cdots,n)$的那个在$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})$中的元素，即得所欲证。 ▎

定义 (G,V)和(G,W)之间若存在一个和G的作用可交换的线性同构A：$V\to W$，即：$A(gx)=gA(x)$，则称(G,V)和(G,W)等价(或G-同构)，记为$(G,V)\simeq(G,W)$。

同样，φ：$G\to \mathrm{GL}(V)$和ψ：$G\to \mathrm{GL}(W)$是等价的充要条件是：存在同构A：$V\to W$，使得$\sigma_A\circ\varphi=\psi$，其中$\sigma_A$：$\mathrm{GL}(V)\to$

$GL(W)$的定义是

$$\sigma_A(B) = ABA^{-1}, \quad B \in GL(V).$$

定义 对于(G,V)，若有一个子空间$U \subset V$在G的作用下不变，即：

$$G \cdot U = \{g \cdot x;\ g \in G,\ x \in U\} \subset U,$$

则称U为G-**不变子空间**。

显然有，$\{0\}$和V本身是G-不变的。今后在不致发生混淆的情况下，G-不变子空间简称为不变子空间。

定义 若$\{0\}$和V是(G,V)仅有的不变子空间，则称(G,V)为**不可约表示**。否则叫**可约表示**。

下面我们建立线性表示的几种常用的运算：

1）和：设$(G,V_i)(i=1,2)$是G的两个线性表示，我们可以在$V_1 \oplus V_2$上赋以G的作用如下：

$$g(x,y) = (gx, gy), \quad x \in V_1,\ y \in V_2,$$

这个新的表示叫做原来两个表示之和，记为$(G,V_1) \oplus (G,V_2)$。若用φ_i：$G \to GL(V_i)$来记线性表示，则它们的和记为

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2:\ G \to GL(V_1 \oplus V_2).$$

2）对偶：设(G,V)是一个线性表示，V^*表示V的对偶空间（即：V上所有的线性函数组成的向量空间），在V^*上可如下规定G的作用gf，使得

$$\langle g \cdot f, x\rangle = \langle f, g^{-1}x\rangle,$$

其中$f \in V^*$，$x \in V$，$g \in G$，$\langle f, x\rangle = f(x)$。容易验证：上述规定构成$G$到$V^*$上的一个线性表示，称之为对偶表示，记为$(G,V^*)$。若用$\varphi$：$G \to GL(V)$记表示，则$\varphi$的对偶表示记为$\varphi^*$：$G \to GL(V^*)$。

3）张量积：把2)中的规定推广到多线性函数，设$\mathscr{L}(V_1 V_2; C(\text{或}R))$是$V_1, V_2$上所有双线性函数构成的向量空间，$\varphi_i: G \to GL(V_i)(i=1,2)$是$G$在$V_1$及$V_2$上的表示。规定$(\varphi_1, \varphi_2)^*$：$G \to GL(\mathscr{L}(V_1, V_2;\ C(\text{或}R))$如下：

$$(g\cdot f)(x_1,x_2)=f(g^{-1}x_1,g^{-1}x_2),\qquad f\in\mathscr{L}(V_1,V_2;\ \boldsymbol{C}(\text{或}\boldsymbol{R})).$$

在向量空间的张量积中，我们用张量积把多线性函数归于单线性函数的讨论。我们有

$$\mathscr{L}(V_1,V_2;\ \boldsymbol{C})\cong\mathscr{L}(V_1\otimes V_2;\ \boldsymbol{C})=(V_1\otimes V_2)^*.$$

再由对偶关系

$$(\mathscr{L}(V_1,V_2;\ \boldsymbol{C}))^*\cong V_1\otimes V_2.$$

利用这些关系式，我们规定φ_1,φ_2的张量积$\varphi_1\otimes\varphi_2$为：

$$\varphi_1\otimes\varphi_2=((\varphi_1,\varphi_2)^*)^*.$$

容易验证：

$$g(v\otimes w)=g\cdot v\otimes g\cdot w,\qquad v\in V_1,\ w\in V_2.$$

4）设φ_i：$G\to\mathrm{GL}(V_i)(i=1,2)$分别是$G$到$V_i$上的线性表示。$\mathscr{L}(V_1,V_2)$是由所有的$V_1$到$V_2$上的线性变换构成的向量空间。现在在$\mathscr{L}(V_1,V_2)$上赋以$G$的作用如下：

$$g\cdot A=\varphi_2(g)A\varphi_1(g)^{-1},\qquad A\in\mathscr{L}(V_1,V_2),$$

亦即下图

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2(g)"] \\
V_1 \arrow[r, "g\cdot A"] & V_2
\end{tikzcd}$$

是可交换的。也可写为

$$(g\cdot A)(x)=g\cdot Ag^{-1}(x),\qquad x\in V_1.$$

由于$\mathscr{L}(V_1,V_2)\cong V_1\otimes V_2^*$，可以证明上述表示等价于$\varphi_1\otimes\varphi_2^*$。请读者作为练习自证之。

利用上述诸运算，我们可以由简单的表示来构造较为复杂的表示，又可把较为复杂的表示进行分解。此外，表示的和与张量积均可推广到多个的情况。利用张量积的概念，对一个给定的表示φ：$G\to\mathrm{GL}(V)$，可定义张量幂

$$\varphi\otimes\varphi:\ G\to\mathrm{GL}(V\otimes V).$$

更一般的，φ^n：$G\to\mathrm{GL}(\bigotimes\limits_n V)$，以及对称幂$S^n\varphi$：$G\to\mathrm{GL}(S^nV)$和反称幂$\Lambda^n\varphi$：$G\to\mathrm{GL}(\Lambda^nV)$。由于篇幅关系，在此不详述了。