第一章　基本概念复习

§1.1　基 本 内 容

1．实数

对象的集合或总合的概念在数学中是非常基本的，特别是数的集合，是科学和工程中定量工作的基础．大家已经熟悉的有下列这些重要的数集(合)．

(1) **自然数** 1, 2, 3, 4, ……也称为正整数，被用于计数．

(2) **整数** 0, ±1, ±2, ±3, ……，产生这些数是由于要使任何两个自然数的减法(加法的逆)有意义．于是 $2-6=-4$, $8-8=0$, 等等．

(3) **有理数**例如 $\frac{2}{3}$, $-\frac{10}{7}$, 等等．产生这些数是由于要使任何两个整数的除法(乘法的逆)或商有意义(以零为除数是没有定义的，这情形应除外)．

(4) **无理数**例如 $\sqrt{2}$, π, 等等．这种数不能表述成两个整数之商．

注意，自然数集合是整数集的一部分，即一个子集，而后者又是有理数集合的一个子集．

有理数及无理数的数集称为实数集合(以区别于后面要讲的虚数或复数)，它是由正数、负数和零组成．实数可以用直线上的点来表示，如图 1-1 所示．正是这个原因，我们常把点和数混同使用．

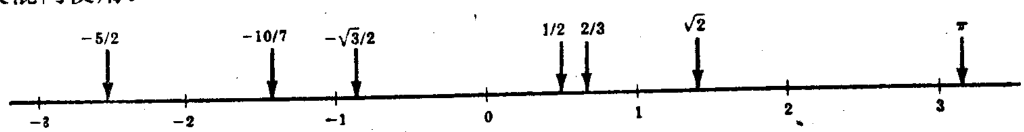


图 1-1

大家也已熟悉了不等式的概念．因而若 $a-b$ 是正数或负数，我们就分别讲实数 a 大于或小于 b (用记号 $a>b$ 或 $a<b$ 表示)．对任何两个实数 a 和 b，在 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 这三者之中必有一个关系成立．

2．代数运算法则

若 a, b, c 是任何实数，则下列代数运算法则成立．

(1) $a+b=b+a$　　加法交换律．

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$　　加法结合律．

(3) $ab=ba$　　乘法交换律．

(4) $a(bc)=(ab)c$　　乘法结合律．

(5) $a(b+c)=ab+ac$　　分配律．

从这些法则出发(如果把它们作为公理或公设的话),我们能证明通常的符号法则,如 $(-5)(3)=-15$,$(-2)(-3)=6$,等.

大家也熟悉通常的指数运算法则:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad(a\neq0),\quad (a^m)^n=a^{mn}. \tag{1-1}$$

3. 函数

另一个重要概念是函数. 函数 f 是一个法则,它对集合 A 的每个对象 x(称为元或元素),指定集合 B 的一个元素 y. 我们用 $y=f(x)$ 来指明这个对应关系,其中 $f(x)$ 称为函数在 x 的值.

例 1. 若 $f(x)=x^2-3x+2$,则 $f(2)=2^2-3(2)+2=0$.

大家也已熟悉了"函数作图"的方法,那就是取一些数对 (x, y) 并把它们看作 xy 坐标系中的点而描出. 一般说来,$y=f(x)$ 的图象是一条曲线. 因为 y 通常是由 x 决定的,所以有时称 x 是独立变数(自变数)而称 y 是应变数.

4. 常用的函数

(1) **多项式** $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ 设 $a_0\neq0$,称 n 是这多项式的次数. 倘若把重根重复计数,则多项式方程 $f(x)=0$ 恰有 n 个根. 例如 $x^3-3x^2+3x-1=0$ 可以写成 $(x-1)^3=0$,所以这个方程的三个根是 1, 1, 1. 注意到我们这里已经利用了二项式定理

$$(a+x)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\cdots+x^n, \tag{1-2}$$

其中的二项式系数由下式给出:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1-3}$$

而 n 的阶乘是 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots1$,规定 $0!=1$.

(2) **指数函数** $f(x)=a^x$ 这种函数满足(1-1)给出的运算法则. 一个重要的特殊情形是 $a=e=2.7182818\cdots$.

(3) **对数函数** $f(x)=\log_a x$ 这种函数是指数函数的反函数,即若 $a^x=y$,则 $x=\log_a y$,其中 a 称为对数的底. 交换 x 与 y 就得 $y=\log_a x$. 若 $a=e$,就用 $\ln x$ 来记 $\log_e x$,称为 x 的自然对数,e 常被称为对数的自然底. 自然对数(或其他底的对数)满足的基本运算法则是

$$\left.\begin{aligned}&\ln(mn)=\ln m+\ln n,\quad \ln\frac{m}{n}=\ln m-\ln n,\\ &\ln m^p=p\ln m.\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

(4) **三角函数** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 这些函数之间的一些基本关系如下:

(a) $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

(b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sec^2 x-\tan^2 x=1$, $\csc^2 x-\cot^2 x=1$.

(c) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$.

(d) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$,

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y}.$$

(e) $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$, 其中 $\tan\alpha=\frac{A}{B}$.

三角函数都是周期的. 例如,图 1-2、1-3 所示的 $\sin x$ 和 $\cos x$, 它们的周期是 2π.

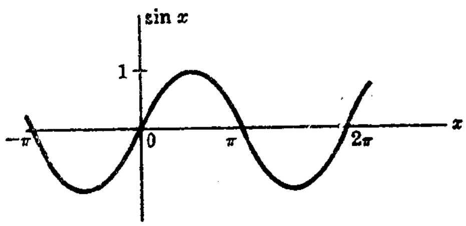


图 1-2

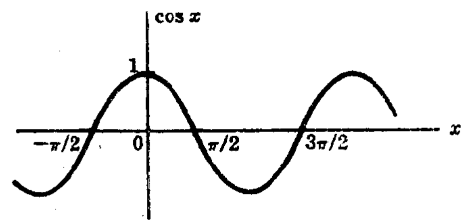


图 1-3

(5) **反三角函数** $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$ 这些函数是三角函数的反函数. 例如, 若 $\sin x=y$, 则 $x=\sin^{-1}y$, 或者交换 x 与 y 而成 $y=\sin^{-1}x$.

(6) **双曲函数** 这些函数用指数函数定义如下:

(a) $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{1}{\tanh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,

$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$, $\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$.

类似于三角函数的一些基本恒等式是:

(b) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$, $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$.

(c) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cdot\cosh y\pm\cosh x\cdot\sinh y$,

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$,

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\cdot\tanh y}.$$

用 $\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$ 等给出的反双曲函数可用对数函数来表出(例如可见问题 1.9).

5. 极限

若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 可以找到一个数 $\delta>0$, 使得对任何适合 $0<|x-a|<\delta$ 的 x 成立 $|f(x)-l|<\varepsilon$, 就说当 x 趋于 a 时函数 $f(x)$ 有极限 l, 简记成 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

注意, $|p|$ 即 p 的绝对值, 在 $p>0$ 时等于 p, 在 $p<0$ 时等于 $-p$, 在 $p=0$ 时等于 0.

例 2. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+8)=5$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

若 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l_2$, 则我们有下面的极限运算定理:

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\pm f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=l_1\pm l_2$.

(b) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f_1(x)]\cdot[\lim\limits_{x\to a} f_2(x)]=l_1\cdot l_2$.

(c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$ (若 $l_2\neq 0$).

6. 连续

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, 则称函数 $f(x)$ 在 a 点连续.

例 3. $f(x)=x^2-4x+8$ 在 $x=1$ 处连续. 然而若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 6, & x=2,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续(或间断), 并说 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x)$ 在一个区间(例如 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 或 $x_1<x\leqslant x_2$ 等)的每一点处都连续, 就说 $f(x)$ 在这个区间内连续.

若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都在一个区间内连续, 则 $f_1(x)\pm f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ 及 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (这里要 $f_2(x)\neq 0$) 也在这个区间内连续.

7. 导数

$y=f(x)$ 在点 x 的导数定义为

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}, \tag{1-5}$$

只要这个极限是存在的; 其中 $h=\Delta x$, $\Delta y=f(x+h)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

$y=f(x)$ 的微分定义为

$$dy=f'(x)dx, \quad 其中\ dx=\Delta x. \tag{1-6}$$

求导数的过程称为微分法. 取 $y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ 的导数就能得到二阶、三阶及高阶导数, 分别表示为 $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$, $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$, 等等.

几何上看来, 函数 $f(x)$ 在一点的导数表示了曲线 $y=f(x)$ 在该点的切线的斜率.

如果函数在一点有导数, 则这函数在该点必连续. 然而, 反过来不一定成立.

8. 微分法公式

下面的 u、v 表示 x 的函数而 a、c、p 表示常数. 当然, 我们假定 u 和 v 的导数是存在的, 亦即假定 u 和 v 是可微的.

(1) $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$, (2) $\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$,

(3) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$,

(4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$,

(5) $\frac{d}{dx}u^p=pu^{p-1}\frac{du}{dx}$,

(6) $\frac{d}{dx}(a^u)=a^u\ln a\frac{du}{dx}$,

(7) $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$,

(8) $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$,

(9) $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$,

(10) $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$,

(11) $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$,

(12) $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$,

(13) $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\cdot\tan u\frac{du}{dx}$,

(14) $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cdot\cot u\frac{du}{dx}$,

(15) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

(16) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

(17) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(18) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=\frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

(19) $\frac{d}{dx}\sinh u=\cosh u\frac{du}{dx}$,

(20) $\frac{d}{dx}\cosh u=\sinh u\frac{du}{dx}$.

特别,当 $u=x$ 时,因 $\frac{du}{dx}=1$, 所以上列公式可被简化.

9. 积分

若 $\frac{dy}{dx}=f(x)$, 则称 y 是 $f(x)$ 的一个不定积分或反导数,记为

$$\int f(x)dx. \tag{1-7}$$

因为常数的导数是零,所以 $f(x)$ 的所有不定积分只能相差一个常数.

$f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的定积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to 0}h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)], \tag{1-8}$$

倘若这个极限是存在的话. 几何上看,若 $f(x)\geqslant 0$, 这定积分就表示位于曲线 $y=f(x)$ 下方、由 x 轴、$x=a$ 和 $x=b$ 所界的一块面积. 如果 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续,则积分存在.

定积分和不定积分由下面的定理所联系.

定理 1-1(微积分基本定理) 若 $f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{d}{dx}g(x)dx=g(x)\Big|_a^b=g(b)-g(a).$$

例 4. $$\int_1^2 x^2dx=\int_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}.$$

求积分的过程称为积分法.

10. 积分法公式

下面的 u 和 v 表示 x 的函数而 a、b、c、p 表示常数. 在所有公式中我们都省写了应该有的积分常数.

(1) $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$, (2) $\int cu\,dx = c\int u\,dx$,

(3) $\int u\left(\dfrac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int v\left(\dfrac{du}{dx}\right)dx$ 或 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, 这称为分部积分法,

(4) $\int F(u)\,dx = \int F(w)\,\dfrac{dw}{w'}$, 其中 $w = u(x)$ 且 $w' = \dfrac{dw}{dx}$ 被表示为 w 的函数, 这称为换元(或变换)积分法,

(5) $\int u^p\,du = \dfrac{u^{p+1}}{p+1} \quad (p \neq -1)$, (6) $\int u^{-1}\,du = \int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$,

(7) $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, (8) $\int e^u\,du = e^u$,

(9) $\int \sin u\,du = -\cos u$, (10) $\int \cos u\,du = \sin u$,

(11) $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u|$, (12) $\int \cot u\,du = \ln|\sin u|$,

(13) $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u|$, (14) $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u|$,

(15) $\int e^{au} \sin bu\,du = \dfrac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$,

(16) $\int e^{au} \cos bu\,du = \dfrac{e^{au}(a \cos bu + b \sin bu)}{a^2 + b^2}$,

(17) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \dfrac{u}{a}$, (18) $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{u}{a}$,

(19) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, (20) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$,

(21) $\int \sinh u\,du = \cosh u$, (22) $\int \cosh u\,du = \sinh u$.

11. 序列和级数

用 $u_1, u_2, \cdots$ 或简单地用 $\langle u_n \rangle$ 所表示的序列是个定义在自然数集合上的函数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个数 $N > 0$, 使得对所有的 $n > N$, 成立 $|u_n - l| < \varepsilon$, 则称序列以 l 为极限或收敛于 l. 这时我们写 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$. 如果序列不收敛, 我们就说它是发散的.

考虑序列 $u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \cdots$, 或 $S_1, S_2, S_3, \cdots$, 其中 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. 我们称 $\langle S_n \rangle$ 是序列 $\langle u_n \rangle$ 的部分和序列. 符号

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{或简记为} \quad \sum u_n \tag{1-9}$$

规定作为 $\langle S_n \rangle$ 的同义语而称为无穷级数. 按照 $\langle S_n \rangle$ 的收敛或发散而说这个级数是收敛的或发散的. 若 $\langle S_n \rangle$ 收敛于 S, 就说 S 是这个无穷级数的和.

下面是一些有关无穷级数的重要定理.

定理 1-2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

定理 1-3 若 $\sum|u_n|$ 收敛且 $|v_n|\leqslant|u_n|$, 则 $\sum|v_n|$ 收敛.

定理 1-4 若 $\sum|u_n|$ 收敛,则 $\sum u_n$ 收敛.

这时我们说 $\sum u_n$ 的收敛是绝对的,或称它为*绝对收敛*. 这种级数的一个性质是可以重新安排它各项的顺序而不影响它的和.

定理 1-5 若 $\sum|u_n|$ 发散且 $|v_n|\geqslant|u_n|$, 则 $\sum|v_n|$ 发散[注1].

定理 1-6 设 $|u_n|=f(n)\geqslant 0$, 则当积分

$$\int_1^\infty f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx$$

存在时,级数 $\sum|u_n|$ 收敛,否则 $\sum|u_n|$ 发散[注2].

这个定理常称为*积分检验法*.

定理 1-7 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$, 则级数 $\sum|u_n|$ 发散, 然而在 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ 时级数既可能收敛,也可能发散.

定理 1-8 设若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=r$, 则级数 $\sum u_n$ 在 $r<1$ 时(绝对)收敛, $r>1$ 时发散. 若 $r=1$, 则不能作出结论.

这个定理常称为*比率检验法*.

上面这些概念也可以推广到 u_n 是 x 的函数的情形,这时 u_n 被表示成 $u_n(x)$. 在这种情形,序列或级数将按 x 的特定值而收敛或发散. 使得序列或级数收敛的 x 值的集合称为*收敛区域*并用 $\mathscr{R}$ 来表示.

例 5. 若我们限定 x 只取实数值,则级数 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 的收敛区域(这时是一个区间)由 $-1<x<1$ 给出.

12. 一致收敛

若对给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个数 N (这个数一般同时依赖于 ε 和 x), 使得对任何 $n>N$, 成立 $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$, 则我们就可说 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ 在区域 $\mathscr{R}$ 内收敛于和 $S(x)$, 这里 $S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$. 若能够找到只依赖于 ε 而不依赖于 x 的 N, 我们就说级数在 $\mathscr{R}$ 内*一致地收敛*于 $S(x)$. 一致收敛级数有许多重要的优越性质, 见下面的定理.

定理 1-9 若 $u_n(x)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续, 且 $\sum u_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续.

定理 1-10 若 $\sum u_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛于 $S(x)$, 且 $u_n(x)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 可积, 则

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b[u_1(x)+u_2(x)+\cdots]dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\cdots.$$

定理 1-11 若 $u_n(x)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 连续并有连续的导数, 且若 $\sum u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$ 而 $\sum u_n'(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛, 则

[注1] 原书中此句为“则 $\sum|v_n|$ 和 $\sum v_n$ 都发散”, 其中 $\sum v_n$ 发散这一点在一般情况下是不成立的. ——译注

[注2] 一般讲这个结论未必正确, 但当 $f(x)$ 是单调连续函数时此结论一定成立. ——译注

$$S'(x)=\frac{d}{dx}[u_1(x)+u_2(x)+\cdots]=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots.$$

一致收敛性的一个重要的检验方法是下面的维尔斯特拉斯 M 检验法.

定理 1-12 若有正的常数 $M_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的集合，使在 $\mathscr{R}$ 内成立 $|u_n(x)|\leqslant M_n$，并且 $\sum M_n$ 是收敛的，则在 $\mathscr{R}$ 内 $\sum u_n(x)$ 是一致收敛(同时也是绝对收敛)的.

13. 泰勒级数

$f(x)$ 在 $x=a$ 处的泰勒级数定义为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n, \quad (1\text{-}10)$$

其中

$$R_n=\frac{f^{(n)}(x_0)(x-a)^n}{n!}, \quad x_0 \text{ 介于 } a \text{ 和 } x \text{ 之间}, \quad (1\text{-}11)$$

称为余项. 这里假定 $f(x)$ 至少有 n 阶导数. $n=1$ 的情形常称为平均律或平均值定理，并可写为

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(x_0), \quad x_0 \text{ 介于 } a \text{ 和 } x \text{ 之间}. \quad (1\text{-}12)$$

相应于(1-10)的无穷级数称为 $f(x)$ 的形式泰勒级数，若在某区间内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$，则级数将在这个区间内收敛. 下面给出一些重要的泰勒级数及其收敛区间.

(1) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots, \quad -\infty<x<\infty,$$

(2) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, \quad -\infty<x<\infty,$$

(3) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, \quad -\infty<x<\infty,$$

(4) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \quad -1<x\leqslant 1,$$

(5) $$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots, \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的级数常称为幂级数. 幂级数在完全落在它的收敛区间内的任一闭区间上都是一致收敛的(见问题 1.120).

14. 二元或多元函数

单变数函数的概念可以推广到两个或多个变数的函数. 例如 $z=f(x, y)$ 定义了一个函数 f，它对数对 (x, y) 指定了一个数 z.

例 6. 若 $f(x, y)=x^2+3xy+2y^2$，则 $f(-1, 2)=(-1)^2+3(-1)(2)+2(2)^2=3$.

如大家所熟知的，在三维 xyz 坐标系中作 $z=f(x, y)$ 的图象，得到的是一个曲面. 我们有时称 x 和 y 是独立变数(自变数)，z 是应变数. 我们往往写 $z=z(x, y)$ 而不是 $z=f(x, y)$，这里在两种不同的意义下使用着符号 z，然而将不会混淆结果.

两个或多个变数的函数的极限和连续的概念与单变数情形是相仿的.

(1) **偏导数**

$f(x, y)$ 对于 x 和 y 的偏导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}, \tag{1-13}$$

倘若这些极限是存在的话．我们常记 $h=\Delta x$, $k=\Delta y$. 注意 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 只是保持 y 不变下 f 关于 x 的普通导数，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 是保持 x 不变下 f 关于 y 的普通导数．于是以前给出的普通的微分法公式这里也适用．

例 7. 若 $f(x, y)=3x^2-4xy+2y^2$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}=6x-4y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-4x+4y$.

高阶偏导数也可类似地定义．例如我们有二阶偏导数

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

式(1-13)中的偏导数有时也记成 f_x 和 f_y. 这时，$f_x(a, b)$ 和 $f_y(a, b)$ 就表示在 (a, b) 算得的这些偏导数．类似地，式(1-14)中的偏导数也可分别记成 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}. 若 f 至少有二阶的连续偏导数，则(1-14)中第二与第三个结果是一样的．

$f(x, y)$ 的全微分定义为

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{1-15}$$

这里 $h=\Delta x=dx$, $k=\Delta y=dy$.

这些结果容易推广到更多个独立变数的情形．

(2) **二元或多元函数的泰勒级数**

一元函数的有关泰勒级数的概念可加以推广．例如，$f(x, y)$ 在 $x=a$, $y=b$ 处的泰勒级数可以写为

$$\begin{aligned}f(x, y)=&f(a, b)+f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)(y-b)+\frac{1}{2!}[f_{xx}(a, b)(x-a)^2\\ &+2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a, b)(y-b)^2]+\cdots.\end{aligned} \tag{1-16}$$

15. 线性方程组和行列式

考虑线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases} \tag{1-17}$$

这在 xy 平面上表示两条直线，一般讲这两条直线将相交于一点，其坐标 (x, y) 可由解联立方程(1-17)而得到．我们有

$$x=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}. \tag{1-18}$$

为了方便，可把它写成行列式形式

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1-19}$$

这里，我们定义二阶行列式是

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc. \tag{1-20}$$

注意，(1-19)中分母是由(1-17)中的 x 和 y 的系数组成的行列式. x 的分子是将分母的第一列换成(1-17)的右端的常数 c_1, c_2 而得. 类似地，y 的分子是将分母的第二列换成 c_1, c_2 而得到. 这个求解方法常称为克拉默法则. 在式(1-19)的分母是零的情形，由(1-17)所表示的两条直线不相交于一点，它们可能是重合或平行的.

这些概念容易推广. 考虑方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{1-21}$$

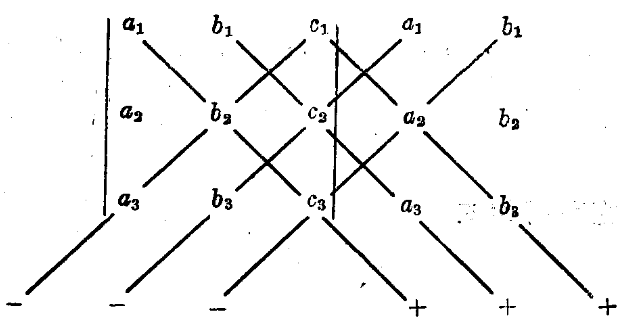
这表示三个平面. 如果它们交于一点，则交点的坐标 (x, y, z) 可由克拉默法则求得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{1-22}$$

这里我们定义三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-(b_1a_2c_3+a_1c_2b_3+c_1b_2a_3). \tag{1-23}$$

式(1-23)可用下面的图表来记忆，其中重复写出了前两列：



(1-24)

取在同一联线上各项的乘积，并标以所示的符号 + 或 −，然后求和.

三阶行列式也可用二阶行列式来计算如下：

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1-25}$$

其中要注意 a_1, b_1, c_1 是第一行的元素，而相应的二阶行列式是从给出的三阶行列式中划去这个元素所在的行和列后所得.

行列式的一般理论将在第十五章里考虑,上面的结果只是其特殊情形.

16. 极大和极小

如果对所有适合 $|x-a|<\delta$ 的 x 都有 $f(x)\leqslant f(a)$ [或 $f(x)\geqslant f(a)$], 就说 $f(a)$ 是一个相对极大(或相对极小). $f(x)$ 若在 $x=a$ 有相对极大或极小, 则必有 $f'(a)=0$ (假定 $f(x)$ 是可微的). 然后, 若 $f''(a)<0$, 则 $f(a)$ 是相对极大; 而若 $f''(a)>0$, 则 $f(a)$ 是相对极小. 要注意 $f(x)$ 可能取得相对极大或极小的点是从解 $f'(x)=0$ 得到的, 亦即找出那些使 $f(x)$ 的图象的斜率等于零的 x 值.

类似地, 若 $f_x(a, b)=0$, $f_y(a, b)=0$, 则 $f(x, y)$ 在 $x=a$, $y=b$ 可能取得相对极大或极小. 于是,可能使 $f(x, y)$ 取得相对极大或极小的点是从解联立方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{1-26}$$

得到的. 类似地还可推广到多于两个自变数的函数的情形.

17. 拉格朗日乘子法

有时我们希望去求 $f(x, y)$ 服从某些约束条件 $\phi(x, y)=0$ 的相对极大或极小. 为解决这个问题, 我们构作函数 $h(x, y)=f(x, y)+\lambda\phi(x, y)$ 并令

$$\frac{\partial h}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial h}{\partial y}=0. \tag{1-27}$$

常数 λ 称为拉格朗日乘子. 这个方法称为拉格朗日乘子法. 其进一步推广可见问题 1.54 和 1.150.

18. 积分的莱布尼兹微分法则

设

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)dx, \tag{1-28}$$

其中 f 假定是连续可微的. 莱布尼兹法则指出,如果 a 和 b 是 α 的可微函数,则

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}dx+f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}. \tag{1-29}$$

19. 多重积分

一元函数积分的推广就导致多元函数的多重积分的概念. 因为这个理论涉及的一些概念对某些读者来说可能是陌生的,所以我们把这个题目推迟到第六章去讨论.

20. 复数

复数的出现是为了解那些不被任何实数所适合的多项式方程. 例如 $x^2+1=0$ 或 $x^2+x+1=0$. 我们假定复数呈 $a+bi$ 的形式, 其中 a、b 是实数,而 i 称为虚单位,具有性质 $i^2=-1$. 我们规定复数的四则运算如下:

(1) 加法 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

(2) 减法 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

(3) **乘法**　$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

(4) **除法**　$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$

注意，我们这里除了在出现 i^2 的地方用 -1 代替外，使用了通常的代数运算法则. 代数运算的交换律、结合律和分配律对复数也适用. 我们分别称 a 和 b 是 $a+bi$ 的实部和虚部. 两个复数当且仅当它们的实部和虚部分别相等时才相等.

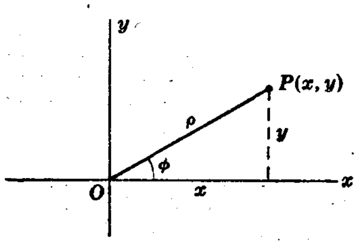


图 1-4

一个复数 $z=x+iy$ 可以看成是 xy 平面上具有坐标 (x, y) 的一个点 P. 这时的 xy 平面称为复平面或阿尔根图(图 1-4). 若我们作联接原点 O 与 P 的线段，设距离 OP 是 ρ，φ 是 OP 与 x 轴正向的夹角，从图 1-4 我们有

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-30}$$

那末，我们可把复数写成所谓极形式

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho\operatorname{cis}\varphi. \tag{1-31}$$

我们常称 ρ 是 z 的模或绝对值且用 $|z|$ 表示. 角 φ 称为 z 的辐角，简记为 $\arg z$. 我们也可写 $\rho=\sqrt{z\bar{z}}$，其中 $\bar{z}=x-iy$，称为 $z=x+iy$ 的共轭.

若将两个复数写成极形式

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), \tag{1-32}$$

则

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{1-33}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \tag{1-34}$$

如果 n 是任何整数，我们有

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{1-35}$$

这常称为棣莫弗定理. 我们可以用这个定理去求复数的根. 例如，若 n 是正整数，

$$\begin{aligned}z^{\frac{1}{n}}&=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{\frac{1}{n}}\\&=\rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right],\quad k=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned} \tag{1-36}$$

根据前面关于 e^x, $\sin x$ 和 $\cos x$ 的级数，使我们定义

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi. \tag{1-37}$$

这称为欧拉公式. 利用这个公式我们可把公式(1-31)～(1-36)重写成指数的形式.

本章介绍的许多有关实数的概念也可推广到复数. 这些概念将在第十三章得到发展.

§1.2　问题及其解

1. 实数和代数定律

1.1　证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

解：我们用反证法. 假设 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 是正整数而且它们没有大于 1 的公因子$\left(\text{这种情况下我们就说 }\frac{p}{q}\text{ 是最简分式}\right)$. 平方，则得 $2=\frac{p^2}{q^2}$ 或 $p^2=2q^2$. 于是 p^2 是偶

数，所以 p 也必须是偶数．于是 $p=2m$，其中 m 是正整数．代入 $p^2=2q^2$ 中，得到 $q^2=2m^2$，所以 q^2 是偶数，从而 q 也是偶数．即 $q=2n$，其中 n 是正整数．因为 p 和 q 都是偶数，所以 2 就是它们的公因子，这违反了它们没有大于 1 的公因子的假定．这个矛盾说明假设 $\sqrt{2}$ 是有理数是不正确的，故而得证 $\sqrt{2}$ 是无理数．

1.2 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 哪个大?

解：设若 $\sqrt{2}\geqslant\sqrt[3]{3}$，则求出两边的六次幂，就有 $2^3\geqslant 3^2$，而这是错误的．于是知道 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$．

1.3 假定实数 a, b, c 满足 §1.1.2 的代数运算法则，试证明 $(b+c)a=ba+ca$．

解：从 §1.1.2 的法则(5)，我们有 $a(b+c)=ab+ac$．而由法则(3)可得

$$a(b+c)=(b+c)a, \quad ab=ba, \quad ac=ca,$$

于是 $(b+c)a=ba+ca$．

2. 函数

1.4 若 $f(x)=2x^3-3x+5$，求 (a) $f(-1)$，(b) $f(0)$，(c) $f(x+h)$．

解：(a) $f(-1)=2(-1)^3-3(-1)+5=2(-1)+3+5=6$;

(b) $f(0)=2(0)^3-3(0)+5=0+0+5=5$;

(c) $$\begin{aligned} f(x+h)&=2(x+h)^3-3(x+h)+5=2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-3x-3h+5\\ &=2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-3x-3h+5. \end{aligned}$$

1.5 用指数法则(1-1)证明对数法则(1-4)．

解：由定义，若 $e^x=m$，则 $x=\ln m$．类似地，若 $e^y=n$，则 $y=\ln n$．

因为 $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$，我们有 $m\cdot n=e^{x+y}$ 或 $x+y=\ln(mn)$，即 $\ln(mn)=\ln m+\ln n$．

因为 $\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$，我们有 $\dfrac{m}{n}=e^{x-y}$ 或 $x-y=\ln\left(\dfrac{m}{n}\right)$，即 $\ln\left(\dfrac{m}{n}\right)=\ln m-\ln n$．

因为 $(e^x)^p=e^{xp}$，我们有 $m^p=e^{xp}$ 或 $xp=\ln m^p$，即 $\ln m^p=p\ln m$．

1.6 证明 (a) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，(b) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$．

解：因为 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$，我们令 $y=x$ 就有

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x. \tag{1}$$

另外，我们还有

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1. \tag{2}$$

所要的结果可分别由(1)和(2)相减或相加得出．

1.7 证明 $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$，其中 $\tan\alpha=\dfrac{A}{B}$．

解：我们有

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right). \tag{1}$$

设(见图 1-5)

$$\sin\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ 或 } \tan\alpha=\frac{A}{B}.$$

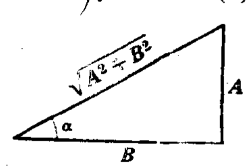


图 1-5

(1)式成为

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}(\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x)$$
$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha).$$

这就是所要的结果.

1.8 证明 (a) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, (b) $\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$.

解: (a) 由定义

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

可得
$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2-\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})-\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})=1;$$

(b) 在(a)的结果的两边除以 $\cosh^2 x$ 就有

$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x}-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x},$$

即
$$1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x.$$

这是因为 $\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x$, $\dfrac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech} x$, 由此即得

$$\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1.$$

1.9 证明 $\cosh^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

解: 由定义, 若 $y=\cosh^{-1}x$, 则 $x=\cosh y=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})$. 于是

$$e^y+e^{-y}=2x \quad 或 \quad e^{2y}-2xe^y+1=0.$$

解这个关于 e^y 的二次方程,我们得

$$e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2-1},$$

或
$$y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}).$$

因为

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=-\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

这就得到所要的结果. 注意若要使 y 是实数,就必须要求 $x\geqslant 1$.

3. 极限和连续

1.10 若 (a) $f(x)=x^2$, (b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 0, & x=2,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

解: (a) 我们必须证明对任意给定的 $\varepsilon>0$, 能够找到 $\delta>0$ (一般与 ε 有关), 使当 $0<|x-2|<\delta$ 时 $|x^2-4|<\varepsilon$.

选 $\delta\leqslant 1$, 所以 $0<|x-2|<1$. 故

$$|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2|\cdot|x+2|=|x-2|\cdot|x-2+4|$$
$$\leqslant|x-2|\cdot(|x-2|+4)<5\delta.$$

这里我们使用了熟知的不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

取 1 与 $\frac{\varepsilon}{5}$ 中较小的作为 δ，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时必有 $|x^2-4|<\varepsilon$. 这就证明了所要的结果；

(b) 这种情形的证明与(a)的证明没有什么差别，因为证明时都是一样把 $x=2$ 排除在外的.

1.11 证明若 $\lim_{x\to a}f_1(x)=l_1$ 和 $\lim_{x\to a}f_2(x)=l_2$，则 $\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=l_1+l_2$.

解：我们必须证明对任何的 $\varepsilon>0$，能够找到 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|[f_1(x)+f_2(x)]-(l_1+l_2)|<\varepsilon.$$

我们有

$$\begin{aligned}|[f_1(x)+f_2(x)]-(l_1+l_2)|&=|[f_1(x)-l_1]+[f_2(x)-l_2]|\\&\leqslant|f_1(x)-l_1|+|f_2(x)-l_2|.\end{aligned}\tag{1}$$

由假设可知，对给定的 $\varepsilon>0$，我们能够找到 $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$，使当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时

$$|f_1(x)-l_1|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{2}$$

当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时

$$|f_2(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3}$$

从(1)、(2)和(3)知，若把 δ_1 和 δ_2 中的较小者取作 δ，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|[f_1(x)+f_2(x)]-(l_1+l_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

用类似的方式我们也能证明其他的极限定理，诸如

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)-f_2(x)]=l_1-l_2,\quad \lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=l_1l_2\quad 和\quad \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}$$

(若 $l_2\neq0$). 见问题 1.75.

1.12 证明 (a) $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 处连续，而(b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq2,\\0, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处间断.

解：(a) **方法 1**

由问题 1.10(a) 知，$\lim_{x\to2}f(x)=4$，而 $f(2)=4$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

方法 2

我们要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，都能找到 $\delta>0$ (一般与 ε 有关)，使当 $|x-2|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(2)|=|x^2-4|<\varepsilon.$$

这可仿照问题 1.10 那样证明；

(b) 因为 $f(2)=0$，我们有 $\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$. 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续(或间断). 我们也可用 $\varepsilon-\delta$ 的方法来证明这一结论. 即对某些 $\varepsilon>0$，我们不可能找到这种 $\delta>0$，使当 $|x-2|<\delta$ 时，成立

$$|f(x)-f(2)|<\varepsilon.$$

4. 导数

1.13 若 u 和 v 是 x 的可微函数，证明