高等学校试用教材

实变函数论与泛函分析

下册

夏道行　吴卓人
严绍宗　舒五昌　编著

人民教育出版社

高等学校试用教材

实变函数论与泛函分析

下册

夏道行　吴卓人
严绍宗　舒五昌　编著

人民教育出版社

1979．6．北京

内 容 提 要

本书是夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌等同志编写的《实变函数论与泛函分析》一书的下册(泛函分析部分),共四章。第四章主要介绍度量空间、拓扑空间的基本概念。第五章介绍线性赋范空间中线性泛函和线性算子,全连续算子的谱分解以及近年来关于不变子空间理论的一些新成果。第六章介绍希尔伯特空间中的投影定理,直交展开,算子谱分解等。第七章介绍近三十年内发展起来的广义函数。本书可供综合大学数学专业,计算数学专业学生和研究生作同名课程的教材或教学参考书。

高等学校试用教材

实变函数论与

泛函分析

下 册

夏道行 吴卓人 严绍宗 舒五昌 编著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 13.875 字数 335,000

1979年6月第1版 1980年3月第1次印刷

印数 00,001—50,000

书号 13012·0366 定价 1.00 元

目　　录

下　　册

第四章　度 量 空 间

从这一章开始我们将要介绍泛函分析。泛函分析是现代数学中的一个较新的重要分支。它起源于经典数学物理中的一些变分问题，边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题和成果，又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学的有力刺激。它综合地运用分析的、代数的和几何的观点和方法，研究分析数学、现代物理和现代工程技术提出的许多问题。从本世纪中叶开始，偏微分方程理论，概率论（特别是随机过程理论）以及一部分计算数学，由于运用了泛函分析而得到大发展。现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程，概率论，计算数学，量子场论，统计物理学，抽象调和分析，现代控制理论，大范围微分几何学等方面。现在泛函分析对纯粹及应用数学中的影响，好象本世纪初叶集论、点集论对后来数学的影响那样。同时泛函分析本身也不断地深入发展。例如算子谱理论以及各种表示理论已经达到相当深入的程度。

泛函分析大体分为线性泛函分析和非线性泛函分析两大部分，线性泛函分析比起非线性泛函分析来说要成熟得多也更基本一些。这是自然的。一般来说，因为对于数学和数学物理中许多问题人们大抵都是先做一次近似把它“线性化”；而线性问题总是比非线性问题容易研究得多，因而迄今所获得的成果也就要丰富得多。本书中除个别地方外几乎全部讨论线性泛函分析。

线性泛函分析主要是讨论有关线性算子——线性泛函是它的特殊情况——以及更加复杂的算子空间、算子代数的一些问题，如

谱理论和表示理论等。线性算子是线性空间到线性空间的一种线性映照(见第五章)。正如同研究函数时必需研究直线上的点集一样，为了研究算子，我们必需首先讨论算子的定义域——无限维空间的结构，特别是描述有关极限(拓扑)概念的一些理论。本章中着重讲述度量空间，它是用距离来描述极限过程的。这对于大多数情况下已经够用了。对于更一般的拓扑空间以及泛函分析中近一些年来日渐用得较多的更加专门的局部凸线性拓扑空间理论，只能极其简略地介绍一点有关的基本概念。

§1 度量空间的基本概念

1. 引言 极限是数学分析中基本概念之一。实数列的收敛，函数列的均匀收敛，在平面区域中复变函数列的内闭均匀收敛等等各种极限概念，都可以统一在下面要介绍的度量空间内按距离收敛的概念之中。这样的处理，使我们有可能更容易认识那些初看起来似乎毫无关系的极限过程的本质联系。有些概念，如在第一章中所讨论过的直线上点列的收敛性、开集、闭集、稠密和疏朗等，在一般的度量空间里也可以引进这些概念。当我们在度量空间里引进了相应的概念，并建立了相应的理论，就可以进一步对每个具体空间引出相应的结论。还有一些概念，是在这一章中新引进的，如范数、完备性、致密性等。有一些空间，如连续函数空间 $C[a,b]$，可积函数空间 $L(E)$ 等，都是很重要的，它们与有限维欧几里得空间有本质的区别。分析数学方面各个学科都是以某种函数空间为对象而研究在这种空间上的某种数学运算的。

现在先介绍空间中两点间距离的概念。n 维欧几里得空间中两点间距离的概念可能已为大家所熟悉，为了下面叙述的方便，有必要简单回顾一下。

设平面 E^2 中两点 $x=(x_1,x_2)$ 和 $y=(y_1,y_2)$ 间的距离是

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

那末，距离 $\rho(x,y)$ 具有如下的性质：

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$，而且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(ii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$。

其中(ii)就是三角不等式。

我们知道，平面上的点列 $\{x^{(n)}\}$ 趋向于极限点 x 的充要条件是

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\quad(n\to\infty)$$

对连续函数族常用的极限概念之一是均匀收敛（即一致收敛）。设 $C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数全体，对于 $x,y\in C[a,b]$，记

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \tag{1.1}$$

这里的 $\rho(x,y)$ 也有上面所指出的两个性质。如果 $x_n(t)$，$n=1,2,\cdots$，$x(t)\in C[a,b]$，那末 $\{x_n(t)\}$ 均匀收敛于 $x(t)$ 的充要条件显然是

$$\rho(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty)$$

我们称由 (1.1) 所定义的 $\rho(x,y)$ 为函数空间 $C[a,b]$ 中两"点" x, y 间的距离，它表示平面曲线 $\xi=x(t)$ 和 $\xi=y(t)$ 上横坐标相同的两点之间的最大距离（见图 4.1）。

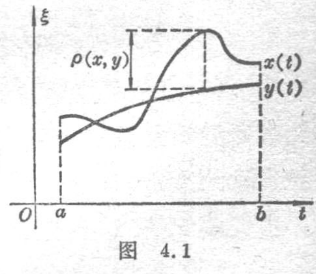

图 4.1

再举一个例子。设 $L(E,\boldsymbol{B},\mu)$ 是测度空间 $(E,\boldsymbol{B},\mu)$ 上的可积函数全体。对于 $x,y\in L(E,\boldsymbol{B},\mu)$，定义

$$\rho(x,y)=\int_E|x(t)-y(t)|d\mu \tag{1.2}$$

容易验证，它也满足前面说的两个性质。对于 x_n，$n=1,2,\cdots$，

$x \in L(E, \mathbf{B}, \mu)$，当

$$\rho(x_n, x) = \int_E |x_n(t) - x(t)| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

时，我们称$\{x_n(t)\}$（在E上按μ的积分）平均收敛于$x(t)$。

上面各种情况，ρ的意义是不相同的，但它们有共同的特点。如果把函数族$C[a, b]$，$L(E, \mathbf{B}, \mu)$看成抽象的空间，把其中的函数看成是空间的点，那末$\rho(x, y)$便可以看成是两点之间的距离。从上面看到，不少极限过程能够用距离来描述，而且当我们描述与极限相关联的概念时，实质上也仅仅利用距离和它的基本性质。因此，为了深入研究各种极限过程，把在上述这些具体空间中所定义的距离函数ρ抽象化，推而广之，对一般的集引进点与点之间的距离，这就产生了距离空间或度量空间（因为距离又是一种度量）的概念。

2. 距离的定义 设R是一个非空的集。假如对于R中任意一对元素x, y，都给定一个实数$\rho(x, y)$与它们对应，而且适合如下的条件：

1° $\rho(x, y) \geqslant 0$ 又 $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$；

2° 成立三角不等式：

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad (z \in R) \tag{1.3}$$

那末称$\rho(x, y)$是两点x，y之间的**距离**，又称R按照距离$\rho(x, y)$成为**度量空间**或**距离空间**，记为(R, ρ)，或者简单地记作R。R中的元素称为**点**。

由性质1°与2°可以推出，距离还有对称性：对R中任意的x, y，成立着

3° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$。

事实上，在2°中取$z = x$，就有$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x) + \rho(y, x)$，由1°知道$\rho(x, x) = 0$，所以得到

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(y, x)$$

由于 x, y 是任意的，在上面不等式中，互换 x, y 后，我们又得到

$$\rho(y, x) \leqslant \rho(x, y)$$

两式结合起来就得到 3°。

度量空间 R 的任何一个非空子集 M，就以空间 R 中的距离 ρ 作为 M 中的距离，显然也是度量空间，称 M 为 R 的子空间。

对于任何非空集 R，可以如下引进距离：当 $x \in R$ 时，定义 $\rho(x, x)=0$，当 $x, y \in R$，而且 $x \neq y$ 时，就定义 $\rho(x, y)=1$，可以验证，这样定义的 ρ 确实满足距离的两个条件，于是 R 关于 $\rho=\rho(x,y)$ 成为度量空间。一个度量空间中，如果任何两个不同的点之间的距离始终大于一个正的常数，那末就称这个度量空间是**离散**的。这也说明任一非空集都可以在其中适当地引进距离使之成为离散的度量空间。

如果在一个空间中同时定义了两个距离函数 $\rho(x, y)$ 及 $\rho_1(x, y)$，而且 $\rho(x, y) \neq \rho_1(x, y)$，那末 R 按 $\rho(x, y)$ 所成的度量空间 (R, ρ) 同 R 按 ρ_1 所成的度量空间 (R, ρ_1) 应该看成不同的度量空间。一般地说，如果 R 中不止一点，那末在 R 中可以引进许多距离，成为不同的度量空间。

定义 设 (R, ρ) 及 (R_1, ρ_1) 是两个度量空间，φ 是 R 到 R_1 的一一对应。如果对每个 $x, y \in R$，成立着

$$\rho(x, y)=\rho_1(\varphi x, \varphi y)$$

那末称 φ 是 (R, ρ) 到 (R_1, ρ_1) 上的**等距映照**，而称这两个空间是**等距同构**的。

在泛函分析的一些问题中有时发现，两个度量空间，从形式上看，两个集中的元素可以完全不同，但是从度量空间结构看它们又是等距同构的。特别是当其中一个空间比较“抽象”一些，另一个空间比较“具体”一些时，就把这两个等距同构的空间一致化，把

其中一个"抽象"空间中的元素 x 与经过等距映照 φ 后得到的较具体空间中的元素 φx 同一化，这样就可以把抽象的空间用具体的空间来表示。这在进行论证时在技巧上往往有较大的好处，因为可以利用较具体的空间中的某些已经讨论过的性质来研究抽象空间中的一些问题。

3. 极限的概念

定义 设 R 是一个度量空间，$x_n(n=1, 2, \cdots)$、$x\in R$，假如当 $n\to\infty$ 时数列 $\rho(x_n, x)\to 0$，就说点列 $\{x_n\}$ **按照距离** $\rho(x, y)$ **收敛于** x，记做

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或 $x_n\to x(n\to\infty)$。这时称 $\{x_n\}$ 为**收敛点列**，x 称为 $\{x_n\}$ 的**极限**。

定理 1 在度量空间中，任何一个点列 $\{x_n\}$ 最多只有一个极限，即收敛点列的极限是唯一的。

证 设 x、y 都是 $\{x_n\}$ 的极限，由条件 $1°$、$2°$ 和 $3°$，有

$$0\leqslant\rho(x, y)\leqslant\rho(x_n, x)+\rho(x_n, y)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n, x)\to 0$，$\rho(x_n, y)\to 0$，必然 $\rho(x, y)=0$，因此 $x=y$。

定理 2 如果 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，那末 $\rho(x_n, y_n)\to\rho(x_0, y_0)$。这就是说，距离 $\rho(x, y)$ 是两个变元 x, y 的连续函数。

证 由(1.3)可以得到

$$\rho(x_n, y_n)\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(x_0, y_0)+\rho(y_n, y_0)$$

类似地有

$$\rho(x_0, y_0)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, y_0)$$

由这两个不等式得到

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_0, y_0)|\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(y_n, y_0)$$

令 $n\to\infty$，就得到所要证明的结论。

定义 设R为度量空间，x_0是R中的点。对于有限的正数r，我们把集$\{x|x\in R,\ \rho(x,x_0)<r\}$称做**一个开球**，它的**中心**是$x_0$，**半径**是$r$，把它记做$O(x_0,r)$。也把球$O(x_0,r)$叫做$x_0$的$r$-**环境**。

当R是实数直线，或n维欧几里得空间时，开球是大家熟悉的，但在一般的度量空间中，开球可能只含一点。例如前面提到的离散的度量空间，对于不同的两点x,y，$\rho(x,y)=1$，于是对于任何正数$r<1$，每一点x_0的r-环境$O(x_0,r)$中只能含有一点。

定义 设M是度量空间R中的点集，如果M包含在某个开球$O(x_0,r)$中，则称M是R中的**有界集**。

我们知道收敛数列是有界的。更一般地，可以证明

定理3 设$\{x_n\}$为度量空间R中收敛点列，那末$\{x_n\}$是有界的。

证 设$x_n\to x_0$，那末由收敛的定义，有自然数N，使得当$n\geqslant N$时，$\rho(x_n,x_0)\leqslant 1$，取$r=\max(1,\rho(x_0,x_1),\cdots,\rho(x_0,x_{N-1}))+1$，那末$\{x_n\}$包含在球$O(x_0,r)$中。证毕。

4. 例 在第一段中，我们已经知道了几个度量空间，如平面E^2，$C[a,b]$，$L(E,\mathbf{B},\mu)$。如果没有特别的说明，它们的距离都是指在这些例中所分别规定的。

例1 在n维欧几里得空间E^n(或者记做E_n)中，对于

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

规定距离

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-y_\nu)^2}$$

这个$\rho(x,y)$称为欧几里得距离。

我们来验证这里的$\rho(x,y)$确实适合距离的两个条件。第一个条件是容易验证的。现在验证2°。

由 Cauchy 不等式①

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

取 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $a_i=z_i-x_i$, $b_i=y_i-z_i$, 那末

$$y_i-x_i=a_i+b_i$$

代入上面的不等式,就得到三角不等式 2°。

在 E^n 中,按距离收敛就是按(每个)坐标收敛。

例 2 设 E^1 是实数全体, 在 E^1 上另外规定一种距离 ρ_1 如下: 当 $x, y\in E^1$时

$$\rho_1(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

显然 ρ_1 满足距离的条件 1°, 为了证明 ρ_1 满足三角不等式, 我们只要证明, 对于任意的复数 a, b, 成立着不等式:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \tag{1.4}$$

---

① Cauchy 不等式可由下面的恒等式推出

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

这个恒等式是不难用数学归纳法证明的。

事实上，由于在实数区间 $x\geqslant 0$，即$[0,\infty)$上的函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$$

是单调增加函数，由不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\end{aligned}$$

所以(1.4)成立。这样 E^1 按照距离 ρ_1 所定义的度量空间与例1中的 E^1 不同，但是可以证明它们所引出的极限概念一致，就是说当 $\{x_n\}\subset E^1$, $x_0\in E^1$ 时，$\rho_1(x_n,x_0)\to 0$ 和 $|x_n-x_0|\to 0$ 是等价的。(但是我们后面提到 E^1 中的距离时是指 $\rho(x,y)=|x-y|$，而不是这里的 ρ_1。)

例3 (空间 $C^{(k)}[a,b]$) 设 k 是一个非负整数，$x(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数，而且具有连续的 k 阶导函数(当 $k=0$ 时就表示只要求 $x(t)$本身连续)，这种函数 $x(t)$ 的全体记为 $C^{(k)}[a,b]$，特别简记 $C^0[a,b]$为 $C[a,b]$。对于 $x(t),y(t)\in C^{(k)}[a,b]$，令

$$\rho_k(x,y)=\max_{0\leqslant j\leqslant k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|$$

容易证明 $\rho_k(x,y)$ 是距离。在 $C^{(k)}[a,b]$中函数列$\{x_n(t)\}$依距离收敛于 $x(t)$的充要条件是在$[a,b]$上，$\{x_n(t)\}$ 以及它们的前 k 阶导函数列都分别均匀收敛于 $x(t)$及其前 k 阶导函数。

例4 设 s 为实数列$\{x_\nu\}$ 的全体 (或复数列全体) 所成的空间，称 x_ν 为点 $x=\{x_\nu\}$的第 ν 个坐标。在 s 中定义距离如下：对于 $x=\{x_\nu\}$, $y=\{y_\nu\}$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

现在来验证如此定义的 $\rho(x, y)$ 是一个距离函数。事实上，可以仿照例 2 的办法来验证三点不等式

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)$$

$$=\rho(x, z)+\rho(y, z)$$

我们来证明在空间 s 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛。这就是说，设点列 $x^{(n)}=\{x_i^{(n)}\}\in s$，$n=1, 2, \cdots$，又 $x\in s$，那末 $\rho(x^{(n)}, x)\to 0\ (n\to\infty)$ 的充分必要条件是：对每个自然数 i

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i$$

事实上，如果

$$\rho(x^{(n)}, x)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

那末，对每一个 i，由于 $\dfrac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\leqslant 2^i\rho(x^{(n)}, x)$，我们得到 $\dfrac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty)$，于是，对于给定的正数 ε——不妨设 $\varepsilon<1$——有自然数 N，使得当 $n>N$ 时成立着

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon$$

从而有

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad i=1, 2, \cdots$$

这说明对每个 $i=1, 2, \cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$x_i^{(n)}\to x_i$。

反过来，设 $x_i^{(n)}\to x_i\ (n\to\infty)$，$i=1, 2, \cdots$。因为对任一正数 ε，存在自然数 m，使得

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

又对每个 $i=1, 2, \cdots, m-1$, 存在着 N_i, 使得当 $n>N_i$ 时

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1, \cdots, N_{m-1}\}$, 那末当 $n>N$ 时

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x^{(n)}, x)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon$$

例 5 设$\mathscr{A}$是单位圆 $|z|<1$ 中解析函数的全体。当 $f(z)$、$g(z)\in\mathscr{A}$ 时，定义

$$\rho(f, g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|}$$

类似于例 3，可以证明 $\rho(f, g)$ 满足条件 1° 及 2°，因而 $\mathscr{A}$ 关于 $\rho(f, g)$成一度量空间。

点列 $\{f_k(z)\}$ 按距离收敛于 $f(z)$ (即 $\rho(f_k, f)\to 0$) 的充要条件是: $\{f_k(z)\}$ 在单位圆 $|z|<1$ 中任一闭区域 Ω 上均匀收敛于 $f(z)$。我们这时称$\{f_k(z)\}$在$|z|<1$中内闭均匀收敛于$f(z)$。事实上，类似于例 3 知道，$\rho(f_k, f)\to 0$ 的充要条件是对每一个 i 成立着

$$\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}|f_k(z)-f(z)|\to 0 \quad (k\to\infty)$$

这等价于 $f_k(z)$内闭均匀收敛于 $f(z)$。

例 6 设 $C^{\infty}[a, b]$是区间内无限次可微分函数的全体，定义

$$\rho(f, g)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\max_{[a,b]}\frac{|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}{1+|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}$$

容易知道 $\rho(f, g)$是 $C^{\infty}[a, b]$中的距离函数。而对于 $C^{\infty}[a, b]$ 中点列$\{x_n\}$按距离收敛于 $x(t)\in C^{\infty}[a, b]$ 的充要条件是对每个非负整数 p, 在$[a, b]$上$\{x_n^{(p)}(t)\}$均匀收敛于 $x^{(p)}(t)$。$(x_n^{(0)}(t)=x_n(t))$。这一点留给读者自己去给出证明。

可测函数列依测度收敛的概念也可以用适当的距离函数来描述。我们有：

例 7 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，E是可测集，$\mu(E)<\infty$，S是E上的实值的(或复值的)可测函数全体。当 $f(t)$，$g(t)$在E上几乎处处相等时，把 f, g 看成S中的同一点，当 $f, g\in S$ 时，规定

$$\rho(f, g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu$$

由于$\dfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$是有界可测函数，$\mu(E)<\infty$，所以$\rho(f, g)$有确定的意义。相仿于例 4 容易证明，这个 $\rho(f, g)$ 确实满足距离的条件。

我们要证明在空间S中，$\rho(f_n, f)\to 0$ 的充要条件是 f_n 依测度μ收敛于f。

事实上，如果 $f_n\xrightarrow[\mu]{}f$，由于$\dfrac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}\leqslant 1$，和$\mu(E)<\infty$，由有界控制收敛定理立即知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f)=0$。

反过来，如果 $\rho(f_n, f)\to 0$，由于当 $\sigma>0$ 时

$$\rho(f_n, f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}d\mu$$
$$\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))$$