高等数学

（文科）

高等学校文科教材

厦门大学数学系编写组 编著

厦门大学出版社

高等学校文科教材

高等数学

（文　　科）

厦门大学数学系编写组　编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(文科)/厦门大学数学系编写组编著.—厦门:厦门大学出版社,2000.2
ISBN 7-5615-1565-0

Ⅰ.高… Ⅱ.厦… Ⅲ.高等数学-文科 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 72785 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
三明地质印刷厂印刷
(地址:三明市富兴路 15 号 邮编:365001)
2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:17.25
字数:441 千字 印数:1—3 000 册
定价:25.00 元

内 容 提 要

本书是根据文科的特点而编写的.旨在向文科大学生介绍高等数学的基础知识和方法,培养学生的抽象思维和逻辑推理能力,提高文科大学生的文化素质,以适应时代和工作的需要.

本书分微积分学、线性代数与概率初步两篇,共八章.内容包括:函数与极限、导数与微分、导数的应用、多元函数微分法及其应用、积分学、行列式、矩阵、概率初步等.本书通过丰富的实例阐述高等数学在经济学科、管理学科及人文科学中的应用,各篇、各章末还附有名家格言、数学发展史简介及著名数学家传略,以提高文科大学生学习数学的兴趣和自觉性.

本书叙述简明扼要、文字通俗易懂,可作为文史哲类、经济类、管理类及社会科学各专业本科、专科高等数学课的教材,也可作为成人教育、高等职业技术教育各专业的教材或教学参考书,还可作为自学教材.

编者的话

数学是一门内容浩瀚、应用广泛的科学. 它与自然科学、工程技术有着密切的联系. 随着生产的发展与社会的进步，数学方法的应用正逐步向社会科学乃至社会的各个领域渗透. 无数事实表明，数学与社会科学的联系日益加深. 发达国家科学界已得出共识：数学的思考方式具有根本的重要性，并指出："数学科学对于经济竞争是必不可少的. 数学是一种关键性的、普遍的、可实行的技术"(引自："数学科学·技术与经济竞争力"，美国数学科学委员会报告)、数学不仅为研究自然科学、社会科学与工程技术提供了有效的计算方法，促进科学技术与经济建设的发展，而且影响着人们的思维方式和逻辑推理能力. 社会各行各业离不开数学，甚至可以说社会正在日益数学化，数学促进了人类社会的文明与进步. 21 世纪将是经济、科技迅猛发展的世纪，随之而来，经济和人才的竞争也将白热化. 这给当代的大学生既带来机遇，也提出挑战. 他们必须具有广博而扎实的知识，才能在激烈的竞争中不被淘汰. 仅凭中学时所学的那一点点数学知识是无法适应新世纪的需要的，身负建设社会主义强国重任的当代大学生应该自觉而认真地接受和参与作为科学基石的高等数学的训练，努力掌握分析问题和解决问题的数学方法. 这样做，对于文科的大学生而言，既有利于他们深入涉足自己所攻读的文科领域，又能在未来的竞争中立于不败之地. 正是基于这种考虑，厦门大学从 1996 年起在文科各专业普遍开设"高等数学"课程，以求提高文科大学生的文化素质，培养 21 世纪的建设人才. 本书就是在这样背景下，为配合文史哲类各专业的高等数学课程而编写的教材.

为了编好本教材，数学系抽调几位长期从事高等数学教学和研究工作的教师组成《高等数学(文科)》编写组，拟定大纲，结合文科特点，进行编写. 初稿完成后，即印成讲义试用，并召开座谈会，反复讨论，提出修改意见. 在师生的共同努力下，经过近两年的酝酿，终于在 21 世纪来临之际为我校广大文科学生奉献这本《高等数学(文科)》.

本书分微积分学、线性代数与概率初步两个部分. 其内容具有以下特点：

1. 根据文史哲类的特点与需要，用通俗的语言简要地介绍高等数学的基础知识、基本定理和方法，便于学生掌握与应用；

2. 用大量的实例介绍高等数学在经济科学、社会科学和人文科学中的应用，以增强学生学习高等数学的自觉性和积极性；

3. 本书还选编名家格言，介绍有关数学发展史以及几位著名数学家的传略，以激发学生学习数学的热情与兴趣，并期望学生能从数学家的事迹中得到启发，找到人生奋斗的指南.

教材中有些内容加了 * 号，是否讲授，任课教师可根据教学的需要和学时安

排酌定.

在编写过程中，林应标副教授与许清泉副教授负责全书的修改、统稿和定稿等工作.其他同志分工撰写有关内容.各章执笔者为：

第一、五章　邱曙熙副教授，

第二、三、四、六、七章　林应标副教授，

第八章　肖必泉副教授.

原厦门大学副校长辜联崑教授仔细审阅了全书，提出了许多宝贵的指导意见，给本书增色不少.本书还得到厦门大学教务处的大力支持，慨然拨款印刷试用讲义和出版正式教材.在本书组织、编写、修改与出版的过程中，得到了厦大数学系主任梁益兴教授、副主任董槐林副教授等数学系党政领导的关心、支持与帮助.在出版过程中，得到了厦大出版社吴天祥副编审以及厦大法学院孙晓静同志的鼎力支持.在这里，谨向关心和支持本书编写和出版的同志表示最衷心的感谢.

由于我们理论水平和实践经验有限，教学经验不足，书中疏漏、不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正.

厦门大学数学系《高等数学(文科)》编写组

1999年12月于厦门大学

目　　录

第一篇　微积分学

第二篇　线性代数与概率初步

第一篇　微积分学

第一章　函数与极限

§1.1　集合

一、集合

1. 集合及其表示法

“集合”是现代数学最基本概念之一. 其定义是康托尔①在19世纪70年代给出的. 他“把我们的感觉或思维所确定的不同对象汇合成一个总体,称为一个集合”. 因此,所谓**集合**就是具有某种特定性质的事物的全体. 构成集合的每一个事物称为该集合的**元素**. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等等表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等等表示集合中的元素. 若 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则说 a 不属于 A，记为 $a\,\overline{\in}\,A$ 或 $a\notin A$.

注意　$\in$ 和 $\overline{\in}$ 是彼此相否定的,也就是说,任何事物,或者属于这个集合,或者不属于这个集合,二者必居其一且仅居于其中之一.

集合通常有两种表示法:**列举法**和**描述法**.

把集合的所有元素开列在一个花括号{ }内,这种表示法称为**列举法**. 例如,由2,4,6,8,10所组成的集合,可以表为 $A=\{2,4,6,8,10\}$. 又如自然数集 $\mathbf{N}$ 可表为 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

把集合中元素 a 所具有的性质 $p(a)$ 写在元素 a 的后面,中间用一条竖线隔开,并用花括号{ }括起来,这种表示法称为**描述法**. 一般记为

$$A=\{a\,|\,p(a)\}.$$

例如,将方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的集合 A 表为 $A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$. 又如,全体奇数所构成的集合可表为 $B=\{x\,|\,x=2n+1,n\text{ 为整数}\}$.

含有有限多个元素的集合,称为**有限集合**;含有无限多个元素的集合,称为**无限集合**;不含任何元素的集合,称为**空集**,记为 $\varnothing$. 例如,由方程 $x^2+10=0$ 的实数解构成的集合就是空集. 显然,单元素集 $\{0\}$ 不是空集.

2. 映射

设 X,Y 是两个非空集合,如果对每个 $x\in X$,根据某个关系 f,在 Y 中都有唯一一个元素

---

① 康托尔(Cantor, G. F. L.)，1845.3—1918.1,法国数学家、集合论的创始人.

y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 中的**映射**或**映照**. x 和 y 分别为 f 的**像源**和**像**，像的集可记为 $f(X)\subseteq Y$，而映射则记为

$$f: X\to Y, \qquad x\mapsto y \text{ 或 } y=f(x).$$

当 Y 是数集时，映射 f 又称为函数.

如果 $f(X)=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的映照或映射(简称满映射).

根据定义，映射 f 的每个像源只有一个像(**单值性**)，但是，一个像未必只有一个原像. 如果每个像也都只有一个原像，那么说映射 f 是**可逆的**. 如果把像源和像倒过来叫，便得到一个将 Y 到 X 的映射，称之为 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}，即得 $x=f^{-1}(y)$，或

$$f^{-1}: Y\to X, y\mapsto x.$$

可逆的满映射 $f:X\to Y$ 称为是**一对一**的，也说 X 和 Y 是**一一对应**的.

3. **集合间的关系与运算**

子集 设 A 和 B 都是集合，如果 B 的每个元素都是 A 的元素，那么说 B 是 A 的**子集**，记为 $B\subseteq A$(读作"B 包含于 A")或 $A\supseteq B$(读作"A 包含 B"). 如果 $B\subseteq A$，且 $A\supseteq B$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 若 $B\subseteq A$，而 A 中又有元素不属于 B，则称 B 是 A 的**真子集**，记为 $B\subset A$. 规定空集是任何集合的子集.

并集 设 A,B 是两个集合，那么称 $\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 是 A 与 B 的**并集**，即由 A 与 B 的所有元素组成的集合，记为 $A\cup B$.

例 1 $\{a,b,c\}\cup\{b,d,e\}=\{a,b,c,d,e\}$.

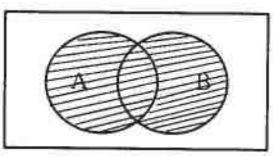
交集 设 A 和 B 是两个集合，那么称 $\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，即由 A 与 B 的公共元素所组成的集合，记为 $A\cap B$.

例 2 $\{a,b,c\}\cap\{b,d,e\}=\{b\}$.

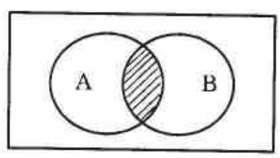
差集 设 A 和 B 都是集合，则把属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A\backslash B$. 若把所研究事物的全体称为**全集**，记为 I. 当 A 为全集 I 时，称差集 $I\backslash B$ 为 B 关于 I 的**余集**，记为 $\overline{B}$. 显然地有

(1) $\overline{I}=\varnothing,\overline{\varnothing}=I$； (2) $B\cup\overline{B}=I, B\cap\overline{B}=\varnothing$； (3) $(\overline{\overline{B}})=B$.

集合的代数运算可用直观的维恩图(图 1.1)表示，通常用长方形内的所有点表示全集，而参与运算的子集则用该长方形内的圆盘来表示.



A∪B



A∩B

图 1.1

图 1.1 是维恩[①]于 1876 年发表的论文中所引入的.

---

① 维恩(Venn, J.)，1834.8—1923.4，英国数学家.

关于集合的运算性质，这里只叙述以下几个结果，但不予证明. 设 B,C,D 是集合，那么有

(1)（**吸引律**） 若 $B\subset C$，则 $B\cup C=C$，$B\cap C=B$；

(2)（**单调律**） 若 $B\subset C$，则 $B\cup D\subset C\cup D$，$B\cap D\subset C\cap D$；

(3)（**交换律**） $B\cup C=C\cup B$，$B\cap C=C\cap B$；

(4)（**组合律**） $(B\cup C)\cup D=B\cup(C\cup D)$，$(B\cap C)\cap D=B\cap(C\cap D)$；

(5)（**分配律**） $B\cup(C\cap D)=(B\cup C)\cap(B\cup D)$，$B\cap(C\cup D)=(B\cap C)\cup(B\cap D)$；

(6)（**对偶原理**）$\overline{(B\cup C)}=\overline{B}\cap\overline{C}$，$\overline{(B\cap C)}=\overline{B}\cup\overline{C}$.

二、实数集

1. **实数** 凡是可以表示成形式$\dfrac{p}{q}$（其中 p,q 为整数，且 $q\neq 0$）的数，称为有理数. 而把不能表为形式$\dfrac{p}{q}$的数，称为无理数. 有理数与无理数统称为实数，全体实数所构成的集合称为实数集. 在本书中，若无特别声明，以后所提到的数都是实数. 为叙述方便起见，今后用 $\mathbf{R}$ 表示**实数集**，用 $\mathbf{Q}$ 表示**有理数集**，用 $\mathbf{Z}$ 表示**整数集**，用 $\mathbf{N}$ 表示**自然数集**.

2. **数轴** 规定了原点、正方向和单位长度的直线，称为**数轴**. 显然，任给一个实数都可以在数轴上找一点与其对应；反之，数轴上的任何一点，也对应着一个实数. 也就是说，实数与数轴上的点是一一对应的. 因此在今后的讨论中，将认为“数 a”与“数轴上对应的点 a”这两种说法具有相同的含义，而不加以区别.

3. **实数的绝对值** 设 x 为一实数，x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

$|x|$的几何意义：$|x|$表示数轴上的点 x 与原点之间的距离. 而$|x-a|$表示点 x 与点 a 之间的距离.

绝对值有以下基本性质：设 $x,y\in\mathbf{R}$，则

(1) $|x|=|-x|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时有$|x|=0$；

(2) $\sqrt{x^2}=|x|$；

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(4) $|xy|=|x|\cdot|y|$；

(5) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$， $y\neq 0$；

(6) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ （三角不等式）；

(7) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(8) 对于 $\varepsilon>0$，不等式$|x|<\varepsilon$ 等价于$-\varepsilon<x<\varepsilon$；

(9) $\varepsilon>0$，不等式$|x-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$；

(10) $\varepsilon>0$，不等式$|x-a|>\varepsilon$ 等价于 $x<a-\varepsilon$ 或 $x>a+\varepsilon$.

三、区间

1. **有限区间** 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则把下列实数集 $\mathbf{R}$ 的子集称为有限区间：

$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

其中 a,b 分别称为以上各区间的左、右端点，数 $(b-a)$ 称为区间的长度．(a,b) 称为开区间，$[a,b]$ 称为闭区间，而 $(a,b]$，$[a,b)$ 都称为半开半闭区间．

除了有限区间外，还有无限区间．

2．**无限区间** 常见的无限区间有以下五种：

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\};$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中“$+\infty$”，“$-\infty$”分别读为“正无穷大”，“负无穷大”．并规定：对于任何实数 a，恒有 $a<+\infty,a>-\infty$．应该注意，“$+\infty$”，“$-\infty$”只是记号，既不能把它们看为实数，也不能对它们进行运算．

下面介绍**邻域**的概念

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，则把

$$\{x|\ |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

称为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，其中 a 称为**邻域** $U(a,\delta)$ 的中心，δ 称为**邻域** $U(a,\delta)$ 的半径．而把集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**去心邻域**，记为 $\hat{U}(a,\delta)$．集合 $\{x|a-\delta<x\leqslant a\}$ 称为点 a 的左邻域，集合 $\{x|a\leqslant x<a+\delta\}$ 称为点 a 的右邻域．

§1.2 初等函数

一、函数的概念

1．变量的对应关系

在生产实践和社会实践中，经常接触到各种取值于数集的量．为了分析问题和解决问题，我们必须讨论这些量之间的关系．通常将那些在所考察的过程中保持不变的量称为**常量**；而将那些在所考察的过程中会起变化的量称为**变量**．

例如，可以将根据某个原则依次排成串的无限个实数：

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots.$$

理解为一个变量 x 从左向右取遍上面每一个数值．这样一来，一组有序的数被看作是一个变量 x 的取值，它使得我们观察问题的方法从“静止的”观点向“运动的”观点转化．

又例如，世界人口数目在某个特定时刻是常量，如果所考察的过程是 1000 年，那么它是个变量，记为 y．如果将时间按年份讨论，比如从公元 901 年到 1900 年，那么年份 t 可看成从 901 到 1900 取整数值的变量，而人口数 y 是与 t 相对应的另一变量．

还有，某高等学校在校的教职工数 y 与年份 t 也可建立如下的对应关系：

表 1.1

年份 t	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
教工数 y	1 446	1 447	1 513	1 560	1 551	1 547	1 108	1 391	1 754	1 773	1 790	1 922	2 037

将变量 t 与变量 y 对应着考虑的想法就是函数的思想.

2. **函数的定义**

虽然在§1.1中已提到函数的概念,但是为系统起见,这里直接给出定义.

函数的定义 设 X 是一个给定的非空数集,如果对每个 $x\in X$,存在唯一的实数 y 与之对应,那么这种对应关系(常记为 f)称为定义在 X 上的一个**函数**,记为

$$f:X\to Y,\ x\mapsto y \quad (\text{或 } y=f(x)).$$

x 称为**自变量**,而 y 称为**因变量**,也称为 x 的**函数**. X 称为函数 f 的**定义域**,而集合

$$f(X)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in X\}$$

称为函数 f 的**值域**.

这里,自变量的概念与映射定义中的**像源**、**逆像**、**原像**等概念相对应,而因变量的概念则与**像**的概念相对应.

例 1 球的体积 V 是球的半径 r 的函数,它用 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 表示,其中 $X=\{r\,|\,0\leqslant r<+\infty\}$ 为 f 的定义域.若不考虑这个函数的具体内容,那么其定义域为 $X=\{r\,|\,-\infty<r<+\infty\}$.

例 2 公元1800年德国数学家高斯在研究圆内整点问题时引进了**取整函数** $[x]$,用于表示不大于实数 x 的最大整数.其严格定义如下:

$$\mu=\{k\,|\,k<x,k\in\mathbf{Z}\}.$$

显然 μ 存在最大整数,若记为 n,则 $n\leqslant x<n+1$.即有

$$[x]=n,\ x=n+r \quad (x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z},0\leqslant r<1).$$

如 $[5.65]=[5+0.65]=5$,$[0.3]=0$,$[-0.4]=[-1+0.6]=-1$,$[-1]=-1$,$[-4.5]=[-5+0.5]=-5$.易知,取整函数的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\mathbf{Z}$.它的图形如图1.2所示.

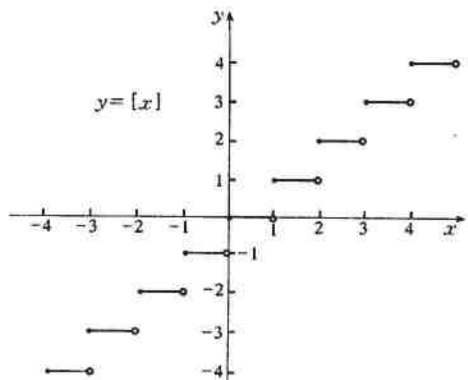


图 1.2

关于函数的定义域,在实际问题中应按照其具体意义来确定.若研究的是纯数学问题,则函数的定义域就是使函数有意义的自变量 x 的所有可能取值的集合,通常也称它为**函数的自然定义域**.今后所给的函数,如果没有表明定义域,我们应认定是以自然定义域为其定义域.为确定所给函数的定义域,我们必需知道常用函数的定义域.例如,分式函数的定义域是使得分母非零的 x 值的全体;函数为偶次方根时,它的定义域是使得被开方式为非负的 x 值的全体;对数函数的定义域是使得真数为正的 x 值的全体;有限个函数经四则运算而得到的函数的定义域是这些函数的定义域的交集,并除去使分母为零的 x.

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须满足以下条件:

$$\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0,\\ \lg(2x-1)\neq 0.\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x^2-2x\leqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1.\end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1.\end{cases}$$

故得此函数的定义域为 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$.

例 4　求函数 $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+3}$的定义域.

解　因为使$\frac{1}{4-x^2}$有意义的值是 $4-x^2\neq0$,即 $x\neq\pm2$,

又使$\sqrt{x+3}$有意义的值是 $x+3\geqslant0$，即 $x\geqslant-3$，故此函数的定义域为$[-3,-2]\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

3. 函数的表示法　函数的图像

函数经常采用的表示法有：解析法、图像法、列表法等等. 解析法就是用解析式子表达的方法；图像法是用坐标平面上的点或曲线来表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数的办法；而列表法则是用表格表示函数的对应关系，例如表 1.1 表示某高等学校在校教职工数的函数. 另外，在化学和物理实验中也常采用列表法. 本书基本采用解析法、图像法、列表法，其余的方法这里不进行讨论.

设 $y=f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的函数. 对任意 x，由关系 $y=f(x)$确定一有序实数对(x,y). 在 xoy 直角坐标系中描出(x,y)的对应点，所得的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为函数 $y=f(x)$的**图像**或**图形**.

例 5　水在低温时蒸发比较慢，加热时水的蒸汽压力就迅速增加. 显然，水蒸汽的压力是温度的函数，根据实验可列表表示这一函数关系：

表 1.2

温度(℃)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	75	100
蒸汽压力(mmHg)	4.6	6.5	9.2	12.8	17.5	23.8	31.8	42.2	55.3	71.9	92.5	289.4	760

例 6　下图是水的密度随温度变化的函数图像：

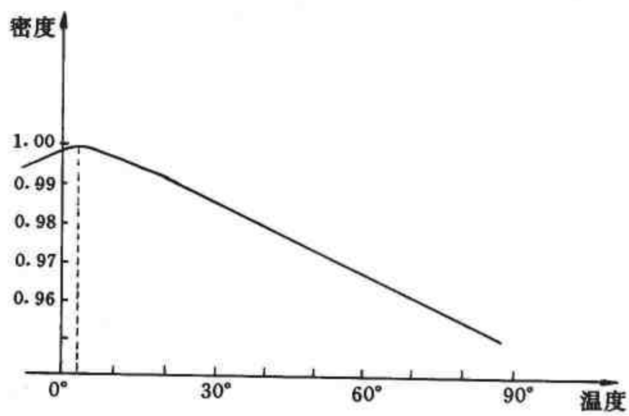


图 1.3

这里我们简单归纳一下常用的解析、列表和图像三种表示法之间的关系. 从科学研究的途径来说，往往是先由试验或搜集的材料列成表，再作出图像，从而根据图像，研究量与量间相依变化的规律，最后探讨出函数对应规律的解析表达式.

4. **经济学中常见的函数**

总成本函数 固定成本和变动成本的和称为总成本. 所谓固定成本是指在一定限度内不随产量变动而变化的费用. 设某产品的产量为 q,固定成本为 c_0 元，而每生产 1 个单位产品变动费用增加 a 元，则其总成本为

$$c=c_0+aq,$$

即　　总成本＝固定成本＋每单位产品的成本×总产量.

价格函数 一般情况下，商品销售量对商品的销售价格会产生影响，这可理解为商品的价格 p 是其销售量 q 的函数,称为价格函数,记为 $p=f(q)$. 假设在销售某种产品时确定了最小销售量 S_0,并给出产品定价 p_0. 如果将每次批发的件数 q^* 称为单位批量,而已知每多批发一次量时该产品销售的单价下跌的幅度相同为 d，那么价格函数为:

$$p=p_0-d\cdot\frac{q-S_0}{q^*},$$

即　　$价格=定价-价格跌幅\times\dfrac{总销售量-最小销售量}{单位批量}.$

需求函数 从另一个角度来观察销售问题,即销售价格对需求量的影响问题. 显然,涨价使需求量减少,降价使需求量增加,所以需求量 q 可看成价格 p 的函数,称为需求函数,记为 $q=\varphi(p)$. 假定某商品的销售价格为 p_0 时销售量为 S_0,如果单价每提高 d 元时,需求量减少 D_J 件,那么需求函数为

$$q=S_0-D_J\cdot\frac{p-p_0}{d},$$

即　$需求量=销售量-需求减数\times\dfrac{价格-定价}{单位提高数}.$

供给函数 与需求类似,供给量 q 也是价格 p 的函数,称为供给函数,记为 $q=\psi(p)$. 假定商品的销售价格为 p_0 时销售量为 S_0，如果单价每提高 d 元时，供给量增加 D_T 件，那么供给函数为

$$q=S_0+D_T\cdot\frac{p-p_0}{d},$$

即　　$供给量=销售量+供给增量\times\dfrac{价格-定价}{单价提高数}.$

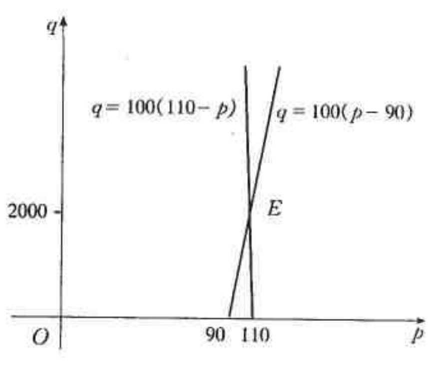


图 1.4

例 7 假定商品是某种儿童玩具，每台定价为 $p_0=100$ 元，而销售量为 $S_0=1\ 000$ 台. 如果单价每提高 $d=2$ 元时，需求量会减少 $D_J=200$ 台，而厂方却可多供应 $D_T=200$ 台，那么

需求 $q_1(p)$和供应 $q_2(p)$都是价格 p 的函数，它们分别为

$$q_1(p)=S_0-D_I\cdot\frac{p-p_0}{d}=1\ 000-200\times\frac{p-100}{2}=100(110-p),$$

$$q_2(p)=S_0+D_T\cdot\frac{p-p_0}{d}=1\ 000+200\times\frac{p-100}{2}=100(p-90).$$

函数 $q_1=10(110-p)$说明价格不会超过 110 元，否则没有销路. 将需求函数和供应函数画在同一坐标系(图 1.4)内，其交点 E 所对应的价格就是供求均衡价格(100 元). 换句话说,E 确定了需求价格与供给价格相等的均衡价格. 市场价格低于均衡价格,则需求大于供给;市场价格高于均衡价格则供给大于需求.

收益函数和利润函数 设某商品的价格为 p,相应的销售量为 q,则把销售量 q 与价格 p 的乘积称为收益，记为 R，即 $R=q\cdot p$. 如果价格 p 是销售量 q 的函数 $p=p(q)$，那么收益 R 也是销售量 q 的函数：

$$R(q)=q\cdot p(q),\quad 即\quad 收益=销售量\times价格.$$

收益 $R(q)$减去成本 $C(q)$就是利润：

$$L(q)=R(q)-C(q),\quad 即\quad 利润=收益-成本.$$

二、具有某些常见特性的函数

为了加强对函数概念及其相关性质全面系统的了解,下面介绍函数的几种常见的几何特性.

单调函数 如果对某个区间 X 上的任意两点 $x_1<x_2$，总成立着 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,那么说函数 $f(x)$在区间 X 上是单调增加或单调上升的;如果对某个区间 X 上的任意两点 $x_1<x_2$,总成立着 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,那么说函数 $f(x)$在区间 X 上是单调减少或单调下降的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数. 若等号都不成立,则说是严格单调的.

奇、偶函数 设函数 $f(x)$的定义域为区间$(-a,a)$ $(a>0)$，如果定义域内的任一 x 都满足关系 $f(-x)=-f(x)$ (对应地，$f(-x)=f(x)$)，那么称函数 $f(x)$是奇函数 (对应地,偶函数).

周期函数 设 ω 是一非零常数. 凡使等式 $f(x+\omega)=f(x)$对 $f(x)$的定义域 X 内的任一 x 都成立的函数 $f(x)$称为周期函数，ω 称为函数 $f(x)$的周期.

有界函数 如果存在正数 M，使得对某个区间 X 内的任意一点 x 总成立着 $|f(x)|\leqslant M$，那么称 $f(x)$在 X 内是有界函数；否则称为无界函数.

$(-\infty,-1]$ ↘
$[-1,1]$ ↑
$[1,+\infty)$ ↘
奇 周期 有界

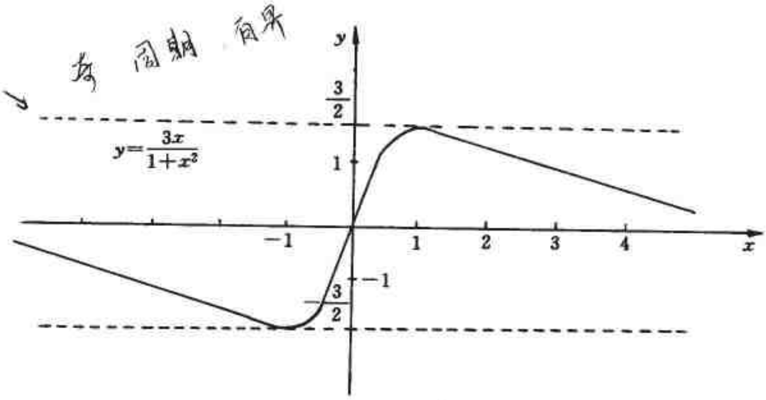


图 1.5

有界性是一较广泛的概念. 一般地说,在研究变量 x 变化过程中,如果有正数 M>0,使得变量 x 在该过程中都满足不等式 $|x|\leqslant M$,那么就称 x 为有界的. 从几何上看,$|x|\leqslant M$ 就是变量 x 的变化范围是有限区间 $[-M,M]$. 对于函数 $y=f(x)$ 而言,函数有界的关系式 $|y|=|f(x)|\leqslant M$ 表示函数的变化范围为 $[-M,M]$. 从图像上看,函数的图像位于直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 所界的带状区域上.

① 当 3x=0时 f(x)=0

例如,函数 $f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$ 是有界的. 这是因为当 $x\neq0$ 时,有 $\dfrac{3}{|f(x)|}=\dfrac{1}{|x|}+|x|\geqslant2$,故得 $|f(x)|\leqslant\dfrac{3}{2}$. 于是函数 $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$ 的图像位于直线 $y=-\dfrac{3}{2}$ 和 $y=\dfrac{3}{2}$ 所界的带状区域上.

另外,大家熟悉的正弦函数 $y=\sin x$ 在 **R** 内是有界的,因为在 **R** 内恒有 $|\sin x|\leqslant1$. 但是,函数 $g(x)=x$ 在 **R** 内不是有界函数,因为对任意正数 M,$|g(M+1)|=M+1>M$,也就是说,$g(x)$ 可以任意大,变化范围不是有限区间.

三、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U, 又设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X, 而值域为 U^*. 如果 $U^*\subset U$, 那么对于 X 的每一个值 x,$u=\varphi(x)$, 对应地得到唯一的一个值 y. 于是 y 成为 x 的函数, 记为

$$f\circ\varphi\colon X\to Y,\ x\mapsto y\quad(\text{或 } y=f[\varphi(x)]).$$

函数 $f\circ\varphi$ 称为 f 与 φ 的**复合函数**,其中 x 为自变量,y 为因变量,u 称为中间变量.

复合函数实际上是把一个函数代入另一个函数得到的,这种把一个函数代入另一个函数的运算称为复合运算.

例 8 设 $f(x)=\ln x$, $\varphi(x)=\sin x$, 求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\ln\varphi(x)=\ln\sin x$,

$\varphi[f(x)]=\sin f(x)=\sin(\ln x)$.

函数的复合还可以推广到两个以上函数的情形.

设 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$.

将 $v=\psi(x)$ 代入 $u=\varphi(v)$ 得 $u=\varphi(\psi(x))$. 再将 u 代入 $y=f(u)$ 中,这样依次代入得复合函数

$$y=f(\varphi(\psi(x))).$$

这里有二个中间变量 u,v.

例 9 设 $y=\cos u$, $u=e^v$,$v=\tan x$, 求 $f[u(v(x))]$.

解 $y=\cos e^v=\cos e^{\tan x}$.

简单函数可以复合成复合函数,与此相对应,复合函数也可以分解成若干个简单函数.

例 10 函数 $y=\cos\sqrt{\ln x}$ 可以分解成以下三个简单函数:

$$y=\cos u,\ u=\sqrt{v},\ v=\ln x.$$

例 11 函数 $y=(2+\sin x^2)^3$ 可以分解成以下四个简单函数:

$$y=u^3,\ u=2+v,\ v=\sin w,\ w=x^2.$$

四、反函数及其存在定理

1. 反函数的概念

与映射的定义一样,函数概念的本质在于**对应关系**,对应关系的关键在于**单值性**,也就是说,对于函数 f 的定义域 X 中的每个自变量 x(即"**像源**"),值域 Y 中有且只有一个因变量 y