

Finite Element Programs Based on
Elastoplastic Mechanics

基于弹塑性力学的 有限元程序

李红周 陈庆华 王米嘉 著



科学出版社

基于弹塑性力学的有限元程序

李红周 陈庆华 王米嘉 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍基于弹塑性力学的有限元程序及其详细注释。全书分为 5 章：第 1 章详细注释二维八节点等参单元有限元程序，通过程序把有限元基本原理应用于求解固体材料的 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程、计算纤维增强复合材料的形变、应力分布和 J 积分；第 2~5 章分别介绍弹塑性力学三维有限元程序、ABAQUS 中方程边界条件的施加技术、ABAQUS 中定义纱线的材料方向子程序、纤维单元的二参数韦伯强度概率分布程序。

本书可供从事材料力学和复合材料力学等领域工作的科研人员及相关专业的研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

基于弹塑性力学的有限元程序/李红周, 陈庆华, 王米嘉著. —北京: 科学出版社, 2019.11

ISBN 978-7-03-062904-3

I. ①基… II. ①李… ②陈… ③王… III. ①弹性力学—有限元法—程序设计②塑性力学—有限元法—程序设计 IV. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 250796 号

责任编辑: 张 震 张 庆 / 责任校对: 彭珍珍

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 无极书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 11 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2020 年 1 月第二次印刷 印张: 11

字数: 220 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

计算机、有限元法和固体力学的交叉融合形成了计算固体力学。该书提供了弹塑性力学有限元程序以及二维八节点等参单元有限元程序的注释，目的在于启发读者掌握有限元法的基本原理和材料弹塑性变形的有限元模拟方法。该书的特点是把材料力学、弹性力学、塑性力学、断裂力学和复合材料力学的基础理论知识变成计算机可执行程序，从而计算固体材料的形变、应力分布和 J 积分等。

该书涉及 Gauss-Legendre 求积、变带宽存储总体刚度矩阵、对称矩阵分块求解、用 Yamada 法确定塑性屈服点以求解材料的 Prandtl-Reuss 弹塑性本构方程、二参数韦伯强度概率分布等计算机编程技术，具有显著的应用成效。

该书是作者们长期研究成果的结晶，是将工程计算力学应用于连续纤维增强聚合物基复合材料领域的尝试，在有限元编程技术方面作出了重要贡献。

中国科学院长春应用化学研究所研究员 安立佳
中国科学院院士

2019年4月

前 言

本书以计算机编程为主线，向读者展示有限元基本原理、方法、编程案例和技巧，使数学、材料力学和弹塑性力学等基础理论实用化和程序化。其内容包括：二维八节点等参单元有限元程序、弹塑性力学三维有限元程序、ABAQUS 中方程边界条件的施加技术、ABAQUS 中定义纱线的材料方向子程序、纤维单元的二参数韦伯强度概率分布程序等。

中国科学院长春应用化学研究所的安立佳研究员和山东大学的贾玉玺教授对本书的第 1 章和第 2 章提供了理论指导，曼彻斯特大学的 Zou Zhenmin 博士、英国诺丁汉大学的李曙光教授和曼彻斯特大学的王永昌教授对本书的第 3 章提供了理论指导，中科院长春应用化学研究所的姜伟研究员对本书的第 5 章提供了指导，中科院长春应用化学研究所的姬相玲研究员和福建师范大学的钱庆荣教授等在文字编写方面给予作者很大的帮助和支持，在此深表谢意。特别感谢国家科技重大专项“极大规模集成电路制造装备及成套工艺”子课题（No. 2012ZX02702006）和国家自然科学基金项目“基于纳米压痕计算预测复合材料用高性能纤维的力学性能和实验验证研究”（No. 51103173）的资助。本书是福建师范大学承担“聚合物资源绿色循环利用教育部工程研究中心”、“福建省污染控制与资源循环利用重点实验室”和“福建省高分子材料重点实验室”平台建设的成果之一。

众所周知，计算固体力学领域新的知识和智慧促进了固体力学理论和编程技术的高速发展，许多问题尚待多个学科的学者共同努力去解决。本书作者水平有限，敬请读者不吝指正，利于再版时改进。

如需要前处理数据文件和主程序数据文件，欢迎随时与我们联系。联系邮箱为 lihongzhou@fjnu.edu.cn。

福建师范大学李红周教授

2019 年 2 月于福州

目 录

序

前言

第 1 章 有限元基本原理和二维程序	1
1.1 有限元法和 J 积分简介	1
1.2 八节点等参单元有限元程序说明	4
1.2.1 初始数据 data 子程序说明	7
1.2.2 边分布载荷 load 子程序说明	10
1.2.3 几何函数 gfun 子程序说明	10
1.2.4 雅可比行列式 jdet 子程序说明	10
1.2.5 几何矩阵 bmat 子程序说明	12
1.2.6 弹塑性矩阵 dpmat 子程序说明	14
1.2.7 刚度矩阵前处理 pre 子程序说明	18
1.2.8 有限元主处理 fem 子程序说明	19
1.2.9 刚度矩阵 gauss 子程序说明	21
1.2.10 应力 stress 子程序说明	21
1.2.11 确定屈服点 yield 子程序说明	21
1.2.12 输出数据 output 子程序说明	23
1.3 二维八节点等参单元有限元程序	23
第 2 章 弹塑性力学三维有限元程序	55
第 3 章 ABAQUS 中方程边界条件的施加技术	142
第 4 章 ABAQUS 中定义纱线的材料方向子程序	161
第 5 章 纤维单元的二参数韦伯强度概率分布程序	166
参考文献	168

第 1 章 有限元基本原理和二维程序

1.1 有限元法和 J 积分简介

有限元法是目前固体力学中应用最为广泛的一种数值计算方法，是利用计算机求解复杂的微分方程或偏微分方程，特别是非线性偏微分方程组。其理论基础是变分原理（钱伟长，1980）：把微分方程转变成相应的泛函变分求极值，即把微分方程变成其等效积分形式或等效积分“弱”形式，用计算机进行求和，计算所得的解就是积分的近似解。具体做法如下：首先对研究的物体进行离散化，即将连续的物体分解成许多小的相同类型的有限元单元或不同类型的混合有限元单元；然后通过本构方程（物理方程）、几何方程（协调方程）和平衡微分方程（或运动微分方程）建立单元刚度矩阵；对所有单元通过其节点的联系性组合成总体刚度矩阵；在引入位移边界条件和/或力边界条件后，使相应的线性方程组能够求解；最后通过计算机求解线性方程组，获得关于连续体的位移场、应变场和应力场等信息。在单元刚度矩阵组合成总体刚度矩阵时，对于连续体来说，其应力-应变场是各点上应力-应变值的总和，直接求解其解析形式的解几乎是不可能的。而离散化则将具有无限个点的连续体上的场的求解问题转化为有限个单元体上的求解问题，因而得名“有限元”方法（王勖成等，1997）。

对每个单元刚度矩阵，满足平衡条件，一般式为

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_{s_6} f_i \delta u_i ds = 0 \quad (1.1)$$

式中， σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别是应力张量和应变张量； f_i 是载荷； u_i 是位移。

上式的矩阵式为

$$\iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \sigma dv - \int_{s_6} \{\delta u\}^T f ds = 0 \quad (1.2)$$

式中， $\varepsilon = Bu$ ，微分形式为 $\{\delta \varepsilon\} = B\{\delta u\}$ ，其转置矩阵形式为 $\{\delta \varepsilon\}^T = \{\delta u\}^T B^T$ ； $\sigma = D\varepsilon = DBu$ ，其中 B 是几何矩阵， D 是材料特性矩阵。

以上可推导出

$$\{\delta u\}^T \left(\iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} u dv - \int_{s_6} \mathbf{f} ds \right) = 0 \quad (1.3)$$

二维问题时，上式简化为

$$\iint_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} u t dA = \int_s \mathbf{f} ds \quad (1.4)$$

式中， A 是面积； t 是厚度； ds 是线积分。

向量的向量积的定义为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (1.5)$$

式中， $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是矢量； θ 是矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角。

图 1.1 中，三角形 DEF 的面积为

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \\ &= \frac{1}{2} \left| [(x_E - x_D)\mathbf{i} + (y_E - y_D)\mathbf{j}] \times [(x_F - x_D)\mathbf{i} + (y_F - y_D)\mathbf{j}] \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| [(x_E - x_D)(y_F - y_D) - (y_E - y_D)(x_F - x_D)] \right| \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中， D, E, F 是三角形的三个顶点； $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 是 x, y 坐标系的单位矢量。 $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$ ， $|\mathbf{j} \times \mathbf{i}| = -1$ ， $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = |\mathbf{j} \times \mathbf{j}| = 0$ 。

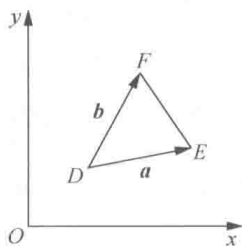


图 1.1 矢量法推导三角形面积

以下推导不同坐标体系之间进行坐标变换时，面积微元之间的关系

$$\begin{aligned} dA &= |\mathbf{da} \times \mathbf{db}| \\ &= \left| \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right) \mathbf{j} \right] \times \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right) \mathbf{j} \right] \right| \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| d\varepsilon d\eta \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{令} \quad |J| = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

式中, J 是雅可比 (Jacob) 矩阵, $|J|$ 或 $\det[J]$ (determinant 的缩写) 是雅可比行列式。因此, 雅可比行列式可作为坐标变换时面积 (体积) 元素的伸缩系数。

把公式 (1.7) 和式 (1.8) 代入公式 (1.4), 得

$$\iint_A B^T DB u t dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB u t |J| d\varepsilon d\eta \quad (1.9)$$

令 $Ku = f$, K 是单元刚度矩阵, 由公式 (1.4) 和上式, 可得

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T DB t |J| d\varepsilon d\eta \quad (1.10)$$

由高斯-勒让德 (Gauss-Legendre) 求积公式, 可知

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (1.11)$$

式中, x_k 是积分点 (也叫高斯点, 是勒让德多项式的零点); w_k 是求积系数。把上式代入 (1.10), 可得

$$K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 B^T DB t |J| w_i w_j \quad (1.12)$$

综上, 位移、载荷和应力等基本未知量应满足:

(1) 几何学方面: ①通过研究位移与应变关系得到变形的协调条件, 即几何方程; ②位移边界条件。

(2) 物理学方面: 弹性时, 建立应变与应力 (或负载时间、温度等) 关系; 塑性时, 建立应力增量和应变增量的关系, 称为本构关系。

(3) 运动学方面: ①建立物体的平衡条件, 不仅物体整体要保持平衡, 而且物体内的任何局部都要处于平衡状态, 即平衡微分方程, 冲击等模拟时为运动微分方程 (加惯性力和加速度时)。②载荷的边界条件。

涉及塑性时, 包括: ①屈服条件 (判断弹性过渡到塑性时的条件, 各向同性屈服条件 $\sigma = \sigma_y$); ②塑性流动法则 (也叫硬化条件)。

涉及损伤和断裂时, 包括: 损伤初始条件, 无损伤时, 损伤变量 $D = D_0$ (损

伤变量的定义：由于损伤而丧失承载能力的面积与初始无损伤时的原面积之比），初应力 $\sigma = \sigma_0$ ；损伤演化方程；断裂临界条件 $D = D_c$ 。

应变能密度因子 s 定义为 $s = rw$ ， r 是裂纹尖端矢径， w 是应变能密度函数。 J 积分为

$$J = \int_{\Gamma} w dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (1.13)$$

式中， Γ 是包围裂纹尖端的积分曲线，积分方向以逆时针为正； T 是张力矢量； u 是位移矢量； s 是路径 r 的距离。平面应力状态下

$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (1.14)$$

Rice J R 证明该积分与选择的路径无关并能描述裂纹尖端的应变状态，这一特点使 J 积分计算可以在离开高应力、应变梯度的裂纹尖端区外的任意回线进行 (Rice, 1968)。

应力强度因子

$$k_{r \rightarrow 0} = u_y \frac{E}{4(1-\mu^2)} \sqrt{2\pi/r} \quad (1.15)$$

式中， E 是弹性模量； μ 是泊松比； u_y 是垂直于裂纹表面的节点位移。

J 积分为

$$J = \int_r w dy - \int_r [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \frac{du_x}{dx} + (\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x) \frac{du_y}{dy}] ds \quad (1.16)$$

式中， n_x 和 n_y 是路径 r 的单位外法向矢量。

1.2 八节点等参单元有限元程序说明

图 1.2 为二维八节点等参单元有限元程序总的框架。

调试程序时注意“1”和“L 的小写字母”的区别， $mm=ma[k]-k+1$ 中为“L 的小写字母”而不是“1”。

stdio.h 是标准输入输出，math.h 是计算函数头文件，string.h 是字符运算头文件，malloc.h 是给指针数组分配内存。

nel 是单元总数预分配值（保证其值 $\geq ne+1$ ），nod 是节点总数预分配值（保证其值 $\geq no+1$ ），area 是总的刚度矩阵数组的大小（预分配值），Nstep 是每隔 N 步输出一次数据。

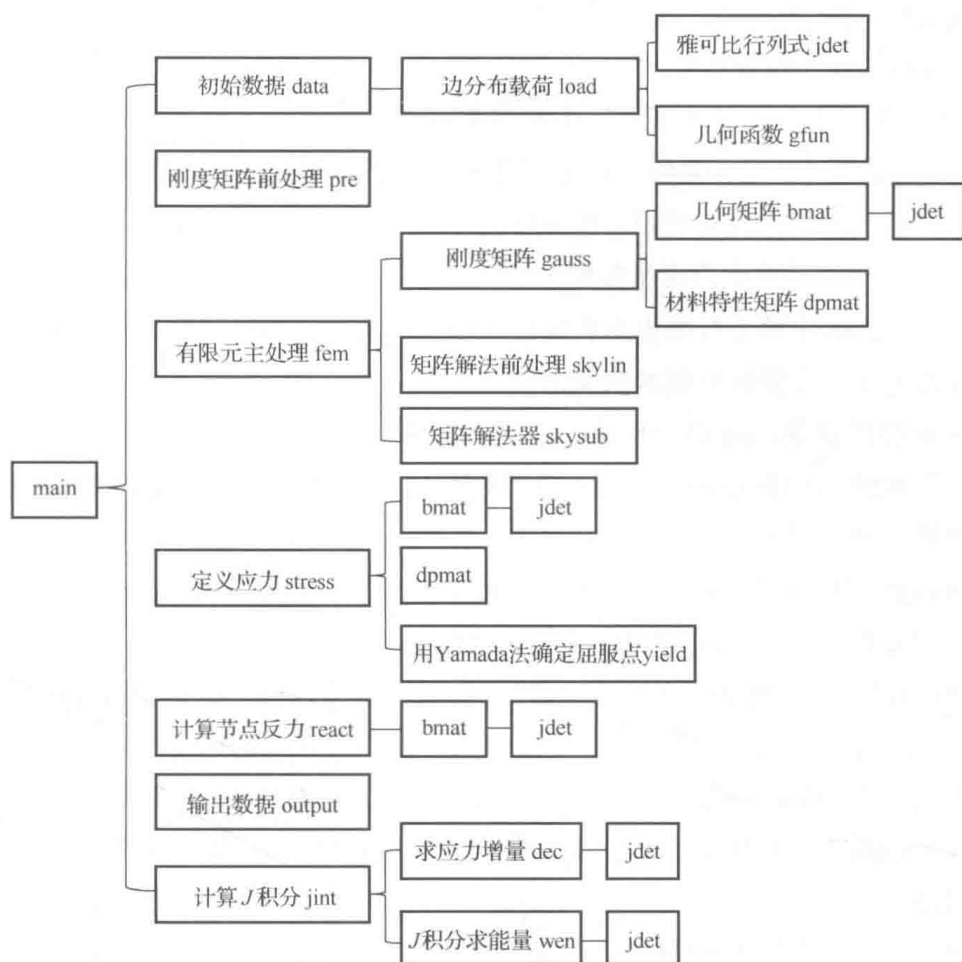


图 1.2 二维八节点等参单元有限元程序框架

变量说明:

nss 是应力应变信息 (平面应力问题 $\sigma_z = 0$ 时, 值为 0, 相当于薄板; 平面应变问题 $\varepsilon_z = 0$ 时, 值为 1, 相当于厚板), ne 是单元总数, no 是节点总数, nct 是计算迭代总的次数, jin 是 J 积分信息 (值为 0 时不计算 J 积分; 值为 1 时计算 J 积分), link[nel][9] 是节点连接信息数组, nres[nod][3] 是节点受约束信息数组 (值为 0 时, 节点不受约束; 值为 1 时, 节点受约束), nely[nel][9] 是节点屈服信息数组, ID[nel] 是纤维单元与非纤维单元区别号 (值为 0 时, 是非纤维单元; 值为 1 时, 是纤维单元)。

neq 是自由度总数, nav 是总带宽和, ma[nod2] 是每个有限单元在总体刚度矩阵里的带宽, mas[nod2] 是到某自由度为止的带宽和, ind[nod2] 与自由度排号有关,

nwk[nod2]是每行起始号，nt[nel][17]是按单元节点组合顺序排列的自由度号和约束号，it[8][3]与 J 积分有关。

n 是计算次数，ie 是单元号，ib 是高斯点代号，np 与 J 积分有关。

x[nod]是节点 x 坐标数组，y[nod]是节点 y 坐标数组，d[nod2]是节点位移数组，r[nod2]是求出的节点反力数组，f[nod2]是节点载荷数组，dd[nod2]是节点位移增量数组，df[nod2]是节点力增量数组，dfz[nod2]是节点力备份数组。程序为位移法，所以子程序 fem 中第三行要用力的备份 $df[i]=dfz[i]$ ，因为 df 值在之前的 load 子程序中被改变了，需要恢复到原始受力状态。

ee 是弹性模量，po 是泊松比，sy 是屈服应力，hr 是塑性模量，cc[3][3][2]是弹性矩阵数组，tin[3][4]是应变系数矩阵数组，wep[nel][9]是高斯点能量数组，ccd 是总增量，cd 是增量。

s[nel][9][5]是高斯点应力数组，h[nel][9][3]是高斯点应变数组，ds[nel][9][3]是应力增量数组，dh[nel][9][3]是应变增量数组。

all[area]是总的刚度矩阵的变带宽存放数组（程序采用一维变带宽数组存储多维总刚度矩阵，因为是变带宽存放，area 值大于 nav，小于 $neq * (neq + 1) / 2$ ），b[nod2]的初始状态是自由度的节点力，值改变之后是位移，dk[nod2]是矩阵分解后的对角矩阵，t[nod2]是临时矩阵，stm[nel][137]是仅存储单元刚度矩阵的上三角元素和对角元素。

tab1 是坐标变换用参数表，是节点编号①至⑧对应的 (ε, η) 坐标（如图 1.3 所示）。

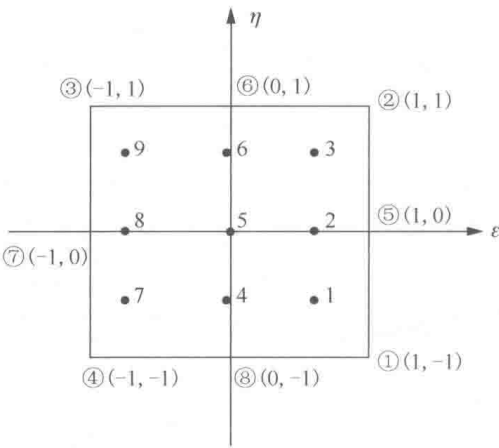


图 1.3 节点①至⑧的编号顺序

tab2 是高斯积分所需的参数表（求积系数和高斯点坐标），参数分别为 $1(w_1w_1, h, -h)$, $2(w_1w_2, h, 0)$, $3(w_1w_3, h, h)$, $4(w_2w_1, 0, -h)$, $5(w_2w_2, 0, 0)$, $6(w_2w_3, 0, h)$, $7(w_3w_1, -h, -h)$, $8(w_3w_2, -h, 0)$, $9(w_3w_3, -h, h)$ ，高斯点如图 1.3 所示。

tab3 是线积分所需的参数表，求积系数为： $w_1 = \frac{5}{9}$ 、 $w_2 = \frac{8}{9}$ 、 $w_3 = \frac{5}{9}$ ，高斯点为： $h_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ 、 $h_2 = 0$ 、 $h_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 。

wt 是求积系数的乘积；gz 是 ε 坐标；et 是 η 坐标。

1.2.1 初始数据 data 子程序说明

边分布载荷时：ij 是单元号，nx 是力的作用边（输入文件中，值为 1 时为左右边，值为 2 时为上下边），mx 是力的作用方向（值为 1 时为 x 方向，值为 2 时为 y 方向），nof 是纤维单元总数，fib[nel] 是纤维单元号数组，a 是力的作用边选定（1.0 表示上边或右边，-1.0 表示下边或左边），b 是分布力大小。

节点集中载荷时：ij 是节点号，i 是力的作用方向（值为 1 时为 x 方向，值为 2 时为 y 方向），a 是载荷大小。

节点位移时：ij 是节点号，i 是位移方向（值为 1 时为 x 方向，值为 2 时为 y 方向），a 是节点位移量；当有节点位移时，节点自然受到约束，令 nres[i][j]=1。

程序输入数据：

1. 读取第一行五个数据（格式为 I9），分别是应力应变信息 nss、单元总数 ne、节点总数 no、计算迭代总次数 nct、J 积分信息 jin。

2. 读取节点号，每行八个（格式为 I9），行数等于单元数。节点编号为逆时针方向，节点编号顺序如图 1.3，是①至⑧。

3. 读取节点的 x 坐标（节点总数个 x 坐标，格式为 E15.6），读取节点的 y 坐标（节点总数个 y 坐标，格式为 E15.6）。

4. 读取边分布载荷信息，分别是单元号（格式为 I9）、1 或 2（格式为 I9）、1 或 2（格式为 I9）、-1.0 或 1.0（格式为 F5.1）、分布力大小（格式为 E15.6）；如果无边分布载荷或读取完数据，则数据为-1。

5. 读取节点集中载荷信息，分别是节点号（格式为 I9）、1 或 2（格式为 I9）、载荷大小（格式为 E15.6）；如果无集中载荷或读取完数据，则数据为-1。

6. 读取节点位移信息，分别是节点号（格式为 I9）、1 或 2（格式为 I9）、节点位移量（格式为 E15.6）；如果无节点位移或读取完数据，则数据为-1。

7. 读取基体的弹性模量 ee 、泊松比 po 、屈服应力 sy ，塑性模量 hr ，四个数据格式都是 F10.3；读取增强纤维的弹性模量 ee 、泊松比 po 、屈服应力 sy ，塑性模量 hr ，四个数据格式都是 F10.3。某型号钢的材料常数：弹性模量 206000MPa，泊松比 0.3，屈服应力 550 MPa，塑性模量 980 MPa。某型号铝的材料常数：弹性模量 70600MPa，泊松比 0.3，屈服应力 304 MPa，塑性模量 1000MPa。

8. 读取纤维单元总数，读取增强纤维的单元号（格式为 I9）。

对各向同性均匀材料，根据实验结果，在小变形的情况下，正应力只与正应变有关，和剪应变没有关系，而剪应力只与剪应变有关，且应力的叠加原理是适用的。三维应力状态下的，由于应力 σ_x 的作用， x 方向应变为 $\frac{\sigma_x}{E}$ ，泊松比为 $\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$ ，因此 y 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_x}{E}$ ， z 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_x}{E}$ ；同理，由于应力 σ_y 的作用， y 方向应变为 $\frac{\sigma_y}{E}$ ， x 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_y}{E}$ ， z 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_y}{E}$ ；同理，由于应力 σ_z 的作用， z 方向应变为 $\frac{\sigma_z}{E}$ ， y 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_z}{E}$ ， x 方向应变为 $-\mu \frac{\sigma_z}{E}$ 。因此，同时有 σ_x 、 σ_y 和 σ_z 作用在 x 方向、 y 方向和 z 方向的应变为广义胡克定律，其形式为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{2G} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} \\
 \sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\
 \Rightarrow \sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[\mu\varepsilon_x + (1-\mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{2G} \\
 \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[\mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + (1-\mu)\varepsilon_z] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

式中， G 是剪切弹性模量， $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 。 E 和 μ 可以通过单轴拉伸实验测得， G 可以通过纯剪切实验直接测得。

材料应力应变关系为: $\sigma = D\varepsilon = DBu$, 平面应力时 $\sigma_z = 0$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) & \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \Rightarrow \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{E}(1+\mu)\tau_{xy} & \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\mu}\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (1.18)$$

对应的 D 矩阵 (即程序中弹性矩阵数组 `cc[3][3][2]`) 为

$$\frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

平面应变时 $\varepsilon_z = 0$, 代入公式 (1.17), 得

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[\mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y] = \frac{E}{(1-2\mu)}[\varepsilon_x + \varepsilon_y] - \sigma_x - \sigma_y$$

对应的 D 矩阵为

$$\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

推导 B 矩阵 (即程序中应变系数矩阵数组 `tin[3][4]`), 如下:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

1.2.2 边分布载荷 load 子程序说明

三个节点所受力载荷等效到八个高斯点上。Galerkin 有限元法是用形函数 g_i 作为权函数来得到偏微分方程的有限元弱式。

$$\int_s \mathbf{g}^T \mathbf{f} ds = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_2 & 0 & \cdots & g_8 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 & g_2 & \cdots & 0 & g_8 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad (1.22)$$

载荷方向为 x 方向时

$$ds = \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \right) \mathbf{j} \quad (1.23)$$

载荷方向为 y 方向时

$$ds = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right) \mathbf{j} \quad (1.24)$$

程序中 $\mathbf{bj}[16][2]$ 为

$$\begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_2 & 0 & \cdots & g_8 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 & g_2 & \cdots & 0 & g_8 \end{bmatrix}^T$$

1.2.3 几何函数 gfun 子程序说明

`void gfun(double *g, double *e, double vj[8])`, 其中, g 对应 ε , e 对应 η , $\mathbf{vj}[8]$ 为 $[g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_8]$ 。插值多项式的系数为形状函数 (也叫几何函数)。节点①至⑧的编号顺序如图 1.3 所示。

当节点为①至④, 即 $i=1,2,3,4$ 时

$$g_i(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon_i \varepsilon) (1 + \eta_i \eta) (\varepsilon_i \varepsilon + \eta_i \eta - 1) \quad (1.25a)$$

当节点为⑤至⑧, 即 $i=5,6,7,8$ 时

$$g_i(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_i \varepsilon) (1 + \eta_i \eta) (1 - \varepsilon_i^2 \eta^2 - \eta_i^2 \varepsilon^2) \quad (1.25b)$$

式中, ε_i 和 η_i 是节点坐标; ε 和 η 为对应高斯点坐标。

1.2.4 雅可比行列式 jdet 子程序说明

`void jdet(double *g, double *e, double bj[2][2], double bi[2][8], double bv[2][2],`

double ab[8][2], double *det), 其中, g 为 tab1- tab3 中参数, e 为 tab1- tab2 中参数, $bj[2][2]$ 是雅可比矩阵, $bi[2][8]$ 是形状函数的导数矩阵, $bv[2][2]$ 是雅可比矩阵的逆矩阵, $ab[8][2]$ 是节点的坐标数组, det 是雅可比行列式。

插值多项式为

$$x(\varepsilon, \eta) = g_1(\varepsilon, \eta)x_1 + g_2(\varepsilon, \eta)x_2 + \cdots + g_8(\varepsilon, \eta)x_8 = \sum_{i=1}^8 g_i(\varepsilon, \eta)x_i \quad (1.26a)$$

同理

$$y(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^8 g_i(\varepsilon, \eta)y_i \quad (1.26b)$$

根据等参性, 即确定单元形状所采用的插值函数与确定单元内位移所采用的插值函数相同, 可得

$$u(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^8 g_i(\varepsilon, \eta)u_i \quad (1.26c)$$

$$v(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^8 g_i(\varepsilon, \eta)v_i \quad (1.26d)$$

公式 (1.26a) 分别对 ε 和 η 求导, 公式 (1.26b) 分别对 ε 和 η 求导, 得

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial g_i(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} x_i \quad (1.27a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial g_i(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} y_i \quad (1.27b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial g_i(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} x_i \quad (1.27c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial g_i(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} y_i \quad (1.27d)$$

由公式 (1.25a), 可知

$$\begin{aligned} g_i(\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta)(\varepsilon_i \varepsilon + \eta_i \eta - 1) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)(\varepsilon_i^2 \varepsilon^2 + \eta_i \eta - 1 + \varepsilon_i \varepsilon \eta_i \eta) \end{aligned} \quad (1.28)$$

上式分别对 ε 和 η 求导, 得

$$\frac{\partial g_i(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)\varepsilon_i(2\varepsilon_i \varepsilon + \eta_i \eta), \quad i=1,2,3,4 \quad (1.29a)$$