

数学的本性

(美) 莫里兹 ◎ 编著
朱剑英 ◎ 编译



01

(珍藏版)

数学科学文化理念传播丛书 (第一辑)



Memorabilia Mathematica



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

数学的本性

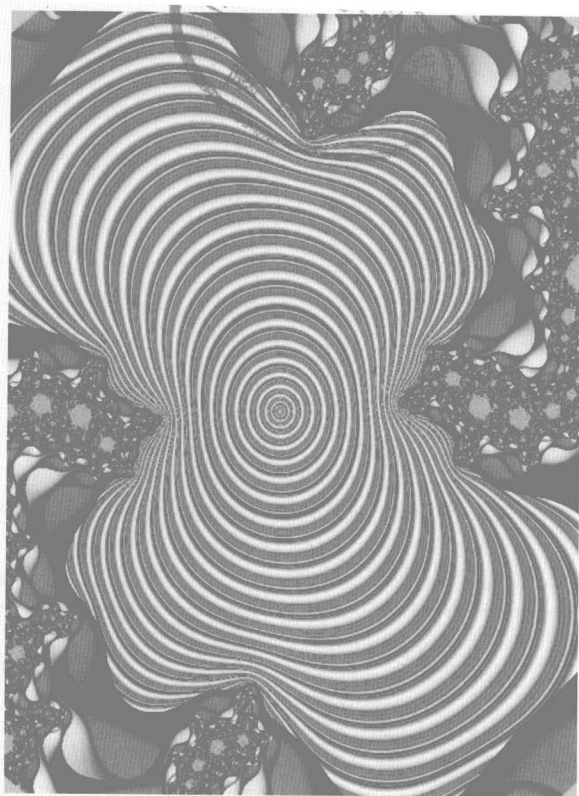
(美) 莫里兹 ◎ 编著
朱剑英 ◎ 编译



01

(珍藏版)

数学科学文化理念传播丛书 (第一辑)



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

数学的本性：珍藏版 / (美) 莫里兹编著；朱剑英
编译. —2 版. —大连：大连理工大学出版社，
2016.1

(数学科学文化理念传播丛书)

ISBN 978-7-5685-0151-4

I. ①数… II. ①莫… ②朱… III. ①数学—研究
IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 233317 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023

发行：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84708943

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连住友彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：188mm×260mm

印张：8.25

字数：115 千字

2008 年 4 月第 1 版

2016 年 1 月第 2 版

2016 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：刘新彦 王 伟

责任校对：田中原

封面设计：冀贵收

ISBN 978-7-5685-0151-4

定价：39.00 元

1380.000



数学科学文化理念传播丛书·第一辑

编写委员会

丛书顾问 周·道本 王梓坤
胡国定 钟万勰 严士健

丛书主编 徐利智

执行主编 朱梧槿

委 员 (按姓氏笔画排序)

王 前	王光明	冯克勤	李文林
杜国平	肖奚安	罗增儒	郑毓信
徐沥泉	涂文豹	萧文强	

总 序



一、数学科学的含义及其在 学科分类中的定位

20 世纪 50 年代初,我曾就读于东北人民大学(现吉林大学)数学系,记得在二年级时,曾有两位老师^①在课堂上不止一次地对大家说:“数学是科学中的女王,而哲学是女王中的女王。”

对于一个初涉高等学府的学子来说,很难认知其言真谛.当时只是朦胧地认为,其言大概是指学习数学这一学科非常值得,也非常重要.或者说与其他学科相比,数学可能是一门更加了不起的学问.到了高年级时,开始慢慢意识到,数学与那些研究特殊的物质运动形态的学科(诸如物理、化学和生物等)相比,似乎真的不在同一个层面上.因为数学的内容和方法不仅要渗透到其他任何一个学科中去,而且要是真的没有了数学,则就无法想象其他任何学科的存在和发展了.后来我终于知道了这样一件事,那就是美国学者道恩斯(Douen-ss)教授,曾从文艺复兴时期到 20 世纪中叶所出版的浩瀚书海中,精选了 16 部名著,并称其为“改变世界的书”.在这 16 部著作中,直接运用了数学工具的著作就有 10 部,其中有 5 部是属于自然科学范畴的,它们是:

- (1) 哥白尼(N. Copernicus)的《天体运行》(1543 年);
- (2) 哈维(William Harvery)的《血液循环》(1628 年);
- (3) 牛顿(I. Newton)的《自然哲学之数学原理》(1729 年);
- (4) 达尔文(E. Darwin)的《物种起源》(1859 年);

^① 此处的“两位老师”指的是著名数学家徐利治先生和著名数学家、计算机科学家王湘浩先生.当年徐利治先生正为我们开设“变分法”和“数学分析方法及例题选讲”,而王湘浩先生正为我们讲授“近世代数”和“高等几何”.

(5) 爱因斯坦(A. Einstein)的《相对论原理》(1916 年)。

另外 5 部是属于社会科学范畴的,它们是:

(6) 潘恩(T. Paine)的《常识》(1760 年);

(7) 史密斯(Adam Smith)的《国富论》(1776 年);

(8) 马尔萨斯(T. R. Malthus)的《人口论》(1789 年);

(9) 马克思(Karl Max)的《资本论》(1867 年);

(10) 马汉(R. Thomas Mahan)的《论制海权》(1867 年);

在道恩斯所精选的 16 部名著中,若论直接或间接地运用数学工具的,则就无一例外了。由此可以毫不夸张地说,数学乃是一切科学的基础、工具和精髓。

至此似已充分说明了如下事实:数学不能与物理、化学、生物、经济或地理等学科在同一层面上并列。特别是近 30 年来,先不说分支繁多的纯粹数学的发展之快,仅就顺应时代潮流而出现的计算数学、应用数学、统计数学、经济数学、生物数学、数学物理、计算物理、地质数学、计算机数学等如雨后春笋般地产生、存在和发展的事实,就已经使人们去重新思考过去那种将数学与物理、化学等学科并列在一个层面上的学科分类法的不妥之处了。这也是多年以来,人们之所以广泛采纳“数学科学”这个名词的现实背景。

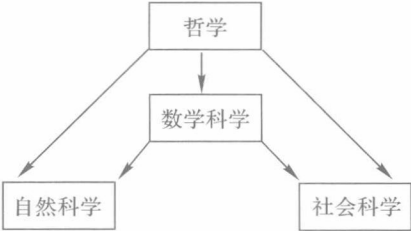
当然,我们还要进一步从数学之本质内涵上去弄明白上文所说之学科分类上所存在的问题,也只有这样才能使我们能在理性层面上对“数学科学”的含义达成共识。

当前,数学被定义为是从量的侧面去探索和研究客观世界的一门学问。对于数学的这样一种定义方式,目前已被学术界广泛接受。至于有如形式主义学派将数学定义为形式系统的科学,更有如形式主义者柯亨(Cohen)视数学为一种纯粹的在纸上的符号游戏,以及数学基础之其他流派所给出之诸如此类的数学定义,可谓均已进入历史博物馆,在当今学术界,充其量只能代表极少数专家学者之个人见解。既然大家公认数学是从量的侧面去探索和研究客观世界,而客观世界中之任何事物或对象又都是质与量的对立统一,因此没有量的侧面的事物或对象是不存在的。如此从数学之定义或数学之本质内涵出发,就必然导致数学与客观世界中的一切事物之存在和发展密

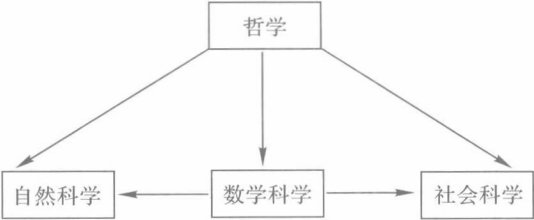
切相关.同时也决定了数学这一研究领域有其独特的普遍性、抽象性和应用上的极端广泛性,从而数学也就在更抽象的层面上与任何特殊的物质运动形式息息相关.由此可见数学与其他任何研究特殊的物质运动形态的学科相比,要高出一个层面.在此或许可以认为,这也就是本人少时所闻之“数学是科学中的女王”一语的某种肤浅的理解.

再说哲学乃是从自然、社会和思维三大领域,亦即从整个客观世界的存在及其存在方式中去探索科学世界之最普遍的规律性的学问,因而哲学是关于整个客观世界的根本性观点的体系,也是自然知识和社会知识的最高概括和总结.因此哲学又要比数学高出一个层面.

这样一来,学科分类之体系结构似应如下图所示:



如上直观示意图的最大优点是凸现了数学在科学中的女王地位,但也有矫枉过正与骤升两个层面之嫌.因此,也可将学科分类体系结构示意图改为下图所示:



如上示意图则在于明确显示了数学科学居中且与自然科学和社会科学相并列的地位,从而否定了过去那种将数学与物理、化学、生物、经济等学科相并列的病态学科分类法.至于数学在科学中之女王地位,就只能从居中角度去隐约认知了.关于学科分类体系结构之如上两个直观示意图,究竟哪一个更合理,在这里就不多议了,因为少

时耳闻之先入为主,往往会使一个人的思维方式发生偏差,因此留给本丛书的广大读者和同行专家们去置评了。

二、数学科学文化理念与 文化素质原则的内涵及价值

数学有两种品格,其一是工具品格,其二是文化品格。对于数学之工具品格而言,在此不必多议。由于数学在应用上的极端广泛性,因而在人类社会发展中,那种挥之不去的短期效益思维模式必然导致数学之工具品格愈来愈突出和愈来愈受到重视。特别是在实用主义观点日益强化的思潮中,更会进一步向数学纯粹工具论的观点倾斜,所以数学之工具品格是不会被人们淡忘的。相反地,数学之另一种更为重要的文化品格,却已面临被人淡忘的境况。至少数学之文化品格在今天已经不为广大教育工作者所重视,更不为广大受教育者所知,几乎到了只有少数数学哲学专家才有所了解的地步。因此我们必须古识重提,并且认真议论一番数学之文化品格问题。

所谓古识重提指的是:古希腊大哲学家柏拉图(Plato)曾经创办了一所哲学学校,并在校门口张榜声明,不懂几何学的人,不要进入他的学校就读。这并不是因为学校所设置的课程需要以几何知识基础才能学习,相反地,柏拉图哲学学校里所设置的课程都是关于社会学、政治学和伦理学一类课程,所探讨的问题也都是关于社会、政治和道德方面的问题。因此,诸如此类的课程与论题并不需要直接以几何知识或几何定理作为其学习或研究的工具。由此可见,柏拉图之所以要求他的弟子先行通晓几何学,绝非着眼于数学之工具品格,而是立足于数学之文化品格。因为柏拉图深知数学之文化理念和文化素质原则的重要意义。他充分认识到立足于数学之文化品格的数学训练,对于陶冶一个人的情操,锻炼一个人的思维能力,直至提升一个人的综合素质水平,都有非凡的功效。所以柏拉图认为,不经过严格数学训练的人是难以深入讨论他所设置的课程和议题的。

前文指出,数学之文化品格已被人们淡忘,那么上述柏拉图立足于数学之文化品格的高智慧故事,是否也被人们彻底淡忘甚或摒弃了呢?这倒并非如此。在当今社会中,仍有高智慧的有识之士,在某

些高等学府的教学计划中,深入贯彻上述柏拉图的高智慧古识,列举两个典型事例如下:

例1,大家知道,从事律师职业的人在英国社会中颇受尊重.据悉,英国律师在大学里要修毕多门高等数学课程,这既不是因为英国的法律条文一定要用微积分去计算,也不是因为英国的法律课程要以高深的数学知识为基础,而只是出于这样一种认识,那就是只有通过严格的数学训练,才能使之具有坚定不移而又客观公正的品格,并使之形成一种严格而精确的思维习惯,从而对他取得事业的成功大有帮助.这就是说,他们充分认识到了数学的学习与训练,绝非实用主义的单纯传授知识,而深知数学之文化理念和文化素质原则,在造就一流人才中的决定性作用.

例2,闻名世界的美国西点军校建校将近两个世纪,培养了大批高级军事指挥员,许多美国名将也毕业于西点军校.在军校的教学计划中,学员们除了要选修一些在实战中能发挥重要作用的数学课程(如运筹学、优化技术和可靠性方法等)之外,规定学员还要必修多门与实战不能直接挂钩的高深的数学课.据我所知,本丛书主编徐利治先生多年前访美时,西点军校研究生院曾两次邀请他去做“数学方法论”方面的讲演.西点军校之所以要学员们必修这些数学课程,当然也是立足于数学之文化品格,也就是说,他们充分认识到,只有经过严格的数学训练,才能使学员们在军事行动中,能把那种特殊的活力与高度的灵活性互相结合起来,才能使学员们具有把握军事行动的能力和适应性,从而为他们驰骋于疆场打下坚实的基础.

然而总体来说,如上述及的学生或学员,当他们后来真正成为哲学大师、著名律师或运筹帷幄的将帅时,早已把学生时代所学到的那些非实用性的数学知识忘得一干二净了,但那种铭刻于头脑中的数学精神和数学文化理念,却会长期地在他们的事业中发挥着重要作用.亦就是说,他们当年所受到的数学训练,一直会在他们的生存方式和思维方式中潜在地起着根本性的作用,并且受用终身.这就是数学之文化品格、文化理念与文化素质原则之深远意义和至高的价值所在.

三、《数学科学文化理念传播丛书》

出版的意义与价值

有现象表明,教育界和学术界的某些思维方式正在深陷纯粹实用主义的泥潭,而且急功近利、短平快的病态心理正在病入膏肓.因此,推出一套旨在倡导和重视数学之文化品格、文化理念和文化素质的丛书,一定会在扫除纯粹实用主义和诊治急功近利病态心理的过程中起到一定的作用,这就是出版本丛书的意义和价值所在.

那么究竟有些什么现象足以说明纯粹实用主义思想已经很严重了呢?如果要详细地回答这一问题,至少可以写出一本小册子来.在此只能举例一二,点到为止.

现在计算机专业的大学一、二年级学生,普遍不愿意学习逻辑演算与集合论课程,认为相关内容与计算机专业没有什么用.那么我们的教育管理部门和相关专业人士又是如何认知的呢?据我所知,南京大学早年不仅要给计算机专业本科生开设这两门课程,而且还要开设递归论和模型论课程.然而随着思维模式的不断转移,不仅递归论和模型论早已停开,而且逻辑演算与集合论课程的学时数也在逐步缩减.现在国内坚持开设这两门课的高校已经很少了,大部分高校只在离散数学课程中,给学生讲很少一点逻辑演算与集合论知识.其实,相关知识对于培养计算机专业的高科技人才来说是至关重要的,即使不谈这是最起码的专业文化素养,难道不明白我们所学之程序设计语言是靠逻辑设计出来的?而且柯特(E. P. Codd)博士创立关系数据库,以及许华兹(J. T. Schwartz)教授开发的集合论程序设计语言 SETL,可谓全都依靠数理逻辑与集合论知识的积累.但却很少有专业教师能从历史的角度并依此为例去教育学生,甚至还有极个别的专家教授,竟然主张把“计算机科学理论”这门硕士研究生学位课取消,认为这门课相对于毕业后去公司就业的学生太空洞,这真是令人瞠目结舌.特别是对于那些初涉高等学府的学子来说,其严重性更在于他们的知识水平还不了解什么有用或什么无用的情况下,就在大言这些有用或那些无用的实用主义想法.好像在他们的思想深处根本不知道高等学府是培养高科技人才基地,竟把高等学府视为专

门培训录入、操作与编程的技工学校。因此必须让教育者和受教育者明白,用多少学多少的教学模式只能适用于某种技能的培训,对于培养高科技人才来说,此类纯粹实用主义的教学模式是十分可悲的。不仅误人子弟,如果任其误入歧途继续陷落下去,必将直接危害国家和社会的发展前程。

另外,现在有些现象甚至某些评审规定,所反映出来的心态和思潮就是短平快和急功近利,这样的软环境对于原创性研究人才的培养弊多利少。杨福家院士说:^①

“费尔马大定理是数学上一大难题,360多年都没有人解决,现在一位英国数学家解决了,他花了9年时间解决了,其间没有写过一篇论文。我们现在的规章制度能允许一个人9年不出文章吗?”

“要拿诺贝尔奖,都要攻克很难的问题,不是灵机一动就能出来的,不是短平快和急功近利就能够解决问题的,这是异常艰苦的长期劳动。”

据悉,居里夫人一生只发表了7篇文章,却两次获得诺贝尔奖。现在晋升副教授职称,都要求在一定年限内,在一定级别杂志上发表一定数量的文章,还要求有什么奖之类的,在这样的软环境里,按照居里夫人一生中发表文章的数量计算,岂不只能当个老讲师。

清华大学是我国著名的高等学府,1952年,全国高校进行院系调整,在调整中清华大学变成了工科大学。直到改革开放后,清华大学才开始恢复理科并重建文科。我国各层领导开始认识到世界一流大学均以知识创新为本,并立足于综合、研究和开放,从而开始重视发展文理科。11年前,清华人立志要奠定世界一流大学的基础,为此而成立清华高等研究中心。经周光召院士推荐,并征得杨振宁先生同意,聘请美国纽约州立大学石溪分校聂华桐教授出任高等中心主任。5年后接受上海《科学》杂志编辑采访,面对清华大学软环境建设和我国人才环境的现状,聂华桐先生明确指出:^②

“中国现在推动基础学科的一些办法,我的感觉是失之于心太

① 王德仁等,杨福家院士“一吐为快——中国教育5问”,扬子晚报,2001年10月11日A8版。

② 刘冬梅,营造有利于基础科技人才成长的环境——访清华大学高等研究中心主任聂华桐,科学,Vol. 154, No. 5, 2002年。

急,出一流成果,靠的是人,不是百年树人吗?培养一流科技人才,即使不需百年,却也绝不是短短几年就能完成的,现行的一些奖励、评审办法急功近利,凑篇数和追指标的风气,绝不是真心献身科学者之福,也不是达到一流境界的灵方.一个作家,您能说 he 发表成百上千篇作品,就能称得上是伟大文学家了吗?画家也是一样,真正的杰出画家也只凭少数有创意的作品奠定他们的地位,文学家、艺术家和科学家都一样,质是关键,而不是量.”

“创造有利于学术发展的软环境,这是发展成为一流大学的当务之急.”

面对那些急功近利和短平快的不良心态及思潮,前述杨福家院士和聂华桐先生的一番论述,可谓十分切中时弊,也十分切合实际.

大连理工大学出版社能在审时度势的前提下,毅然决定立足于数学文化品格编辑出版《数学科学文化理念传播丛书》,不仅意义重大,而且胆识非凡.特别是大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋等不辞辛劳地为丛书的出版而奔忙,实是智慧之举.还有 88 岁高龄的著名数学家徐利治先生依然思维敏捷,不仅大力支持丛书的出版,而且出任丛书主编,并为此而费神思考和指导工作,由此而充分显示徐利治先生在治学模式中的奉献精神 and 远见卓识.

序言中有些内容取材于“数学科学与现代文明”^①一文,但对文字结构做了调整,文字内容做了补充,对文字表达也做了改写.

朱梧楨

2008 年 4 月 6 日于南京

^① 1996 年 10 月,南京航空航天大学校庆期间,名誉校长钱伟长先生应邀出席庆典,理学院名誉院长徐利治先生应邀在理学院讲学,老友朱剑英先生时任校长,他虽为著名的机械电子工程专家,但从小喜爱数学,曾通读《古今数学思想》巨著,而且精通模糊数学,又是将模糊数学应用于多变量生产过程控制的第一人.校庆期间钱伟长先生约请大家通力合作,撰写“数学科学与现代文明”一文,并发表在上海大学主办的《自然杂志》上.当时我们就觉得这个题目分量很重,要写好这个题目并非轻而易举之事,因此,我们(徐利治、朱剑英、朱梧楨)曾多次在一起研讨此事,分头查找相关文献,并列出提纲细节,最后由朱梧楨执笔撰写,并在撰写过程中,不定期会面讨论和修改补充,终于完稿,由徐利治、朱剑英、朱梧楨共同署名,分为(上)、(下)两篇,作为特约专稿送交《自然杂志》编辑部,先后发表在《自然杂志》1997,19(1):5-10 与 1997,19(2):65-71.

目 录

一	数学的定义及其研究对象	/1
二	数学的本性	/5
三	对数学的评价	/13
四	数学的价值	/17
五	数学的教学	/27
六	数学的学习与研究	/32
七	现代数学	/40
八	数学家	/43
九	名人轶事	/46
十	作为精巧艺术的数学	/55
十一	作为语言的数学	/59
十二	数学与逻辑	/62
十三	数学与哲学	/66
十四	数学与科学	/69
十五	算术、代数、几何	/76
十六	微积分及其相关的学科	/87
十七	基本概念、时间与空间	/96
十八	悖论与神奇	/104
	数学家小传	/107
	后 记	/113
	人名中外文对照表	/114

一 数学的定义及其研究对象



1.1 我认为数学这个词是专为科学的应用而设的,正像我们论及.逻辑学、修辞学或音乐那样,数学也有它自身的专门含义与特性.

——西尔维斯特(J. J. Sylvester)

Presidential Address to the British Association, Exeter British Association Report(1869), Collected Mathematical Papers, Vol. 2.

1.2 数学的研究对象就是数量之间的种种间接的度量关系,目的在于按照数量之间所存在的种种客观关系去决定它们的相对大小.

——科姆特(A. Comte)

Positive Philosophy [Martineau], Bk. 1, chap. 1.

1.3 从事数学研究的具体目的,就是为了去发现和表述那些待考虑的现象之间的种种数学规律的方程式;而这些方程式就是从某些已知量去获得另一些未知量的种种演算的起点.

——科姆特(A. Comte)

Positive Philosophy [Martineau], Bk. 1, chap. 2.

1.4 数学是关于数量关系的科学,数量关系就是某物与他物在量的侧面相等与否的种种关系,但二物相等系指在任一断言中,两者可以互相取代.

——赫尔曼·格拉斯曼(Hermann Grassmann)

Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik, Werke (Leipzig, 1904), Bd. 2.

1.5 几何、理论算术和代数这类学科,都涉及我们在外部世界中所观察到的一切对象及其变易情况;因此,对于这些数学关系的研究,就形成了各种处理自然现象的变易规律的学科;诸如天文学、光学和力学等等,并由此而使这些学科常被称为混合数学,其中之空间关系和数量关系,都是和那些从专门的观察中所概括出来的原理结合在一起的;但几何或代数等学科却不包含直接经验,因而被称之为纯粹数学.

——威廉·休厄尔(William Whewell)

The Philosophy of the Inductive Sciences, Part 1, Bk. 2, chap. I, sect. 4. (London, 1858).

1.6 高等数学乃是关于各种自然现象之间的数值关系的推理艺术,高等数学的各个部分,就是从各个方面探索和研究这些关系的不同方式.

——梅洛尔(J. W. Mellor)

Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics (New York, 1902), Prologue.

1.7 整个数学被三种思想观念统治着,或者说有三个基本概念渗透在整个数学领域中,这三个基本概念就是数、序和空间.事实上,每个数学真理都或者涉及其中之一,或者同时涉及其中之两个,甚或是三者的组合.

算术的研究对象是抽象的数的性质.代数则可视作运算的科学,序在其中则是一个颇占优势的观念.而几何是关于空间与空间中之形体性质之演变的学科.

——西尔维斯特(J. J. Sylvester)

A Probationary Lecture on Geometry, York British Association Report(1984), Part 2, Collected Mathematical Papers, Vol. 2.

1.8 纯粹数学的研究对象,是那些被包含在有序流形中的种种理想元素之间所建立的理性关系,流形中之序规律是必须经过严格挑

选的,它们既可以是离散的,也可以是连续的.

——帕泼列兹(E. Papperitz)

Über das System der Rein Mathematischen Wissenschaften
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 1.

1.9 纯粹数学并不涉及具体的数量,而仅仅是一种已经转变为机械运算的相对有序观念的学说.

——努瓦利斯(Novalis)

Schriften(Berlin, 1901).

1.10 纯粹形式科学,逻辑和数学,只处理对象的特殊内容或实质之间的关系,特别是那些包含着量、测度和数等等概念的对象之间的关系,它们都属于数学范畴.

——赫尔曼·汉克尔(Hermann Hankel)

Theorie der Complexen Zahlensysteme(Leipzig, 1867).

1.11 在严格的意义下说,数学是一种抽象的科学.它演绎地研究那些被蕴含在空间关系和数学关系中之原始概念中的论断.

——莫雷(J. A. H. Murray)

A New English Dictionary.

1.12 在最广泛的意义上说,数学乃是各种形式的和必然的演绎推理的展开.

——怀特黑德(A. N. Whitehead)

Universal Algebra(Cambridge, 1898), Preface.

1.13 一般说来,数学基本上是一种自我证明的科学.

——菲里克斯·克莱因(Felix Klein)

Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie(Leipzig, 1902).

1.14 纯数学是假言判断的种种演绎理论的汇集.每一种理论都是由原始的不定义概念和符号,以及一系列不证自明的思想规定(通常称为公理)所组成的一个相容而确定的体系.它们都是可靠而又不借助于直觉的一种演绎过程,一种合理的逻辑推演过程.

——费契(G. D. Fitch)

The Fourth Dimension Simply Explained(New York,1910).

1.15 数学是一门理性思维的科学.它是研究、了解和知晓现实世界的工具.复杂的东西可以通过这一工具简单的措辞去表达,从这一意义上说,数学可被定义为一种连续地用较简单的概念去取代复杂概念的学科.

——威廉·怀特(W. F. White)

A Scrap-book of Elementary Mathematics(Chicago,1908).

1.16 数学研究理想结构(通常应用于实际问题),并在这种研究中去发现各种结构之间的未知关系.

——裴尔斯(C. S. Peirce)

Mathematics,Century Dictionary.

1.17 数学是智能的一种形式.利用这种形式,我们可以把现象世界中的种种对象,置于数量概念的控制之下.

——霍维逊(G. H. Howison)

The Departments of Mathematics, and their Mutual Relations,
Journal of Speculative Philosophy, Vol. 5.

1.18 数学是关于函数规律与变换的一门学科.它能使我们把形象的外延与规定的运动转换成数.

——霍维逊(G. H. Howison)

The Departments of Mathematics, and their Mutual Relations,
Journal of Speculative Philosophy, Vol. 5.