

随机振动引论

【美】J. D. 罗布逊著 谢世浩译

湖南科学技术出版社

目 录

序	(1)
第一章 绪论	(3)
§ 1.1 随机振动	(3)
§ 1.2 随机振动的特征	(4)
§ 1.3 实际应用	(7)
§ 1.4 随机振动理论的性质	(8)
§ 1.5 术语、记号与假设	(10)
第二章 统计分析	(12)
§ 2.1 引言	(12)
§ 2.2 概率	(13)
§ 2.3 随机过程统计学	(20)
§ 2.4 方差	(24)
§ 2.5 高斯分布 (正态分布)	(27)
§ 2.6 单一事件在重复试验中的概率	(31)
§ 2.7 联合概率	(34)
§ 2.8 相关性	(37)
§ 2.9 更完整描述的必要性	(38)

第三章 谐波分析 (40)

§ 3.1 引言 (40)

§ 3.2 福里哀级数 (40)

§ 3.3 福里哀积分 (43)

§ 3.4 谱密度 (46)

§ 3.5 谱密度和概率分布 (50)

§ 3.6 自相关函数 (51)

§ 3.7 自相关函数的若干特性 (58)

§ 3.8 随机过程的组合 (59)

§ 3.9 互相关参数的特性 (63)

§ 3.10 主要结果小结 (65)

第四章 对于单一随机荷载的响应 (68)

§ 4.1 引言 (68)

§ 4.2 对于周期荷载与瞬时荷载的响应 (69)

§ 4.3 对于随机荷载的响应 (75)

§ 4.4 限制因素 (81)

§ 4.5 弹簧-质量系统对于随机激励的响应 (81)

§ 4.6 梁对于单一荷载的响应 (85)

§ 4.7 对于单一荷载的一般响应 (92)

第五章 涉及到互相关的响应 (96)

§ 5.1 引言 (96)

§ 5.2	对于两个随机荷载的响应·····	(96)
§ 5.3	对于多个荷载的响应·····	(102)
§ 5.4	由单一力所引起的位移的互相关·····	(105)
§ 5.5	激励和响应的互相关·····	(111)
§ 5.6	对于分布荷载的响应·····	(114)
第六章	峰值分布与包线波动 ·····	(122)
§ 6.1	引言·····	(122)
§ 6.2	由于随机荷载引起的破坏·····	(122)
§ 6.3	随机过程的峰值分布·····	(126)
§ 6.4	高斯随机过程的峰值分布·····	(130)
§ 6.5	峰值分布与破坏·····	(135)
§ 6.6	包线波动与谱密度的确定·····	(137)
第七章	随机环境的模拟 ·····	(140)
§ 7.1	引言·····	(140)
§ 7.2	环境振动试验·····	(140)
§ 7.3	模拟的一般问题·····	(142)
§ 7.4	使用有限设备的模拟·····	(145)
§ 7.5	环境振动试验的一些更进一步的问题·····	(153)
附录:	振动的一般理论 ·····	(158)
§ A.1	引言 ·····	(158)
§ A.2	简单弹簧-质量系统 ·····	(158)

§ A.3	拉格朗日方程	(163)
§ A.4	微振动理论	(168)
§ A.5	主振型	(170)
§ A.6	主坐标	(173)
§ A.7	阻尼的影响	(176)
§ A.8	用主振型来表示响应	(177)
§ A.9	正交性和初始条件	(181)
文献目录		(185)
英汉词汇对照表		(188)

序

随机振动基本上是一个工程问题.由于工业上的实际需要,它已经发展成为一个公认的课题.大多数的研究者之所以研究它,是由于想把它应用于实际问题.因此,这本书的目的就是为读者提供一些关于这个课题的有实用价值的知识.

然而,对于这个课题,我们只有从整体上对它有了一个基本的理解之后,才有可能实际应用它.因此,本书首先就致力于增进这个理解.这个课题是以分析作为基础的,其表达必然涉及大量的数学分析.虽然数学只是严格地作为达到目的的一种手段,但是,对其严格性的要求并没有降低.为了有助于读者对问题的理解,作者作了很多努力,来调整所有分析性论证的分量.当然,要完全做到这一点是有困难的.

考虑到许多人在毕业若干年后头一回接触这一课题,他们的数学知识已有所遗忘,现假定读者的数学造诣为工科大学毕业生的一般水平(当然,这并不意味着只有毕业生才能从本书中得到教益),而且没有统计或谐波分析的预备知识,因此,本书在编写中,就尽可能地照顾到这一点.同时,尽管大部分读者对机械振动还是有所了解的,然而,本书在附录中仍然提供了这方面的大部分重要结果和概念.

作为入门来讲,这本书是一个“引论”.其意图是立即给那

些以前没有接触过这一课题的读者作一个初步的介绍。同时，也希望对那些于随机振动至今仅有初步接触的读者有所帮助。但是，这并不意味着要将本书分成初等的和高等的两部分，而是要将这一课题作为一个连续的整体提出来。

本书是根据作者在爱丁堡大学应用动力学研究院给研究生讲课的讲义编写而成的。阿诺德 (R.N.Arnold) 教授和莫恩德 (L.Maunders) 教授阅读过原稿，并对大部内容作过评论，我的父亲罗布逊 (L.S.Robson) 先生担负主要校对工作，玛乔里·伊逊 (Marjorie Easson) 小姐为最后的定稿精心打字。在此，谨向他们表示谢意。

1963年8月于爱丁堡

第一章 绪 论

§ 1.1 随 机 振 动

近年来，主要是由于高速飞行的进展，随机振动已经成为一个重要的课题。制造能够承受由于大气湍流或喷气式飞机或火箭发动机的喷流所引起的随机波动荷载的结构和装备已属必需。因此，一种能够分析这种荷载作用的理论随之而发展起来了。虽然，高速飞行的系统的发展给随机振动理论的应用提供了一个非常合适而又重要的领域，但是，一旦它的概念和方法更广泛地为人们所熟悉，显然，这个理论也能够应用于许多其他的工程领域。

随机振动理论的建立并不需要从头开始。涉及到随机过程的一些问题，在物理学中早已有过研究，诸如已为布朗运动和统计力学给出了一个坚实的数学基础。再近一些时候，在电信和控制系统中也有所研究，在那里了解受随机变化输入的系统响应是非常重要的，因为不需要的噪声总伴随着所有需要的信号一道发生。有了得自这些其他领域的大量文献，似乎处理随机振动所必须的全部理论应该是不难得到的。

当然，作为一切随机过程理论基础的基本概念，必然也是随机振动分析的基本概念。譬如，在无线电电路中用来描述噪

声电流的波动所必须的概念，也一定能够用来描述作用在机翼上某点处的压力波动。然而，在实践中，同一基本理论应用于不同类型的问题时，的确会产生着重点上的差异。例如，在考虑控制系统对于随机信号的响应时，人们特别有兴趣的是研制这样一种系统，它将容纳所需要的信号而排除不需要的噪声。而在随机振动问题中，我们的主要兴趣是想知道随机荷载对较复杂结构的影响，而该随机荷载本身的分布往往也是比较复杂的。这样，我们所感兴趣的正是那些从事于控制系统工作的人们对该课题中不大感兴趣的那些方面；另一方面，我们所不感兴趣的则是那些想要应用于其他领域的著作所论述的许多题目。

因此，在本书中，我们的目的是从随机过程理论中理出可以应用于随机振动问题的那些概念，且在这个基础上，说明随机振动的一般理论是怎样建立起来的。

§ 1.2 随机振动的特征

在大多数振动问题中，我们关心的是预测某个系统由已知外力或力系所引起的运动。如果力的变化是谐波式的，或周期性的，或瞬态的，或者是可以作为时间（以及位置）的函数用任何其他方法完整地描述出来的，又如果系统的初始位置和运动是已知的，则我们可以用各种方法完整地预测出该系统的后续特性。只要系统是线性的，许多力同时作用的响应，就可以用迭加法获得。在很多情况下进行响应计算，只要确定作用力

中不包含接近系统自然频率的简谐分量就行了。

但是,这些方法不能适用于受随机变力作用的系统的响应。某个随机变量在任意时刻 t 的值是不可能事先预测的,这是它的基本性质,而在某一时间间隔内所测得量的大小和时间之间的任何关系,决不可能与另外其他时间间隔的完全一样,这也是它的基本性质。因此,我们面临着这样一种响应计算,在那儿,我们无法知道该系统所响应的到底是什么样的荷载,从而,用普通的振动分析方法着手来处理这类问题就不行了。

很明显,我们不可能在通常的精确意义下来确定响应:如果我们无法精确地知道作用力,就不能指望完整地预测响应且把它表示为时间的函数。也很明显,只有想出了描述随机变量的某种方法以后,才能有所进展。即使我们不能完整地描述某个量,也必须尽可能这样去做。事实上,我们将发现,对于一大类随机信号,这种描述方法是有的。通过这种描述方法,我们不但可以尽可能完整地描述一个随机变量,而且还可以从它得到一些有关量的类似描述。比如说,如果我们尽可能精确地描述了某个随机变化荷载,又知道系统的特性,则我们就可以详尽地对此系统的响应作出同样精确的描述。我们还将看到,这样的描述对于设计目的来说,是完全足够的。

分析随机过程之所以成为可能,是因为按随机方式变化的许多物理量的确呈现出一定程度的统计规律性。它们具有我们将笼统地称之为“平稳”的特性。为确立这些观念,让我们考虑一个特殊的量——飞机在飞行中某点处的压力 $p(t)$ 。在任一特定的飞行中,这个量是可以测定的。如果对时间作出图象,它

将构成如图1.2—1所示的一种记录。虽然它没有振幅，没有周期，也不遵循明显的规律，但在作出记录的那一段时间上，这个量的完整描述一定是可能的：画出这条曲线的本身就是对这个量的描述。然而，在这段时间之外记录绝不会重现。而且在名义上相同的条件下所作的任何其他飞行，在所对应的时间上得到的记录也不可能相同。因此，这种精确描述也就没有意义了。不过，如果飞行条件保持不变，则在任何其他时段上所获得的记录就会和它的一般特性非常相似。例如，我们可望发现：它们的平均值会保持不变；围绕平均值的扩散以及单位时间内的峰值数目会相同；如果有的话，优势频率也会相同（当然，这一切都将以考虑的时段足够长而使得这些统计参数有意义为条件）。这些都是在推断 $p(t)$ 的大致影响时的全部重要随机量。

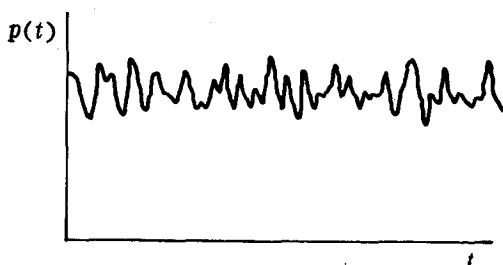


图1.2-1

由此看来，如果我们满足于统计性质的描述，而且发生随机过程的机理至少在某一适当的时间周期上保持不变的话，那么，对于某个随机过程十分有效的描述，应该说是完全可能的。

§ 1.3 实际应用

在发展随机振动理论时，对于我们在实践中想要处理的各类问题，预先有一些概念是大有好处的。在高速飞行中，我们主要感兴趣的是运载工具——飞机或火箭——在所受荷载作用下的生存能力。也就是说，我们必须保证结构中出现的应力不足以引起它的破坏。于是，理想地说来，我们必须能够确定由预期的随机荷载在结构中所引起的那些应力。这只不过是确定某个系统对于已知随机激励的响应运动的问题。因为，如果位移为已知，则应变(从而应力)也就可以求得(荷载情况常常是较复杂的，但是往往可以作出一些简化假定)。即使在应力已知时，要得到关于材料抵抗这些应力的能力的数据，也许还是不容易的，但是可以确信，我们对于在随机荷载作用下材料的性能的了解终究是能够得到的。

然而，除开结构设计问题之外，我们不要忘记，在飞机和火箭上，还配备有大量的非结构装备。并且它们还依靠着这些装备。例如，电子设备对于火箭的控制就极为重要，而且它的破坏可能导致整个装备的破坏。尽管这些电子元件制造得非常严格，它们也不可能设计得那么好，以致于能够抵抗它们在运用中可能遇到的一切随机运动。这一类的任何毛病，在一次飞行试验中，的确很快就会被发现。但是，对于现代火箭来说，一次不成功的飞行试验代价实在太大了。因此，我们在改进一种试验时很感兴趣的是，把运载工具在飞行中将要经历的运动在

地面上进行模拟，从而能够证明它本身的结构及其辅助设备在其使用之前都是合格的。在这里，不仅要对单一随机量的变化进行描述和模拟，同时还要对某个特别复杂结构的整个随机运动进行描述和模拟。

但是，随机振动理论的应用并不限于高速飞行问题。应用于这个领域的方法同样可以很好地应用于沿着不完善跑道滑行的飞机，或者应用于沿着不平整道路行驶的地面车辆的悬挂系统。此外，受到突风荷载或高雷诺数的稳定风力或地震激励的土木工程结构的性能，使用必然存在缺陷的轴承的高精度陀螺仪的性能，受到波浪运动的稳定船舶的性能，这些都是随机振动现象。它们都可以通过了解我们在这里将要介绍的那些概念和分析方法来加以探讨。

§ 1.4 随机振动理论的性质

显然，统计分析一定会在我们对随机振动问题的研究中起着重要的作用。统计理论的庞大体系已经发展许多年了，它的结果是可以利用的，而且已经受了充分的考验。如果统计分析的方法能够用来描述譬如说人的身高分布，那么，它同样也能够用来描述相继时刻所测得的应力值的分布。

但是，我们将发现，必须把统计描述方法与基于谐波分析概念的描述方法结合起来。而这种谐波分析的概念要适当地加以推广，才能使它适用于像图1.2—1那样的连续记录。在许多场合，记录的形状较之其量级分布，更具有重要意义。在这种情

况下，谐波分析方法将提供更好的描述。特别，当我们开始考虑某一系统对随机变化激励的响应时，也将认为有可能利用由试验或理论而得到的关于离散频率的结果，了解激励的频率结构。但是，我们用谐波分析方法来描述的那些随机变量的性质，也能够用统计方法来描述。这样，用两种等效的方法来描述同一性质的可能性，常常在分析中带来很大的方便，对于任一特定目的来说，我们总可以使用一种最恰当的方法。

因此，统计学与谐波分析的基本概念是我们从事随机振动分析的基础。下面两章将致力于从这两个知识领域中引出有关的概念。在第二章中，将介绍统计学与概率论的基本概念。在第三章中，将根据当前的需要，把通常的谐波分析方法加以推广，并且还导出谐波描述的统计对应量。

以上所述，对于所有随机过程理论来说都是共同的。但是，随机振动理论的研究又必须以传统振动理论的结果和方法为基础。虽然我们假定大部分读者对此是比较熟悉的，但是在附录中还是给出了有关重要概念的简短叙述（不言而喻，对于那些缺乏振动课题知识的人，最好去参考比附录更完全的专著。例如，参考文献2,20,24）。主振型分析方法对研究受随机激励的复杂系统的响应显得特别便利。在第四章中，我们将考虑由于单一随机变力在系统中所引起的响应，这是一个相当简单的问题。但在实践中，在一个物体的表面上往往有许多荷载同时作用，因此，物体的响应将随作用于各点间的相互关系而定。这种情况下的响应分析将在第五章中考虑。

在本书的最后两章中，将把前面各章叙述的随机振动理论

应用于两个实际问题：第六章考虑设计的基本问题——一个部件在给定的使用期限内破坏概率的推断。第七章考虑通过试验对一个给定的随机振动环境进行模拟的问题。

§ 1.5 术语、记号与假设

对于初接触随机振动的大部份读者说来，该课题中有大量的术语和概念可能是不熟悉的。然而读者必须熟悉这些术语和概念，因为对它们的清晰理解将构成理解这一课题的大部份工作。幸好这些术语已经合理地标准化了。

但是，另一方面，各个不同的作者，所用的记号仍有很大的差异。特别是像谱密度和自相关函数（这些都将在以后介绍）这样一些重要而又不断出现的量，可以用许多不同的记号来表示。在本书中，只要有可能，记号的用法将尽量与一般文献的习惯用法取得一致。在不可能这样作的情况下，则从别处所用的许多记号中，选用那些较方便的记法。又只要有可能，通过脚标使用的一致，使得记号的含义不言而喻。但是在全书中，我们认为记号便于理解的设想比其一致性的要求更显得重要，而且在为了清楚起见又必须简洁的地方，组合的记号便予以紧缩，而在需要使其更加明显的地方，又可以将它扩充。

在全书中，将假定我们所考虑的任何随机过程的统计特性是不随时间而改变的。事实上，应该严格地称为“平稳性和各态历经性”（这两个术语的精确定义将在下一章介绍了统计概念之后加以解释，但概念本身比定义更加重要）。当随机变量在

相当长的时间内不随时间而变化的稳定条件下发生时，似有可能发现这样的性质。例如，当飞机在均匀大气中匀速飞行时就是这样的情况。当然，实际上并非总是这样。但是，如果稳定条件下的结果已经知道，我们往往可对时间变化条件进行估量，从而得到关于非平稳情况的知识。这样，根据平稳且各态历经随机过程的假定下得到的理论与非平稳状态之间的关系，非常类似于在线性假设下得到的理论与非线性系统之间的关系。这也就是说，尽管在物理世界中，真正的线性关系极为罕见，但是，在对该领域进行分析时，线性理论决不是不相干的。

第二章 统 计 分 析

§ 2.1 引 言

我们来考虑一个随机变量, 用 $x(t)$ 来表示。它可以是任一物理量, 例如力、压力、应力或加速度等。其中自变量 t 不必一定是指时间, 尽管我们暂且认为它代表时间比较方便。假若, 在某个时间间隔 Δt 上, 将这个随机变量记录下来, 结果将如图 2.1—1 所示曲线。虽然, 在测定 $x(t)$ 的任一特定时间间隔 Δt 内, 我们可以描出对应于 t 的 $x(t)$, 但却不能由此预言它在时间间隔 Δt 之外的任一 t 值处的精确值。

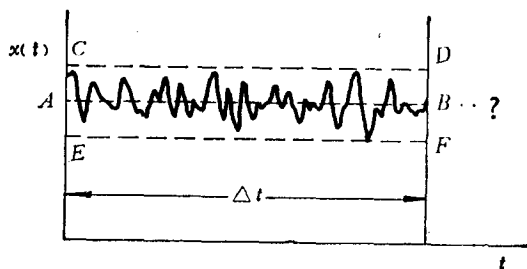


图2.1—1

但是, 如果我们有理由相信, 发生 $x(t)$ 的机理一直保持不变, 则可期望在时间间隔 Δt 之外, $x(t)$ 的基本特征也将保持不