

工程数学例题与习题

下册

复变函数 · 积分变换

数学物理方程 · 数值计算方法

工科数学课程教学指导委员会本科组 编

高等教育出版社

工程数学例题与习题

下 册

复变函数·积分变换
数学物理方程·数值计算方法

工科数学课程教学指导委员会本科组编

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

工程数学例题与习题 下册/工科数学课程教学指导委员会
本科组编. —北京:高等教育出版社, 1996

ISBN 7-04-005546-5

I.工… II.工… III.工程数学—高等学校—习题 IV.T
B11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 19504 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:4014048 电话:4054588

新华书店总店北京发行所发行

北京华文印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.875 字数 250 000

1996 年 5 月第 1 版 1996 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001— 6622

定价 9.10 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

版权所有,不得翻印

本书分上、下两册。上册包括线性代数、概率论与数理统计；下册包括复变函数、积分变换、数学物理方程、数值计算方法。各部分内容是依据《工科数学教学基本要求》编写的。每部分都编写有内容提要、例题分析、习题、习题答案与提示。内容提要包含了各部分的重点内容，基本概念和基本方法，例题分析部分侧重于帮助读者加深对概念和理论的理解。通过分析解题思路，阐明解题方法，以帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。习题部分，除基本题外，还选编了少量略有提高的题目，供读者参考选用。

目 录

复变函数	1
第一章 复数与复变函数	3
第二章 解析函数	18
第三章 复变函数的积分	31
第四章 级数	51
第五章 留数	66
第六章 共形映射	79
习题答案与提示	90
积分变换	97
第一章 傅里叶积分变换	100
第二章 拉普拉斯变换	118
习题答案与提示	140
数学物理方程	143
第一章 一些典型方程和定解条件的推导	145
第二章 分离变量法	153
第三章 行波法与积分变换法	178
第四章 贝塞尔函数	189
第五章 勒让德多项式	202
习题答案与提示	215
数值计算方法	223
第一章 误差	225
第二章 线性代数方程组的解法	233
第三章 插值与拟合	250
第四章 数值微积分	266
第五章 方程求根	280
第六章 常微分方程初值问题数值解法	290
习题答案与提示	303

复变函数

第一章 复数与复变函数

内 容 提 要

一、复数的概念, 复数的表示与运算

1. 复数的概念

称形如 $z = x + iy$ 的数为复数, 其中 x 与 y 为任意实数, 分别称为复数 z 的实部与虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

i 满足 $i^2 = -1$, 称为虚单位.

表示复数 z 的向量的长度称为该复数的模或绝对值, 记作

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

以正实轴为始边, 以表示 $z (z \neq 0)$ 的向量为终边的角 θ 的弧度数称为 z 的辐角, 记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad (1.2)$$

其中满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的 θ_0 称为辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$. 一个非零复数的辐角有无穷多个值, 即

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

辐角的主值 $\arg z$ 可以由 $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ 的主值 $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 按下列关系来确定:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{当 } x > 0; \\ \pm \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y \neq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \pm \pi, & \text{当 } x < 0, y \neq 0; \\ \pi, & \text{当 } x < 0, y = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

2. 复数的表示

三角表示 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$;

指数表示 $z = re^{i\theta}$.

其中, $r = |z|$, θ 为 $z \neq 0$ 的无穷多个辐角中的任一值.

此外, 复数还可以用球面上的点来表示. 任取一个与复平面相切于原点的球面. 过原点作与复平面垂直的直线与球面相交于另一点, 称为北极, 球面上与原点重合的点称为南极. 这样, 对复平面内任一点 z , 联结它与北极的直线段必与球面相交于异于北极的另一点; 反之, 对于球面上异于北极的点, 也可用一直线段将它与北极联结起来, 延长后相交于复平面内的一点 z . 用这种方法就建立了球面上的点(除北极外)与复平面上点的一一对应关系. 为使北极也与复平面上的点相对应, 在复平面上引入一个假想点, 规定它的模为无穷大, 称为无穷远点, 记作 ∞ . 包含无穷远点的复平面称为扩充复平面. 扩充复平面上的点与球面上的所有点一一对应, 称该球面为复球面. 因此, 复数可用球面上的点来表示.

3. 复数的乘积、商、幂与方根

两个非零复数 z_1, z_2 的乘积与商有如下性质:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \quad (1.5)$$

注意 (1)等式(1.4)与(1.5)应理解为两端可能取的值的全体是相同的;(2)复数 z_1 乘以复数 z_2 在几何上相当于把表示 z_2 的向量逆时针旋转 $\operatorname{arg} z_1$, 并把 z_2 的模伸长(或压缩)到 $|z_1|$ 倍. 若 $|z_1| = 1$, 乘法就相当于旋转.

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n ,

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1.6)$$

当 $r = |z| = 1$ 时, 就得到棣莫弗公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1.7)$$

方程 $w^n = z$ ($z \neq 0$) 有 n 个不同的根 w , 称它们是 z 的 n 次根, 记作 $w = \sqrt[n]{z}$,

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.8)$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 是算术根, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 在几何上, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

二、复变函数及其极限和连续性

1. 区域

复平面上的非空连通开集称为区域. 一个区域与它的边界的并集称为闭区域或闭域. 一条没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当曲线. 如果简单曲线的起点与终点重合, 那末此曲线称为简单闭曲线. 若区域 D 中的任何简单闭曲线的内部全含于该区域, 则称 D 为单连通域. 不是单连通域的区域称为多连通域.

2. 复变函数

设 G 为一复数集. 若存在一个确定的法则, 按照该法则, 对于每个复数 $z \in G$, 有一个或几个复数 w 与它相对应, 则称复变数 w 为复变数 z 的函数 (简称复变函数), 记作 $w = f(z)$. 若 z 的每个值对应着唯一的 w 值, 则称函数 $f(z)$ 是单值的; 若 z 的每个值对应着两个或两个以上的 w 值, 则称 $f(z)$ 是多值的. G 称为 $f(z)$ 的定义集合, 对应于 G 中所有 z 的一切 w 值构成的集合 G^* 称为函数值集合. 若 G 是一个区域, 则称 G 为 $f(z)$ 的定义域.

复变函数 $w = f(z)$ 在几何上表示一个映射 (或变换), 它把 z 平面的一个点集 G (定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 G^* .

(函数值集合).

3. 复变函数的极限

设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内, A 为一个确定的常数. 若对任给的 $\epsilon > 0$, 相应地有一个 $\delta (0 < \delta \leq \rho)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \text{ 或当 } z \rightarrow z_0 \text{ 时, } f(z) \rightarrow A.$$

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $A = u_0 + iv_0$, $z_0 = x_0 + iy_0$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 的充要条件是:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

复变函数极限的运算法则与实变函数相同.

复变函数的极限定义与一元实变函数的极限定义虽在形式上相同, 但实质上它比后者的要求苛刻得多. 对于一元实变函数, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在仅要求 x 在 x 轴上沿 x_0 的左右趋向 x_0 时, $f(x)$ 趋向于同一常数; 对于复变函数的极限, 则要求 z 不论从什么方向以任何方式趋向于 z_0 时, $f(z)$ 都趋向于同一常数.

4. 复变函数的连续性

设 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的一个邻域内, 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是: $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

复变连续函数的运算法则也与实变连续函数的运算法则类似.

例题分析

例 1.1 求复数 $z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + i)}$ 的模与辐角的主值.

分析 一般, 可以将复数 z 化成 $x + iy$ 的形式, 再分别利用 (1.1) 式与 (1.3) 式来求它的模和辐角的主值. 此题中 z 的分子和分母互为共轭复数, 根据两个共轭复数的模相等, 很容易求出 z 的模, 至于它的辐角主值也可以利用公式 (1.4) 与 (1.5) 来求. 下面用两种方法求辐角的主值.

解 法一 $|z| = \frac{|1 + \sqrt{3}i| |1 - i|}{|1 - \sqrt{3}i| |1 + i|} = 1.$

为求辐角, 先将 z 化为 $x + iy$ 的形式:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \cdot \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

根据 (1.3) 式, 得 $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$

法二 根据公式 (1.4) 与 (1.5), 我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} z &= \operatorname{Arg} \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} + \operatorname{Arg} \frac{1 - i}{1 + i} \\ &= (2m\pi + \frac{2}{3}\pi) + (2n\pi - \frac{\pi}{2}) = 2(m + n)\pi + \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

其中 m 与 n 为整数, 因此 $\arg z = \frac{\pi}{6}.$

例 1.2 分别就 $0 < \varphi \leq \pi$ 与 $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ 两种情形将复数 $z = 1 - \cos \varphi + i \sin \varphi$ 化成三角形形式与指数形式, 并求它的辐角主值.

分析 将复数 z 化成三角形形式与指数形式, 关键在于求出它的模与辐角. 为此, 可先将它化成 $x + iy$ 的形式, 再用例 1 中的方法去求 z 的模与辐角. 但本题所给的复数已接近于三角形形式, 利用三角恒等式直接化为三角形形式更为简便.

解 $z = 1 - \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$= 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2i\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$= 2\sin \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} + i\cos \frac{\varphi}{2}).$$

1) 若 $0 < \varphi \leq \pi$, 则 $0 < \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. 由上式, $|z| = 2\sin \frac{\varphi}{2}$. 又因为 $\sin \frac{\varphi}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})$, $\cos \frac{\varphi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})$. 所以 z 的三角形式为

$$z = 2\sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) \right],$$

z 的指数形式为

$$z = 2\sin \frac{\varphi}{2} e^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})i}.$$

由于 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, 故 z 的辐角主值为 $\arg z = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

2) 若 $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < -\frac{\pi}{4}$, 且 $\sin \frac{\varphi}{2} < 0$, 因此 $|z| = -2\sin \frac{\varphi}{2}$. 于是 $z = 2\sin \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} + i\cos \frac{\varphi}{2}) = -2\sin \frac{\varphi}{2} (-\sin \frac{\varphi}{2} - i\cos \frac{\varphi}{2})$. 又因为 $\frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} < \pi$,

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = -\cos(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}),$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = -\sin(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}),$$

所以 z 的三角形式与指数形式分别为:

$$z = -2\sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}) \right],$$

$$z = -2\sin \frac{\varphi}{2} e^{(\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2})i}.$$

由于 $\frac{7}{4}\pi < \frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2} < 2\pi$, 故 $\theta = \frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}$ 不是 z 的辐角主值. 而

$$-\frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = -2\pi + (\frac{3}{2}\pi - \frac{\varphi}{2}) < 0$$

所以 $\arg z = -(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2})$. 此时, z 的三角形形式和指数形式也可以分别写成:

$$z = -2\sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos(-\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) \right],$$

$$z = -2\sin \frac{\varphi}{2} e^{-(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2})i}.$$

例 1.3 设 α, β 都是单位圆内的点, 证明: 复数 $z = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}}$ 也在单位圆内.

分析 由已知, $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$. 为了证明 z 在单位圆内, 只要证明 $|z| < 1$ 或 $|z|^2 < 1$, 这可以利用共轭复数的性质(例如 $|z|^2 = z\bar{z}$ 等)得到.

证 因为

$$\begin{aligned} 1 - |z|^2 &= 1 - \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right|^2 = 1 - \frac{(\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{|1 - \alpha\bar{\beta}|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{|1 - \alpha\bar{\beta}|^2}, \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} &(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= (1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= 1 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2|\beta|^2 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) \\ &= (1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2) > 0, \end{aligned}$$

所以 $1 - |z|^2 > 0$, 或者 $|z| < 1$, 故 z 在单位圆内.

在例 1.3 中, 若 α 与 β 有一个在单位圆周上, 例如, $|\alpha| = 1$, 重复上面的证明过程不难得知 $|z| = 1$, 因而 z 也在单位圆周上. 这个结论用下面的方法证明更为简便.

由于 $|\alpha| = 1$, 所以 $\alpha = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, 从而

$$|z| = \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right| = \left| \frac{\alpha - \beta}{\bar{\alpha}(\frac{1}{\alpha} - \beta)} \right| = \frac{1}{|\alpha|} \left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \right| = |\alpha| = 1.$$

例 1.4 证明: 方程 $z^n - 1 = 0 (n > 1)$ 的 n 个根之和为零.

分析 方程 $z^n - 1 = 0$ 的 n 个根就是 1 的 n 个不同的 n 次根. 在几何上它们就是单位圆的内接正 n 边形的 n 个顶点, 也可用以这 n 个顶点为终点的 n 个向量来表示. 因此, 它们的和(向量)是零(向量). 为了用分析的方法证明这个结论, 先利用公式 (1.8), 求出 1 的 n 个相异的 n 次根, 化成指数形式后易见它们组成一个等比数列. 再根据等比数列求和公式证明它们的和恰为零.

证 由公式 (1.8),

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} &= (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &= e^{k \cdot \frac{2\pi}{n} i} (k=0, 1, 2, \dots, n-1).\end{aligned}$$

令 $\omega = e^{\frac{2\pi}{n} i}$, 则它们可以表示为: $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$. 注意到 $\omega \neq 1$, 根据等比数列求和公式及 ω 为方程 $z^n - 1 = 0$ 的根得知

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$$

例 1.5 证明: 复平面上三点 z_1, z_2 与 z_3 共线的充要条件是

$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 为实数.

分析 用复数的方法解决平面几何问题通常有两个思路. 其一是将平面上的点用复数表示, 将平面曲线方程化成复数形式. 本题中, 可将通过两点 z_1 与 z_2 的直线的参数方程写成复数形式, 点 z_3 与它们共线的充要条件是它满足该方程. 其二是将点(复数)看成向量, 利用向量的有关知识来解决. 本题中, 三点 z_1, z_2 与 z_3 共线相当于向量 $z_3 - z_1$ 与 $z_2 - z_1$ 共线, 而两个向量共线当且仅当它们的夹角为 π 的整数倍.

证 法一 将过点 z_1 与 z_2 的直线参数方程化为复数形式:

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

而 z_3 在该直线上的充要条件是它满足这个方程, 即存在某个实数

$\tilde{t} \in (-\infty, +\infty)$, 使

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \tilde{t}.$$

法二 不失一般性, 将 z_1 平移到原点. 我们知道, 向量 $z_3 - z_1$ 与 $z_2 - z_1$ 共线的充要条件是

$$\operatorname{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

即

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| e^{n\pi i} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| (-1)^n.$$

也就是说, $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 是一个实数.

例 1.6 求下列集合 G 在给定的函数 $w = f(z)$ 下映成什么样的集合, 并画出图形:

(1) $f(z) = z^2 - z, \quad G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\};$

(2) $f(z) = x - y + i(x + y),$

$$G = \left\{ z \mid 0 < \arg(z + 1) < \frac{\pi}{4}, 1 \leq |z| \leq 2 \right\}.$$

分析 求集合 G 在给定映射下的象集 G^* , 通常先求出 G 中有代表性的点和曲线(例如边界曲线)的象点和象曲线, 然后再确定集合 G^* . 但有时也可以利用更简便的方法. 在第(2)小题中, $f(z)$ 可以写成 $f(z) = az$ 的形式, 因此直接利用复数乘法的几何意义就能得到 G^* .

解 (1) 令 $w = u + iv$, 则函数 $w = z^2 - z$ 对应于

$$u = x^2 - y^2 - x, \quad v = 2xy - y. \quad (1)$$

易见, G 是 z 平面上宽度为 1 的水平带形区域, 边界是直线 y

$=0$ 与 $y=1$. 将 $y=0$ 代入(1)式就得到 $y=0$ 的象曲线的参数方程: $u = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}, v=0$. 它表示 w 平面的实轴 $v=0$ 上 $u \geq -\frac{1}{4}$ 的部分. 将 $y=1$ 代入(1)式得: $u = x^2 - x - 1, v = 2x - 1$. 消去 x 就得到 $y=1$ 的象曲线是 w 平面上的抛物线 $u = \frac{1}{4}v^2 - \frac{5}{4}$. G 内点 $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ 的象点为 $w = -\frac{1}{2}$. 用同样的方法可得知 G 内任一水平直线 $y=c (0 < c < 1)$ 的象曲线也是一条抛物线 $u = \frac{1}{4c^2}v^2 - (c^2 + \frac{1}{4})$. 由此可见, G 的象集 G^* 是 w 平面上抛物线 $u = \frac{1}{4}v^2 - \frac{5}{4}$ 右边的区域, 但不包含实轴上 $u \geq -\frac{1}{4}$ 的点, 如图 1.1.

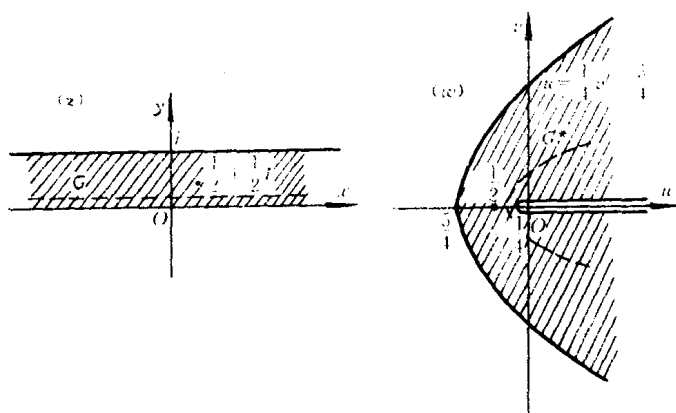


图 1.1

(2) 不等式 $0 < \arg(z+1) < \frac{\pi}{4}$ 表示 z 平面上以 $z = -1$ 为顶点与正实轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的角形域, 而 $1 \leq |z| \leq 2$ 表示一个闭圆环区域, 因此 G 表示该闭圆环域含于角形域内的部分. 我们可以利