

2004年上海大学博士学位论文 ②

复合荷载、复杂应力状态下不同 模量弹性结构的解析解及数值解

作 者：姚文娟

专 业：固体力学

导 师：叶志明



上海大学出版社

· 上 海 ·

2004 年上海大学博士学位论文

复合荷载、复杂应力状态下不同 模量弹性结构的解析解及数值解

作 者： 姚文娟
专 业： 固体力学
导 师： 叶志明

上海大学出版社
• 上 海 •



Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

**The Analytical and Numerical Solution
for Elastic Structure under
Combined Loads and Complex Stress
Using Diferent Modulus Theory**

Candidate: Yao Wenjuan

Major: Solid Mechanics

Supervisor: Prof. Ye Zhiming

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：李 杰	教授，同济大学土木工程学院	200092
委员：王建华	教授，上海交通大学土木系	200030
郭兴明	教授，上海大学应用数学和力学所	200072
冯 伟	教授，上海大学应用数学和力学所	200072
李永和	教授，上海大学土木系	200072
导师：叶志明	教授，上海大学	200072

评阅人名单:

- | | | |
|------------|-----------------|--------|
| 殷建华 | 教授, 香港理工大学土木系 | |
| 王 琪 | 教授, 北京航空航天大学理学院 | 100083 |
| 王建华 | 教授, 上海交通大学土木系 | 200030 |

评议人名单:

- | | | |
|------------|------------------|--------|
| 俞焕然 | 教授, 兰州大学力学系 | 610054 |
| 冯 伟 | 教授, 上海大学应用数学和力学所 | 200072 |
| 李 杰 | 教授, 同济大学土木工程学院 | 200092 |
| 亢一澜 | 教授, 天津大学力学系 | 300072 |

答辩委员会表决结果

经答辩委员会投票表决，全票一致通过该同学的论文答辩，并建议授予博士学位。

答辩委员会主席：**李杰**

2003年12月28日

答辩委员会

答辩委员会对论文的答辩决议

姚文娟同学的博士学位论文针对不同模量弹性理论中的难点问题,求得了典型工程结构(或构件)在拉压模量不同时的应力、位移的解析解和数值解。所得的结果对实际工程结构有参考价值和指导意义。论文的主要创新点如下:

(1)对具有不同弹性模量的工程构件给出了确定中性轴的结论:中性轴位置与剪应力无关。由此给出了确定中性轴位置的计算公式,提高了计算精度和速度。

(2)求得了几种常用工程构件或结构:柱、梁、挡土墙、大坝、静定刚架等在复杂应力状态下的正应力、剪应力和位移等的解析计算公式。

(3)导出了超静定结构在不同模量下的内力计算方法,编制了非线性内力计算迭代程序,解决了较难的问题。论文指出:通过改变材料的拉压模量比,可以进一步发挥材料特性、进行结构的优化设计。

综上所述:论文的选题具有重要的学术意义和应用价值,论文的理论分析深入、计算工作量很大,论文工作对土木工程结构的设计方法是具有挑战性的。论文研究表明:姚文娟同学已具备扎实的力学基础理论知识、系统深入的专门知识和独立的科学研究能力。论文结构合理,叙述清晰,推导严谨,计算结果可信,在理论方法上有所创新,论文的结果丰富了拉压不同模量弹性结构理论的研究内容,是一篇优秀的博士论文。

答辩中,姚文娟同学阐述清晰,正确地回答了答辩委员提出的有关问题。

摘 要

不同模量弹性理论认为:在绝对值相同的拉应力或压应力作用下,材料会发生绝对值不同的拉应变和压应变.即材料具有不同的拉伸弹性模量和压缩弹性模量.该理论突破了经典弹性力学中其弹性模量仅与材料自身性质有关这一假定,提出弹性模量还取决于结构各点的位移与应力状态的不同而不同,即弹性模量与结构的材料、形状、边界条件及外荷载均有关,是诸多因素所致的非(双)线性力学问题.由于该理论的介入,使材料的力学特性及内在潜能更得以充分挖掘.在当今高科技日益发展,人们对材料学科研究不断深入的时代,无疑是一突破和贡献.

对不同模量弹性理论,已有国内外诸多学者进行了研究,先后提出了该理论的基本概念,基本假设,单向应力状态下部分简单问题的解析解,以及有限元数值计算方法.到目前为止,问题的难点归结为复杂应力状态下结构拉压分界面(中性层)的确定,以及对复合荷载作用下,复杂应力状态下的具体结构或构件尚不能(无法)用不同模量理论的解析方法计算该类结构(或构件).针对该研究现状,本文解决了以下问题:

(1) 对复杂应力状态下的不同模量弹性构件其中性轴(层)的判定得出一个重要结论:构件的中性轴(层)与剪应力无关.因而可用正应力作为判据而得到中性轴位置的计算公式,改进了以往有限元计算中用主应力判定而多次循环逼近的计算方法.

(2) 对土木工程中的各类结构:柱、梁、挡土墙、大坝、静定刚架推导出其在复合荷载作用下,复杂应力状态下的中性轴

(层)计算公式, 正应力、剪应力计算公式以及位移计算公式.

(3) 对于超静定结构, 当引入拉压不同模量后, 各杆件的刚度 EI 不再为常数, 而是内力的函数, 使该结构的内力计算为一完全的物理非线性问题(不同于以上静定结构的应力仅为双线性问题), 为此, 本文推导出不同模量超静定结构的内力计算表达式, 并编制了非线性内力计算迭代程序用以结构的计算.

(4) 用本文提出的不同模量弹性理论编制了有限元程序, 对不同模量有关结构进行有限元数值计算.

(5) 对以上各类结构均选用了工程实例进行计算, 同时用经典弹性力学同模量理论, 本文所推导的不同模量理论公式以及不同模量有限元之三种方法分别计算, 并对三种结果的误差进行分析.

(6) 进行了参数化研究, 由各种拉压模量的比值对结构进行中性轴(层)、内力、应力、位移的计算及分析, 得出了经典弹性力学与不同模量弹性理论这两种理论在计算结果上的差异, 最后对结构的计算提出了合理化建议以及用不同模量理论对实际工程进行优化分析的指导性意见.

关键词 拉压不同模量, 复杂应力状态, 柱, 梁, 挡土墙, 大坝, 静定刚架, 超静定结构, 非线性, 中性轴, 内力, 应力, 位移, 解析公式, 迭代程序, 有限元, 结构优化

Abstract

The elastic theory of different modulus consider that: under the action of tension or compression stress which have the same absolute value, material will produce different absolute value tension strain and compression strain, that is, the tension elastic modulus of material are different from that of the compression elastic modulus. The theory breakthrough the assumption that elastic modulus is only related to the properties of material itself, it proposed that elastic modulus are still depend on the displacement and stress state for each point of structure, that is, elastic modulus are related to the material, shape, boundary condition and external loadings of structure, so, it is a nonlinear problem contributed by many factors. Owing to the addition of theory, the mechanics properties and intrinsic potentiality can be fully explored. With the rapid development of hi-technology, the research on the material discipline are continuously explored, the elastic theory of different modulus is undoubtedly a breakthrough and contribution.

The elastic theory of different modulus was investigated by many scholars of home and abroad, its basic concept, basic assumption, the analytical solution for partly simple problem under single stress state, and numerical computation method of finite element are proposed successively. Up to now, the difficulty of problem lies in the determination of tension-compression interface of structural member under complex stress state, and the lack of

analytical solution of different modulus theory for practical structure when subject to complex stress state. Based on the research state, the paper aim at solving the following problem:

(1) To the elastic structure with different modulus under complex stress state, a important conclusion are obtained in the determination of neutral axis, that is, the neutral axis of structure have no relationship with shear stress, so, the formula of the position for neutral axis can be deduced by using the normal stress as criteria, which improved the method of many times cyclic approximation result from the determination of neutral axis during the finite element calculation.

(2) For the all kinds of structure of civil engineering, such as: column, beam, retaining wall, dam, static frame, the formulation of neutral axis, normal stress, shear stress and the displacement subject to the combined loadings under the complex stress state are deduced.

(3) For the statically indeterminate structure, when introducing different tension and compression modulus, the rigidity of every member EI is not constant anymore, but is the function of internal force, the calculation for internal force of structure is completely a nonlinear problem (which different from that of static structure), so, in this paper, the author deduces the formulation of internal force for statically indeterminate structure with different modulus, and develop the iterative program for nonlinear calculation of internal force.

(4) Develop the finite element program based on the elastic theory of different modulus, and make calculation to the structure

with different modulus

(5) Choose the practical engineer of the above structure for calculation, at the same time, calculate by respectively using three methods of same modulus theory of classical mechanics, the formulation of different modulus theory deduced in this paper, and finite element method, and draft the analysis for the error of the three methods.

(6) Make parameterization research, according to the various ratio of tension modulus to compression modulus, the neutral axis, internal force, stress, displacement for structure are calculated and analyzed, the difference between the same modulus theory and the different modulus theory are obtained. Finally, the author proposes the reasonable suggestion for structure calculation and the guide for the optimization for practical structures.

Key words different tension and compression modulus, complex stress state, column, beam retaining wall, dam, statically determinate frame, statically indeterminate structure, nonlinear, neutral axis, internal force, stress displacement, analytical formulation, iterative program, finite element, structure optimization

目 录

第一章 概述 (绪论)	1
1.1 不同模量弹性问题的提出及研究的必要性	1
1.2 国内外研究动态	2
1.3 以往研究中存在的问题	9
1.4 本论文所解决的问题 (所做的研究)	11
第二章 不同模量弹性理论基础	13
2.1 基本概念	13
2.2 基本假设	14
2.3 应力状态, 主应力与正应力	14
2.4 平衡方程, 几何方程, 相容方程	17
2.5 物理方程 (本构方程)	20
2.6 边值方程	23
第三章 不同模量有限元方法	25
3.1 单元位移模式, 插值函数	25
3.2 应变矩阵, 应力矩阵	27
3.3 刚度矩阵	28
3.4 有限元格式	29
第四章 不同模量弯压柱的解析解	32
4.1 单向弯压柱	32
4.2 双向弯压柱	71
第五章 不同模量静定梁的解析解	100
5.1 不定区域中性轴判据定理	100
5.2 结构模型	101

5.3	中性轴及正应力计算公式	102
5.4	剪应力计算公式推导	103
5.5	位移计算公式推导	107
5.6	实例 1, 均布荷载简支梁	113
5.7	实例 2, 集中荷载悬臂梁	148
第六章	不同模量挡土墙、大坝的解析解	165
6.1	不定区域中性轴(层)的判定	165
6.2	结构模型	165
6.3	横力弯曲的正应力、剪应力	166
6.4	弯曲、自重共同作用下的中性轴(层)及正应力	170
6.5	同时计入 X、Y 向的中性轴(层)	172
6.6	实例计算及结果分析	174
第七章	不同模量静定刚架的解析解	190
7.1	结构模型	190
7.2	计算方法及解析解公式	191
7.3	算例计算及结果分析	193
第八章	不同模量超静定结构的非线性力学行为	220
8.1	超静定结构在外荷作用下的结构计算	220
8.2	弹性支承下的超静定结构在外荷作用下 的结构计算	297
8.3	超静定结构由于温差及支座移动 引起的内力计算	345
第九章	总结与展望	382
9.1	总结	382
9.2	展望	384
参考文献		386
致 谢		394

第一章 概 述

1.1 不同模量弹性理论的提出及研究的必要性

随着科学技术的日益发展,对材料科学的研究提出了更高的要求,研制新型的材料以及挖掘材料自身的特性潜力,已成为一种新的研究趋向.

不同模量弹性问题就是在经典弹性理论上发展起来的,能更有效地发挥材料力学特性的一种弹性理论.在经典弹性理论中,通常假设弹性模量与应力状态无关,即材料在拉伸、压缩时其弹性模量相等.但是实际上几乎所有材料都具有拉压不同弹性模量的特性,只是不同大小程度而已.有些材料其拉压弹性模量相差很大,如混凝土、金属、玻璃钢、塑料、陶瓷等都十分明显地具有拉压模量不同特性,特别是近年来发展起来的新型复合材料更是如此.它们在拉伸时的弹性模量 E_p 与压缩时的弹性模量 E_n 其比值 E_p/E_n 甚大, (见表 1.1 所列举的不同模量材料),对于这类材料若沿用经典弹性力学理论来进行分析计算将会引起很大误差.因此,对这类材料引入不同模量的理论及计算方法是十分必要.

表 1.1 不同模量材料表

材料类别		材料名称	拉伸弹性模量 $E_p(\text{N/mm}^2)$	压缩弹性模量 $E_n(\text{N/mm}^2)$	E_p/E_n
聚 合 物	$t=25^\circ$ 有机 玻璃	苯二甲酸二酯 含量 0%	1 370	2 740	0.5
		6.0%	1 370	2 38.0	0.58
		10.0%	1 180	2 140	0.55
	聚酯丙 稀塑料	MⅡΦ-1	2 400	1 430	1.68
		MⅡΦ-2	1 301	480	2.71
用纤维 和颗粒 增强的 复合材 料	$t=20^\circ$ 玻璃纤 维加强	KC-30	5 360	1 150	4.66
		AC-30	1 390	200	6.96
	玻璃钢	玻璃-S 织状物-143	31 000	16 500	1.89
		N-10	20 000	700	2.86
硼塑料		试验方向 $\varphi=0.0$	70 700	123 900	0.57
		$\varphi=45^\circ$	61 600	99 400	0.62
		$\varphi=90^\circ$	66 700	91700	0.62
混凝土		AΦE-1	700	1 750	0.4
		小细粒	650	1 820	0.36

1.2 国内外研究动态

1.2.1 初始的不同模量理论

最初的不同模量理论是 20 世纪 60 年代由前苏联学者阿巴尔楚米扬 (Амбарцумян С.А.) 提出来的。(早在他之前, 1941 年 Timoshenko 在研究纯弯曲材料时曾提出双模量概念^[2].) 他首先研

究了不同阻抗材料模量不同的弹性理论^[1],接着又研究了圆柱壳轴对称不同模量问题^[3],尔后把双模量思想扩展到二维^[4]及三维空间问题中^[5,6].1975年,Kamiya研究了圆柱弯曲时的双模量理论^[7].1976年,Jones对石墨材料做实验,得出其抗压与抗拉模量之比竟高达4倍^[20].同年,Jones对纯弯曲结构提出正应力分布为折线型^[23].1982年,Medri用泡沫材料作同轴下的实验与理论计算得到 $\frac{\sigma}{E} \sim \varepsilon$ 的曲线在原点处为非直线,而是曲线这一结论^[27].

1980年Nemat-Nssers及1984年Casey先后提出了关于某些金属材料拉压性能不同的本构模型^[14,15].1987年,Sarkisyan研究了不同拉压阻抗各向异性的弹性关系,引入了四个独立的弹性系数^[16].1982年,阿姆巴尔楚米扬发表了第一本关于不同模量弹性问题理论的专著^[17].在专著中,他总结了最初的拉压不同模量概念(见2.2~2.3).然后提出了二维及三维的广义弹性定律.最后推求了单向应力状态下不同模量弹性理论对简单问题的解析解.

1.2.2 各类近似方法的发展

以上的研究虽然在理论上提出了广义弹性定律,但对复合荷载作用下,复杂应力状态下的结构,不同模量理论最困难的就是拉压分界面的确定,因此对该问题,国内外许多学者提出了用试算逼近的近似方法.1975年Kamiya首先提出用能量法及有限差分法来求解计算^[18,22],1977年Jones提出材料矩阵模型^[19].1984年,由Doong等人采用了三角级数表示应变函数的一种近似算法计算双模量的圆板问题^[30].1981年Tabbador及1982年由El-Laithy采用了迭代有限元技术^[28].Sandhu^[32]及Shi^[33]于1982年先后提出增量逼近法.El-Tahan于1987年总结了在Sandhu及Shi的增量法后把该法应用于解决不同模量问题中^[36].同年