

高等学校教学用书

材料力学

上册

杜庆华等编著

高等教育出版社

高等学校教学用书



材 料 力 学

上 册

杜庆华等编著

高等教育出版社

高等学校教学用书



材 料 力 学

下 册

杜庆华等编著

高等教育出版社

本書系由杜庆华、孙訓方、賈有权、張福范等根据清华大学、天津大学、唐山鉄道学院三校历年編写的材料力学講义整理改写后,由杜庆华主編而成,并經高等教育部审定为高等工業学校土建、机械类專業試用教材。

本書分上下册出版。其編写分工如下:杜庆华——第一、二、七§5—11,八、十六、二十一各章;孙訓方——第六、九、十、十四、十九、二十三、二十四各章;賈有权——第三、四、五,七§1—4(苏翼林)、二十、二十二、二十五各章;張福范——第十一、十二、十三、十五、十七、十八各章。

材 料 力 学

上 册

杜庆华等編著

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第051号)

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 15010·557 開本 787×1092 1/16 印張 14 4/8 字數 326,000 印數 0001—9,200
1957 年 12 月第 1 版 1957 年 12 月北京第 1 次印刷 定價(10) 1.80

本書系由杜庆华、孙訓方、賈有权、張福范等教师根据清华大学、天津大学、唐山鉄道学院三校历年編写的材料力学講义整理改写而成，由杜庆华教授主編，并經教育部同意作为高等工業学校土建、机械类專業的試用教材。

本書暫分上下册出版。下册共十一章，闡述構件的强度及剛度計算，靜不定系統的計算基础，彈性地基上的梁，薄壁杆件的扭轉和弯曲，变形系統平衡的稳定問題，动載荷問題等等，并有丰富的例題和圖表。本書除供各高等学校广泛使用外，还可供在职干部學習及工程技術人員参考之用。

材 料 力 学

下 册

杜庆华等編著

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号 15010·729 開本 787×1092¹/₁₆ 印張14⁴/₈
字數 328,000 印數 0001—10,000 定價(10) 羊1.80
1958年9月第1版 1958年9月北京第1次印刷

序

材料力学是各个工程專業有关强度科学的基础課程，它的學習是工程教育中很重要的环节。过去几年来我們在教学中一直采用苏联教材譯本。显然，由于苏联教材內容的丰富和密切联系实际，使我們的教学向前推进了一大步。但是學習苏联必須很好地結合我国实际，我們完全有必要写一本为我国学生易于接受而同时又反映这一門科学最新成就的教材。按高等教育部交下的任务，清华大学、天津大学、唐山鐵道学院根据現有的机械土建和非机械土建类的材料力学教学大綱，在历年編写的原有講义的基础上写成了这本試用教材。

这本教材是三校在精神上和原則上基本上取得一致下，由作者們分写的，因而各个部分仍保留着不同的風格。本書編写的分工如下：杜庆华——第一，二，七 § 5—11，八，十六，二十一章；孙訓方——第六，九，十，十四，十九，二十三，二十四章（徐滑、松驰，賈有权）；賈有权——第三，四，五，七 § 1—4（苏翼林），二十，二十二章，張福范——第十一，十二，十三，十五，十七，十八章。杜庆华負責主編，并由三校材料力学教研組給予了集体大力支持。

由于过去几年我們三校一直使用 Н. М. Беляев 著材料力学（王光远等譯）作为教本，所以本書無疑地受到了它的深刻影响。有几节和圖表是标明引自該書的。但重要的特点是在力求簡易明了的条件下，把每一个問題的最新發展观点用較少的篇幅引进到教材中来。本書也力求注意引用我国和我們自己工作的数据。我們正在繼續努力，希望在下一版中將能更多地表現这些方面。

必須請使用本書的同志注意，全書的內容并不是課堂所必講的。課堂講授的內容可以比本書少得多，而且也可以和本書不尽相同。本書只求能为大学二年級学生提供出這門科学深入的初步門徑而已。

我們原期這本書有三五年的准备時間，但是由于教学的需要和兄弟学校的督促，我們現在提前付印。必須指出由于付印匆促和水平所限，這本書的內容和編排上都存在着缺点，希望讀者能予批評指正。

編著者

上册目录

序	v
---------	---

第一章 緒論

§ 1.1 材料力学的基本任务	1
§ 1.2 材料力学的发展簡史	1

第二章 基本概念

§ 2.1 材料力学的基本方法	5
§ 2.2 材料力学研究的对象: 杆、板、壳	6
§ 2.3 关于变形物体的一些重要基本概念	6
§ 2.4 作用于构件的外力及其分类·变形的形式	11

第三章 直杆的轴向拉伸和压缩

§ 3.1 与杆轴线垂直的諸截面上的应力	13
§ 3.2 轴力图	15
§ 3.3 与杆轴线有傾角的諸斜截面上的应力	15
§ 3.4 轴向变形及横向变形	17
§ 3.5 虎克定律	17
§ 3.6 横向变形系数·拉压时体积改变	19
§ 3.7 拉伸(或压缩)时的变形位能	20
§ 3.8 横截面轴向位移的确定	21
§ 3.9 許用应力·强度条件	22
§ 3.10 杆全长受有均布轴向力之計算	23
§ 3.11 变截面杆	24
§ 3.12 例题	26

第四章 拉伸和压缩时材料强度的研究

§ 4.1 材料力学实验問題	29
§ 4.2 軟鋼的拉伸实验	30
§ 4.3 拉伸时所需之功	33
§ 4.4 其他材料的拉伸圖	34
§ 4.5 真应力圖	35
§ 4.6 压缩实验	35
§ 4.7 材料的硬度和韌度	37
§ 4.8 局部应力的概念·挤压应力	38
§ 4.9 材料的塑性与脆性状态	40
§ 4.10 安全系数及許用应力的确定	40
§ 4.11 温度及加力速度对金属材料机械性质的影响	42
§ 4.12 彈性后效和徐滑的概念	43
§ 4.13 重复应力作用下金属材料的破坏	44

第五章 拉伸和压缩的靜不定問題

§ 5.1 靜不定問題的解法	45
§ 5.2 装配应力	48
§ 5.3 温度应力	51

第六章 剪切

§ 6.1 純剪切时的应力与变形·虎克定律	54
§ 6.2 材料在純剪切时的强度·純剪切的强度条件	56
§ 6.3 純剪切单元体斜截面上的应力	57
§ 6.4 材料的三个彈性常数 E 、 G 、 μ 間的关系	58
§ 6.5 接头部分的“假定計算”	60
§ 6.6 铆接头的“假定計算”	60
§ 6.7 焊接头的“假定計算”	63
§ 6.8 接头部分“假定計算”的例题	64

第七章 应力状态理論

§ 7.1 应力状态举例	69
§ 7.2 二向应力状态下任意斜截面上应力的确定	72
§ 7.3 主应力、主平面及最大剪应力的确定	73
§ 7.4 求应力的圖解法	74
§ 7.5 三向(空間)应力状态及其标号	80
§ 7.6 任意斜截面上的应力	81
§ 7.7 三向(空間)应力状态的主应力	82
§ 7.8 与主方向成等斜角面上的应力,平均正应力和統計平均剪应力	84
§ 7.9 三向应力状态的应力圓	85
§ 7.10 广义虎克定律·体积变形	86
§ 7.11 三向(空間)应力状态下材料的彈性变形位能	88

第八章 强度及塑性理論

§ 8.1 关于强度理論的基本概念	91
§ 8.2 三个古典强度理論	92
§ 8.3 能量强度理論	93
§ 8.4 对于古典理論及歪形能强度理論的修正	94
§ 8.5 莫尔强度理論及其修正	96
§ 8.6 达維靖柯夫及弗里特曼(Н. Н. Давиденков, Я. В. Фридман)联合强度理論的概念	99
§ 8.7 对于强度理論的認識	101

第九章 平面圖形的几何性質

§ 9.1 定义	103
§ 9.2 平面圖形的靜面矩及形心位置	104

§ 9.3 簡單平面圖形的慣性矩	106	§ 9.8 組合的非對稱平面圖形的中心主慣性矩	114
§ 9.4 慣性矩及慣性積的平行軸原理	103	§ 9.9 計算型鋼組合截面慣性矩的例題	116
§ 9.5 組合的對稱平面圖形的慣性矩	109	§ 9.10 慣性半徑・慣性橢圓	117
§ 9.6 坐標軸旋轉時慣性矩及慣性積的變化(慣性矩及慣性積的旋轉軸原理)	111	§ 9.11 計算不規則平面圖形慣性矩的近似法	119
§ 9.7 平面圖形的主慣性軸及主慣性矩	113	§ 9.12 幾種常用的平面圖形之幾何性質	122

第十章 扭轉

§ 10.1 等直圓杆在扭轉時的應力計算	124	§ 10.7 變截面的圓軸在扭轉時的應力集中問題	138
§ 10.2 等直圓杆在扭轉時斜截面上的應力狀態	127	§ 10.8 非圓截面等直杆在純扭轉時的應力及變形 計算公式	140
§ 10.3 等直圓杆在扭轉時的變形與變形位能	128	§ 10.9 薄壁截面杆在純扭轉時的應力及變形	143
§ 10.4 實心和空心圓軸的強度條件和剛度條件	129	§ 10.10 薄膜比拟法的概念	145
§ 10.5 圓截面傳動軸的設計	132		
§ 10.6 密閉螺旋彈簧的應力及變形	134		

第十一章 梁的彎曲・剪力與彎矩

§ 11.1 梁・支座的種類	147	§ 11.5 剪力、彎矩與載荷強度之間的關係	157
§ 11.2 梁的類型・集中載荷與分布載荷・支座反力的計算	148	§ 11.6 應用微分關係繪制並校核圖形	159
§ 11.3 梁的橫截面內的內力・剪力與彎矩	150	§ 11.7 作圖的疊加法	161
§ 11.4 彎矩圖與剪力圖	154	§ 11.8 彎矩圖與剪力圖的圖解法	162

第十二章 梁的應力

§ 12.1 梁的正應力	165	§ 12.8 梁的剪應力的強度計算	178
§ 12.2 一般梁的計算・強度設計	168	§ 12.9 梁的主應力及主應力迹綫	178
§ 12.3 梁的截面的經濟形狀	171	§ 12.10 以主應力校核梁的強度	181
§ 12.4 矩形截面梁的剪應力	172	§ 12.11 薄壁截面的彎曲中心	182
§ 12.5 由於剪應力的作用梁橫截面的翹曲	175	§ 12.12 梁的變形能	185
§ 12.6 圓截面梁的剪應力	175	§ 12.13 等強度梁	186
§ 12.7 工形截面的剪應力	177	§ 12.14 組合梁	188

第十三章 梁的變形

§ 13.1 梁的撓度曲綫的微分方程	191	§ 13.6 以疊加法計算梁的變形	212
§ 13.2 撓度曲綫的微分方程的積分	193	§ 13.7 梁的剛度設計	213
§ 13.3 以起始參數法計算梁的撓度曲綫・通用方程	197	§ 13.8 變截面梁的變形	214
§ 13.4 圖解分析法解梁的撓度和斜度	205	§ 13.9 梁的理論的發展簡史	216
§ 13.5 撓度曲綫的圖解法	209		

附 錄	1—10
-----------	------

下 册 目 录

第十四章 在任意载荷作用下构件的强度计算

§14.1 杆在任意载荷作用下的应力计算方法	217	§14.6 受偏心拉伸(或压缩)的杆的应力计算及强度校核	227
§14.2 杆在斜弯曲情况下的应力及变形计算	218	§14.7 截面核心	230
§14.3 斜弯曲情况下梁的强度校核	222	§14.8 受扭转与弯曲联合作用的杆的强度校核	233
§14.4 杆在不同平面内的横向力作用下的弯曲问题	224	§14.9 曲柄轴的强度校核	237
§14.5 受弯曲与拉伸(或压缩)联合作用的杆的强度校核	225		

第十五章 任意载荷作用下杆件的刚度计算

§15.1 拉伸、扭转与弯曲的变形能计算	240	§15.4 卡氏定理	248
§15.2 变形能的一般算式·克拉贝依隆原理	241	§15.5 功的互等定理	251
§15.3 莫尔定理	243		

第十六章 静不定系统·力法

§16.1 静不定系统的一般概念	253	算的校核	262
§16.2 基本系统·解静不定问题的基本方法	254	§16.6 连续梁	263
§16.3 正则方程式	256	§16.7 三弯矩方程式	264
§16.4 最小功原理	261	§16.8 支座高度不准确的影响	267
§16.5 温度对于静不定系统的影响·静不定系统			

第十七章 弹性地基上的梁

§17.1 一般概念	269	§17.4 半无限长梁	272
§17.2 挠度曲线的微分方程及其解	269	§17.5 有限长梁	274
§17.3 无限长梁	270		

第十八章 薄壁杆件的扭转和弯曲

§18.1 薄壁杆件的定义	280	§18.6 薄壁杆件约束扭转的剪应力	291
§18.2 自由扭转与约束扭转的概念	280	§18.7 薄壁杆件约束扭转的微分方程及其积分	294
§18.3 截面的几何性质	281	§18.8 薄壁杆件在复杂抗力的一般情况下的应力计算	296
§18.4 扭转中心与弯曲中心	285		
§18.5 基本假设·约束扭转的正应力算式	287		

第十九章 平面曲杆的强度及刚度计算

§19.1 平面曲杆的平面弯曲问题	301	§19.4 平面曲杆在平面弯曲时的强度条件	310
§19.2 平面曲杆在纯弯曲时的正应力公式	302	§19.5 计算曲杆在平面弯曲时正应力的另一方法	312
§19.3 中性层曲率半径 r 及截面形心到中性层距离 y_0 的计算	305	§19.6 平面曲杆弯曲正应力公式的讨论	313
		§19.7 平面曲杆弯曲变形的计算	315

第二十章 厚壁圆筒与薄壁容器

§20.1 计算厚壁筒应力与位移的方程式	317	§20.4 薄壁容器的应力计算	326
§20.2 各种受力情况下厚壁筒之应力及位移的计算	320	§20.5 容器联接环的计算	328
§20.3 组合筒的计算	322		

第二十一章 变形系统平衡的稳定问题

§21.1 稳定的平衡和不稳定的平衡	330	计算	339
§21.2 求临界力的欧拉公式	332	§21.5 压杆的稳定校核	344
§21.3 端点条件对临界力的影响	334	§21.6 稳定计算的一些特殊性质和它的实际意义	349
§21.4 欧拉公式的应用限度和超出弹性范围的稳定		§21.7 纵横弯曲的概念及强度校核	351

第二十二章 动载荷问题

§21.8 侧稳定和其他稳定概念	355	§22.7 振动时应力的计算	368
§21.9 稳定计算的发展	356	§22.8 撞击时应力的计算	372
§22.1 一般概念	358	§22.9 撞击应力的计算实例	374
§22.2 构件作等加速运动时应力的计算	359	§22.10 考虑被撞击之弹性体系的质量时撞击应力的计算	376
§22.3 构件作等速转动时应力的计算	360	§22.11 撞击物自身应力之计算	378
§22.4 连杆和摇杆内的应力	361	§22.12 撞击时材料机械性质的实验研究	380
§22.5 直杆的自然振动频率	362		
§22.6 旋转轴的共振·临界速度	367		

第二十三章 交变应力下构件的强度计算

§23.1 基本概念	385	限曲线	400
§23.2 交变应力的符号及其循环特性	385	§23.8 材料与构件的简化持久极限曲线及计算公式	403
§23.3 在交变应力下构件疲劳破坏的现象	387	§23.9 拉伸-压缩、弯曲或扭转的交变应力下构件的强度校核	405
§23.4 对交变应力下材料破坏原因的假说	389	§23.10 弯-扭组合交变应力下构件的强度计算	410
§23.5 材料的持久极限及其测定方法	392	§23.11 在不稳定的交变应力下按强度条件及按持久寿命计算构件的方法	413
§23.6 影响材料持久极限的主要因素	395		
§23.7 非对称循环下持久极限的变化规律·持久极限			

第二十四章 考虑材料的塑性时杆件的计算

§24.1 按承载能力计算静不定杆系	415	§24.5 高温下的塑性变形·徐滑试验	426
§24.2 按承载能力法计算受扭转的圆轴	418	§24.6 徐滑时许用应力的确定	429
§24.3 按承载能力法计算静定梁	420	§24.7 应力松弛	433
§24.4 按承载能力法计算连续梁·关于塑性铰的概念	423		

附录 1. 函数 η 、 η_1 、 η_2 和 η_3 的数值	436
--	-----

附录 2. 计算弹性地基上的等截面梁用的院士阿·恩·克雷洛夫的函数表	438
------------------------------------	-----

附录 3. A. 工字形压延断面的属性几何特性	443
B. 槽形压延断面的属性几何特性	444

第十四章 在任意載荷作用下構件的強度計算

§ 14.1. 杆在任意載荷作用下的應力計算方法

在以前各章中已討論了杆在載荷作用下發生拉伸、壓縮、剪切、扭轉和彎曲五種基本形式的變形時，計算其橫截面上應力的方法。實際上，大多數的杆在載荷作用下往往同時發生兩種以上的變形，例如機器上的傳動軸和曲柄軸是在彎曲和扭轉的聯合作用下工作的，擋土牆除了受本身重量的壓縮外還受土壓力的作用而發生彎曲等（見圖 14.1）。

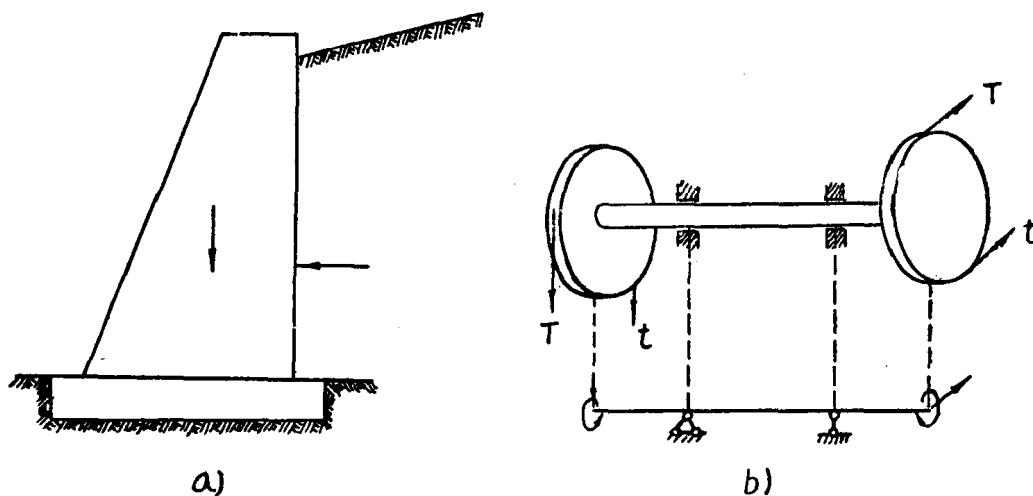


圖 14.1

在任意載荷作用下，杆將同時發生兩種以上的基本變形，按杆所發生的變形情況，在本章中將討論以下諸問題：

- (1) 斜彎曲，以及兩個主平面內彎曲的聯合作用；
- (2) 彎曲與拉伸或壓縮的聯合作用，偏心拉伸或壓縮；
- (3) 彎曲與扭轉的聯合作用，彎曲、扭轉與拉伸或壓縮的聯合作用。

在這一類問題的計算中，通常是利用生文南原理和力作用的迭加原理，將作用在杆上的任意載荷簡化為一系列與其相當的載荷，每一個載荷僅產生一種基本形式的變形；分別求出每一個載荷在構件橫截面上所產生的應力，然後由力作用的迭加原理求出橫截面上總的應力即等於原來的載荷所產生的應力。必須指出，這種方法的應用是受到一定限制的，首先，在載荷作用點的鄰近截面上不能用此方法計算應力（因為生文南原理只適用於離載荷作用點較遠的截面處）；其次，在力作用的迭加原理不能應用的某些情況中（例如細長杆同時受縱向力和橫向力而彎曲時）也不能應用此種方法。

在計算任意載荷作用下棱體杆任意橫截面上[例如圖 14.2, a) 的 mn 截面]的應力時，可以用所研究的橫截面將杆假想地截開為兩部分，棄去其左半而研究其留下的右半；作用在留

下部分上的外力可以简化到横截面 mn 的形心处从而变成三个通过截面形心的力 N, Q_y, Q_z 和三个力偶 M_k, M_y^H, M_z^H [图 14.2, b)], 其中 x 轴与棱体杆的轴线(横截面形心连线)重合, y, z 两轴则为横截面的两个中心主惯性轴。每一个力或力偶均只产生一种基本形式的变形。与此六个简化后的外力相对应的变形形式、内力素[参看图 14.2, c)]以及横截面上的应力计算公式可以参看表 14.1。根据这些应力计算公式,利用力作用的迭加原理,即可求出横截面上任意一点的应力,作为强度计算的根据。

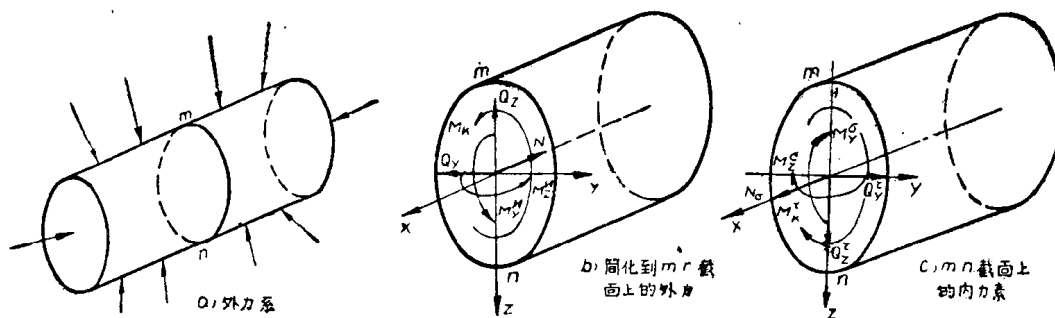


图 14.2

表 14.1

简化到横截面形心上的外力	相应的内力素	相应的变形	横截面上应力的计算公式
$N = \sum X$	轴 力 N_σ	拉 伸 或 压 缩	$\sigma = \frac{N}{F}$
$Q_y = \sum Y$	剪 力 Q_y^τ	主平面 xy 内的剪切	$\tau_y = \frac{Q_y S_{(y)}}{J_z b_{(y)}}$
$Q_z = \sum Z$	剪 力 Q_z^τ	主平面 xz 内的剪切	$\tau_z = \frac{Q_z S_{(z)}}{J_y b_{(z)}}$
$M_k = \sum M_x$	扭 矩 M_k^τ	扭 转	$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} (\text{圆截面})$
$M_y^H = \sum M_y$	弯 矩 M_y^σ	主平面 xz 内的弯曲	$\sigma = \frac{M_y z}{J_y}$
$M_z^H = \sum M_z$	弯 矩 M_z^σ	主平面 xy 内的弯曲	$\sigma = \frac{M_z y}{J_z}$

§ 14.2. 杆在斜弯曲情况下的应力及变形计算

当垂直于杆轴线的横向力的作用平面并不与杆的主平面(即通过横截面的一个中心主轴而与横截面垂直的平面,例如图 14.2 中的 xy 和 xz 平面)重合时,实验结果指出:弯曲后杆的轴线(挠曲线)已经不在外力的作用平面上了,这种弯曲即被称为斜弯曲,屋面上的桁条是斜弯曲的典型例子(图 14.3)。

斜弯曲可以看成是两个平面弯曲的联合作用,因此,只要将斜弯曲分解为两个主平面内的平面弯曲,分别计算在两个平面弯曲中横截面上任意一点 c 的正应力,再利用力作用的迭加原理求出两个正应力的代数和,即等于在斜弯曲情况下横截面上 c 点的正应力 [图

14.4, a)], 并且从而可确定横截面上的最大正应力。以同样的道理分别算出两个平面弯曲情况中的挠度, 按力作用的迭加原理算出其向量和, 即可求出在斜弯曲情况中的最大挠度。

下面以一端固定, 另一自由端承受集中载荷 P 的椭圆截面直梁的斜弯曲为例 (图 14.4), 来说明斜弯曲时梁的横截面上正应力和梁的变形的计算方法。

假定载荷 P 作用在自由端截面的形心 B 上, 其方向与截面的中心主轴之一的 z 轴成 φ 角, 假定 yz 坐标轴的选择方法是使 P 力恒在坐标系的第一象限内。现在将 P 力分解为沿 y 轴和 z 轴方向的两个力 P_y 和 P_z , 其值为:

$$P_y = P \sin \varphi, \quad P_z = P \cos \varphi.$$

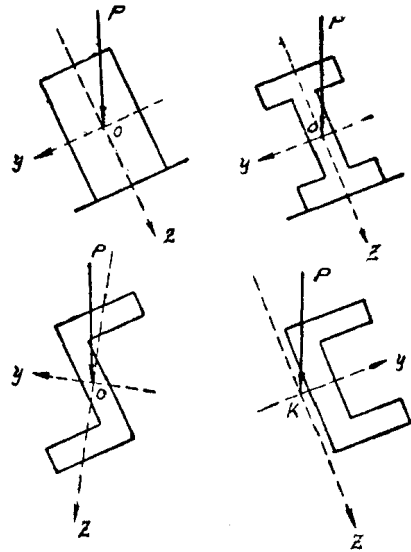


图 14.3

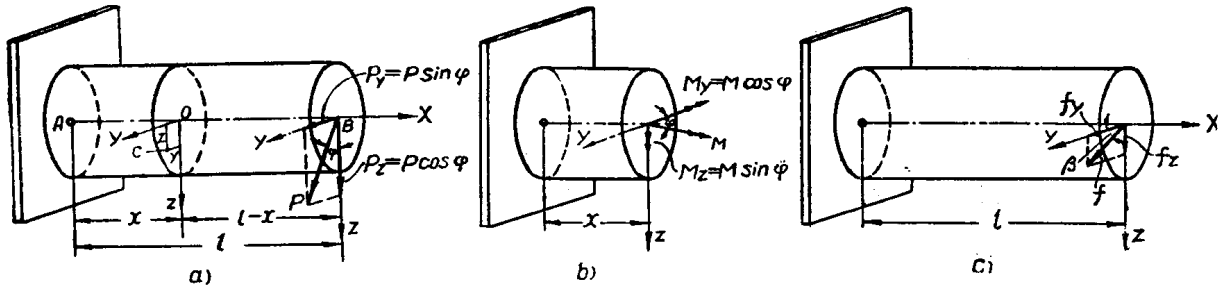


图 14.4

P_y 和 P_z 两力将使梁分别在两个主平面 xy 和 xz 内发生平面弯曲。在任意 x 截面上由于这两个力所引起的弯矩将等于

$$\left. \begin{aligned} M_z &= P_y \cdot (l-x) = P \cdot \sin \varphi \cdot (l-x) = M \sin \varphi; \\ M_y &= P_z \cdot (l-x) = P \cdot \cos \varphi \cdot (l-x) = M \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

其中: $M = P(l-x)$ 代表在 P 力作用平面内的弯矩。显然弯矩 M_y 和 M_z 同样也可以通过向量分解的方法将弯矩 M 分解到两个主轴方向以求得 [图 14.4, b)]。

在 x 截面上任意一点 $c(+y, +z)$ 处的正应力, 可以分别地按两个平面弯曲来计算:

$$\text{由于 } M_y \text{ 的作用} \quad \sigma' = -\frac{M_y \cdot z}{J_y} = -\frac{M \cos \varphi \cdot z}{J_y},$$

$$\text{由于 } M_z \text{ 的作用} \quad \sigma'' = -\frac{M_z \cdot y}{J_z} = -\frac{M \sin \varphi \cdot y}{J_z},$$

上式中的负号是因为在 c 点 $(+y, +z)$ 处由于 M_y 和 M_z (均为正值弯矩) 所引起的正应力均为压应力的缘故。

它们的代数和即等于梁在斜弯曲情况下由于弯矩 M 所引起的 x 截面上 c 点处的正应力:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -M \left[\frac{z \cos \varphi}{J_y} + \frac{y \sin \varphi}{J_z} \right], \quad (14.2)$$

上式中 J_y 和 J_z 依次代表横截面对 y 轴及 z 轴的惯性矩。由于将 P 力放在 yz 坐标系的第一

一象限中, 因此可以认为 M 和 φ 均为正值, 用(14.2)式计算任一点的正应力时只需将该点的 y, z 坐标的代数值代入, 即可得到该点的正应力, 正值代表拉应力而负值则代表压应力。

(14.2) 式虽然是根据一端固定, 另一自由端受集中载荷作用的梁在斜弯曲情况下所导出的, 但同样可用于其他支座形式及载荷情况的梁中, 为了保证 (14.2) 式的符号正确, 必须选择 yz 坐标轴位置, 使载荷恒作用在 yz 坐标系的第一象限内。

既知横截面上任意一点的正应力, 即可进一步确定横截面上的最大正应力所在点的位置及其数值。由于斜弯曲可以看成是两个平面弯曲的联合作用, 而在平面弯曲时会假定横截面象刚性平面一样地绕中性轴旋转(变形的平面假设), 因此, 在两个平面弯曲的联合作用下, 横截面将绕两个中性轴旋转, 根据理论力学中的原理可知, 其组合的效果即相当于横截面绕通过此两中性轴交点的另一轴旋转, 这个轴也就是在斜弯曲情况下横截面上的中性轴, 或称为零应力线。既然在斜弯曲情况下横截面也象刚性平面一样地绕其零应力线旋转, 因此, 横截面的任意点的正应力均与该点到零应力线的垂直距离成正比, 换言之, 即沿横截面上任一直线上各点的正应力均按直线规律变化(图

14.5)。这样, 就可以得到如下的结论: 离零应力线垂直距离最远的点其正应力为最大。因此, 要确定最大正应力所在点的位置及其数值, 首先应该确定零应力线的位置。据定义, 零应力线上各点的正应力均等于零, 因此, 若令 (y_0, z_0) 为零应力线上任意一点的坐标, 则有如下条件:

$$(\sigma)_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} = -M \left[\frac{z_0 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_0 \sin \varphi}{J_z} \right] = 0,$$

从而得到零应力线的方程式:

$$\frac{\cos \varphi}{J_y} \cdot z_0 + \frac{\sin \varphi}{J_z} \cdot y_0 = 0; \quad (14.3)$$

(14.3) 式是一条通过坐标原点的直线, 它与 y 轴间的夹角 α 值可以由下式算出

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z}, \quad (14.4)$$

上式中的负号表示 α 角是在 yz 坐标系中的第二象限内(图 14.5)。

既知零应力线的位置, 即可作与零应力线平行的线使与横截面的周边相切, 以确定离零应力线垂直距离最远点的位置(即最大正应力所在点), 例如图 14.5 中的 1、2 两点。该两点处的正应力分别为横截面上的最大拉应力和最大压应力。将两点坐标的代数值 (y_1, z_1) 、 (y_2, z_2) 代入公式(14.2), 即得横截面上的最大拉应力和最大压应力。在图 14.5 所示之例中:

$$\left. \begin{aligned} \text{最大拉应力在 1 点}(y_1, z_1 \text{ 均为负值}): \quad \sigma_{\max} = \sigma_1 &= -M \left[\frac{z_1 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \sin \varphi}{J_z} \right]; \\ \text{最大压应力在 2 点}(y_2, z_2 \text{ 均为正值}): \quad \sigma_{\max} = \sigma_2 &= -M \left[\frac{z_2 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_2 \sin \varphi}{J_z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

上述方法及公式可以用来确定在斜弯曲情况下任意形状的横截面上(例如图 14.6 所示的钢轨截面)的最大应力。

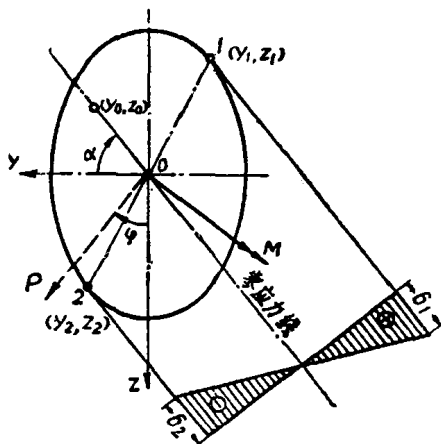


图 14.5

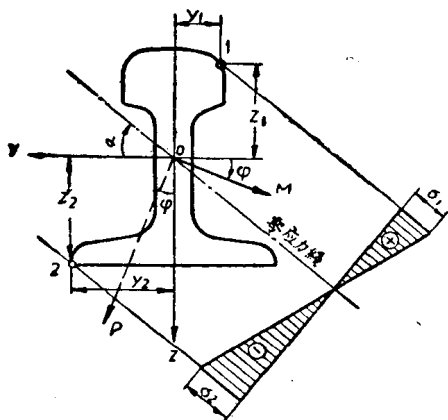


图 14.6

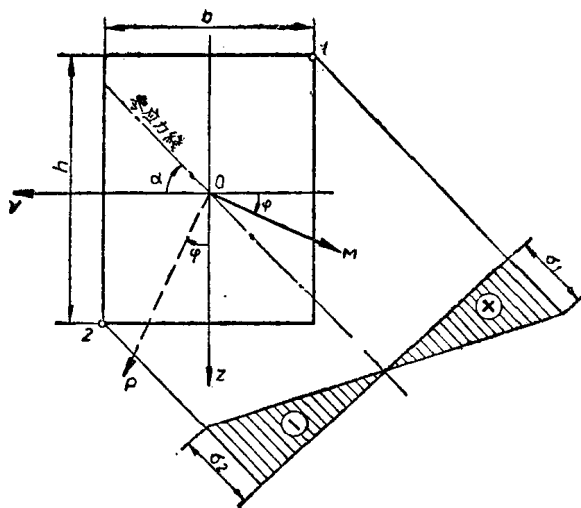


图 14.7

在图 14.7 所示的矩形截面中, 将 1, 2 两点的坐标值代入 (14.5) 式可得:

$$\left. \begin{aligned} p\sigma_{\max} = \sigma_1 &= -M \left[\frac{-\frac{h}{2} \cos \varphi}{J_y} + \frac{-\frac{b}{2} \sin \varphi}{J_z} \right] = M \left[\frac{\cos \varphi}{W_y} + \frac{\sin \varphi}{W_z} \right] = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}; \\ c\sigma_{\max} = \sigma_2 &= -M \left[\frac{\frac{h}{2} \cos \varphi}{J_y} + \frac{\frac{b}{2} \sin \varphi}{J_z} \right] = -M \left[\frac{\cos \varphi}{W_y} + \frac{\sin \varphi}{W_z} \right] = -\left[\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right]. \end{aligned} \right\} (14.6)$$

讀者可自行証明, 在具有棱角的对称截面中 (例如矩形、工字形等截面) 最大正应力恒发生在 yz 坐标系的第一三象限的頂角处 (当载荷作用在第一象限时), 而且其值恒可由公式 (14.6) 来計算。必須指出, 对于沒有棱角的截面决不可以用公式 (14.6) 来計算最大正应力。

在两个中心主慣性矩相等的截面中 (即 $J_y = J_z$), 例如圓形、正方形、环形截面等, 由 (14.4) 式可算出其零应力綫与 y 軸間的夹角 α 的正切值:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

由此可知, 零应力綫垂直于外力的作用平面。这就是說, 在这一类截面中, 不論载荷作用在哪个平面內均将发生平面弯曲而不会发生斜弯曲。因此, 对于这类截面可以直接按平面弯曲公式进行計算。事实上, 在 $J_y = J_z$ 的截面中, 任何通过截面形心的軸均为中心主軸 (可以由公式 9.21 推导出), 因此, 根本就沒有发生斜弯曲的可能。

在斜弯曲中計算剪应力的方法, 显然也同样地可以采用分別計算两个平面弯曲情况中的剪应力, 然后按迭加原理算出其几何和来 (因为两个剪应力方向互相垂直)。但由于在斜弯曲情况下剪应力的数值往往很小, 在实际运算中是不考虑剪应力强度条件的, 因此这种計算沒有实用价值, 这里就不加討論了。

最后来研究斜弯曲情况下挠度的計算。仍以图 14.4 所示之梁为例, 要計算梁自由端的挠度, 首先还是把 P 力分解成 P_y 和 P_z 两个分力, 然后計算在这两个分力作用的平面弯曲中, 梁在自由端的挠度 f_y 和 f_z , 最后求出它們的向量和, 即得斜弯曲时的总挠度 f 。由平面弯曲中的公式可知:

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P \sin \varphi l^3}{3EJ_z}; \quad f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P \cos \varphi l^3}{3EJ_y};$$

梁自由端的总挠度等于:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{J_z}{J_y}\right)^2 \cos^2 \varphi}. \quad (14.7)$$

上式同样可以用以计算其他载荷方式和支座情况下的梁在斜弯曲时的总挠度, 只需将根号前面的系数改变为相应于各种支座和载荷情况下在 xy 平面内发生平面弯曲时的挠度值即可。

由 f_y 和 f_z 的数值还可以算出总挠度与 y 轴间的夹角 β [图 14.4, c)] 的数值:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (14.8)$$

由此证明了在斜弯曲情况下挠曲线所在平面与载荷的作用平面是不重合的, 因为只有当 $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \varphi$ 时才意味着两者的重合。

由公式(14.4)知道零应力线 with y 轴间的夹角 α 是由

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi$$

来计算的。从而得:

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \left(-\frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi\right) = -1;$$

由此可知零应力线仍旧是与梁的挠曲线所在平面垂直的。

§ 14.3. 斜弯曲情况下梁的强度校核

根据(14.5)式可以进行在斜弯曲情况下梁的强度校核。首先, 应该确定最大弯矩所在截面的位置及最大弯矩值 $M_{\max}$, 然后将 $M_{\max}$ 值代入(14.5)式即可得到在斜弯曲情况下梁的横截面上的最大正应力。在材料的拉压强度不等的情况下, 可得出如下两强度条件:

$$\left. \begin{aligned} \rho \sigma_{\max} &= -M_{\max} \left[\frac{z_1 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \sin \varphi}{J_z} \right] \leq [\sigma]_{\rho}, \\ |\sigma_{\max}| &= \left| -M_{\max} \left[\frac{z_2 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_2 \sin \varphi}{J_z} \right] \right| \leq [\sigma]_{\sigma_{\max}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

在材料的拉压强度相等的情况下, 只需利用上式中的一个强度条件即足。

在一般工程中常用的截面多半是有棱角的对称截面(例如图 14.8 中的诸截面), 在这一类截面中的最大拉应力与最大压应力相等, 且可由(14.6)式来计算:

$$\rho \sigma_{\max} = \pm \left[\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \right]. \quad (14.6)$$

同时, 常用的梁均为钢制, 其拉伸与压缩

的许用应力是相等的, 因此, 对于这一类构件的强度条件可以写为

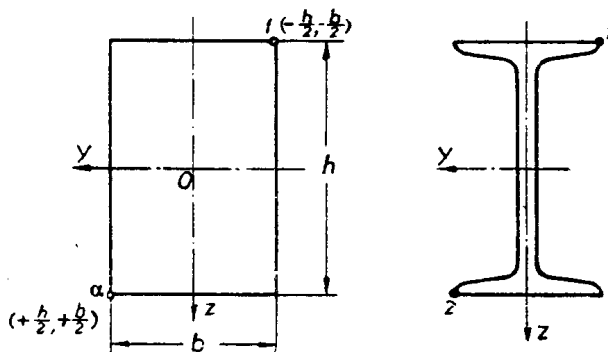


图 14.8

$$\rho\sigma_{\max} = \left[\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \right] \leq [\sigma]_{\rho}; \quad (14.10)$$

或简化为

$$\frac{M_{y\max}}{W_y} \left[1 + \frac{W_y}{W_z} \operatorname{tg} \varphi \right] \leq [\sigma]_{\rho}, \quad (14.11)$$

其中 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{z\max}}{M_{y\max}}$ [参看图 14.4, b)]。

由以上强度条件可知, 在斜弯曲情况下选择截面是较为困难的, 因为在强度条件中包括了两个未知的抗弯截面模数。若按(14.11)式选择截面则可以较为简便。

在矩形截面中(图 14.8)

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{\frac{1}{8}bh^2}{\frac{1}{8}b^2h} = \frac{h}{b},$$

因此, 只要知道 h 与 b 的比值即可确定 $\frac{W_y}{W_z}$ 的比值, 从而可按(14.11)式直接选择截面尺寸。

在工字钢及槽钢的截面选择中, 可以根据以下的 $\frac{W_y}{W_z}$ 近似值:

$$\text{工字钢截面} \quad \frac{W_y}{W_z} \doteq (8 \sim 10),$$

$$\text{槽钢截面} \quad \frac{W_y}{W_z} \doteq (6 \sim 8).$$

利用公式(14.11)初步选择一个截面, 然后再按所用截面实际的 $\frac{W_y}{W_z}$ 比值代入公式(14.11)进行核算, 通常经过一两次试算后即可最后确定所用截面的号码。

例题 14.1 跨度为 4m 的工字钢梁, 两端简支, 在梁跨的中点承受 $P = 2\text{T}$ 的集中载荷作用, 载荷平面与截面主轴 z 间的夹角为 $\varphi = 15^\circ$ (图 14.9)。钢的许用应力为 $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ 。选择此工字钢的号码, 并计算其最大挠度。

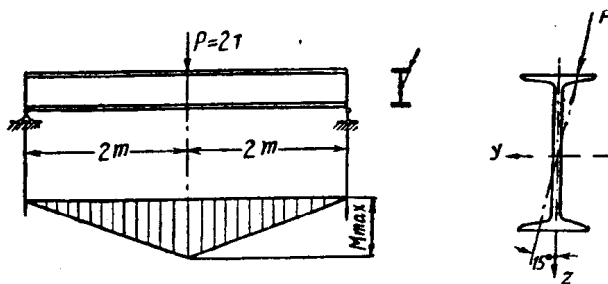


图 14.9

解: 在载荷平面内, 梁的最大弯矩在集中载荷作用的截面处:

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Pl = \frac{1}{4} \times 2000 \times 400 = 200000 \text{ kg-cm}.$$

在主平面 oz 内的最大弯矩为

$$M_{y\max} = M_{\max} \cdot \cos \varphi = 200000 \cos 15^\circ = 193000 \text{ kg-cm}.$$

先假定工字钢的 $\frac{W_y}{W_z} = 6$, 由强度条件(14.11)得:

$$W_y \geq \frac{M_{y\max}}{[\sigma]} \left[1 + \frac{W_y}{W_z} \operatorname{tg} \varphi \right] = \frac{193000}{1600} [1 + 6 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ] = 315 \text{ cm}^3.$$

由工字钢表查得 22b 工字钢:

$$W_y = 325 \text{ cm}^3; \quad W_z = 42.7 \text{ cm}^3; \quad \frac{W_y}{W_z} = \frac{325}{42.7} = 7.62.$$