

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 37



轴向运动弦线横向振动的 数值方法和动力学分析

● 作者：赵维加

● 专业：一般力学与力学基础

● 导师：陈立群



上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 37



轴向运动弦线横向振动的 数值方法和动力学分析

- 作者：赵维加
- 专业：一般力学与力学基础
- 导师：陈立群



A Dissertation Submitted to
Shanghai University for the Degree
of Doctor in Engineering (2005)

Numerical Methods and Dynamical Analysis of the Transverse Vibrations of Axially Moving Strings

D. D. Candidate: Zhao Weijia

Supervisor: Chen Liqun

Major: General Mechanics and Mechanical foundation

Shanghai University Press

• Shang hai •

摘 要

轴向运动弦线是一种重要的工程元件,也是力学理论的研究中的重要模型。其横向振动的研究有重要的理论意义和明确的工程背景。本文的主要目的是发展和改进基于轴向运动弦线的动力学模型的数值方法,利用计算机模拟方法研究运动弦线的横向非线性振动。

论文在第一章简要介绍近 50 年来轴向运动弦线的横向振动的有关研究的进展,包括非线性轴向运动弦线的动力学模型的建立、轴向运动弦线的能量分析和守恒量的研究、轴向运动弦线横向振动的分析方法和轴向运动弦线系统的参数振动分析等内容。

第二章对轴向运动弦线的动力学模型和守恒量进行了研究,首先利用分数导数描述黏弹性弦线的本构关系,建立了相关的运动弦线的动力学模型。并利用卷积符号给出含有积分项的不同模型如积分本构模型和分数导数本构模型的统一表示。分析了黏弹性本构弦线系统的三种重要模型:微分本构模型、积分本构模型和分数导数本构模型的形式相似和内在的区别。这一章还针对轴向运动弹性弦线模型和弹性梁模型导出并研究了弹性弦线和弹性梁轴向运动过程中的运动守恒量,利用导出的守恒量证明了当弹性弦线或弹性梁的轴向运动速度低于临界速度时,其横向振动关于初值稳定。

第三章对基于非线性轴向运动弦线横向振动模型的 Galerkin 方法的算法设计和精度分析进行研究。Galerkin 方法

是广泛应用的数值方法之一,但利用 Galerkin 方法对轴向运动弦线系统模型的状态变量作数值离散得到的常微分方程组含有大量的以积分形式出现的非线性项,成为计算的很大障碍。本文对利用 Galerkin 方法离散得到的常微分方程组的非线性项的系数进行了分析。考虑到方程组的系数虽然不是稀疏的,但有大量的零和重复项,文中采用下标重排的方法消去值为零的项,合并重复项,大大减少了计算量,并利用简单的数值程序生成了离散方程组的系数矩阵和系数张量,为利用 Galerkin 方法分析轴向运动弦线的非线性振动提供了方便。这一章还利用第二章导出的守恒量给出了分析 Galerkin 方法数值计算精度的一种方法,利用这种方法给出了不同截断阶的 Galerkin 方法的精度比较,非线性项的增大对截断误差的影响,以及轴向运动速度超过临界速度时 Galerkin 方法的精度分析。

第四章利用数值方法研究黏弹性轴向运动弦线微分本构模型的参数振动。这一章首先基于微分本构模型建立了两种相应的数值方法:第一种是半离散的差分方法;方法的特点是对动力学方程和微分本构方程分别离散,因此可以用于不同微分本构模型,且适用于非线性项较大的情况,但计算量较大。第二种是适用于标准本构模型直接差分法;利用标准本构模型的特殊结构,通过对动力学控制方程和微分本构方程在不同的分数节点上作中心差分离散,形成了两组可以交替迭代的线性差分方程组,这样就把非线性问题离散为交替迭代的线性问题,大大减少了计算量,而且方法保持了截断误差为二阶和对较小的非线性项的好的稳定性。利用上述算法对不同模型的适应性,这一章研究了不同微分本构模型的参数振动,并对不

同本构关系的动力学模型进行了比较和分析。

第五章利用数值方法研究积分本构黏弹性轴向运动弦线的横向振动。基于计算稳定性和计算精度的考虑,采用有限元方法对空间变量进行离散。由于离散得到含有大量积分区间为 $[0, t]$ 的积分项的大型常微分/积分方程组,利用目前普遍采用的算法,随着时间 t 的增大,每一时间步的数值计算工作量显著增加且计算精度下降,因此积分项的数值求解成为计算的关键问题之一。在这一章中,针对积分本构模型的特点,建立了两个时间步之间所有的积分项组成的张量之间的递推计算公式,在计算过程中利用简单的代数迭代运算代替了数值积分公式计算积分项组成的张量,使得计算量大大减少且计算精度明显提高。这一章以三参数黏弹性弦线模型为例,利用上述数值方法得到的数值解分析了积分本构黏弹性轴向运动弦线的参数振动,包括瞬态振动和稳态振动。研究了不同参数的变化对系统振动的影响,以及当轴向运动速度超过临界速度时系统的稳定性等。

第六章研究分数导数本构黏弹性轴向运动弦线的横向振动。由于分数导数本构模型中的积分算子是广义积分,不能直接利用递推关系简化运算。本文利用分离奇点,对积分核作线性最小二乘逼近等方法,把模型化成可以递推的结构,建立了相应的递推方法。利用递推的方法,研究了分数导数本构黏弹性轴向运动弦线的参数振动,分析了速度、张力和材料参数的变化对系统振动的影响。

关键词: 轴向运动弦线,黏弹性,非线性,偏微分/积分方程,数值方法,振动分析

Abstract

An Axially moving string is an important mechanical model both in engineering design and in the study of mechanics. The main purpose of this dissertation is to develop numerical algorithms based on the dynamical models of a moving viscoelastic string; and analyze transverse nonlinear vibrations through computer simulations. The main approach adopted in this dissertation is numerical analysis.

In the first chapter, a brief review of the recent progresses is surveyed on the relative topics including the dynamical models of an axially moving string and the conservative quantities and energy formulations, the numerical methods for simulating the transverse vibrations of an axially moving string, and the nonlinear vibration analysis of moving strings.

In chapter two, dynamical models of an axially moving string and their conservative quantities are investigated. Fractional derivatives and fractional integrals are employed to describe the constitutive law of a viscoelastic axially moving string, and dynamical models obeying the constitutive law are deduced. By means of convolution product, the integral constitutive model and the fractional differential constitutive model for axially moving viscoelastic strings are described in a united way. Conservative quantities of axially moving elastic

strings and beams are also found in this chapter. Several conservative quantities with their applications both in theory and in numerical computation are presented.

In chapter three, the Galerkin's method for transverse vibrations of axially moving strings is analyzed. Although Galerkin's method is one of the most useful approaches in the numerical studies, the discretization of the state variable leads to a large nonlinear differential equation system, and the great number of nonlinear terms of which causes a heavy computational burden. Since there are similar terms and zero-coefficient terms in the equations, efficient algorithms are designed to regroup the like terms and omit the zero-coefficient terms, which makes the resulting Galerkin's truncated equations much simpler. Computer algorithms are provided to generate the coefficients of the truncated equations and numerical examples of high order Galerkin's method are given. Based on the conservative quantities derived in chapter two, a method for estimating the numerical errors of the Galerkin's method is given, and the error of the Galerkin's method is analyzed.

In chapter four, the nonlinear transverse vibrations of axially moving viscoelastic strings obeying the differential constitutive laws are studied. Two finite difference methods are proposed to numerically simulate the model. One is a semi-discrete method, which can be used to deal with different linear constitutive models such as the standard model and the Maxwell-Kelvin Model. The other, an alternating difference

method for the standard model, discretizes the governing equation and the differential constitutive equation at different fractional nodes, so the nonlinear partial differential equation system is approximated by two linear finite difference operators alternatively used in numerical computation. The method is not only simple in computation, but also stable and precise. The parametric vibrations of an axially moving string are studied via the algorithms.

In chapter five, we study the nonlinear transverse vibrations of an axially moving viscoelastic string obeying the integral constitutive law. Using finite element method or Galerkin's method to the state variables of the model leads to a large differential/integral equation system, which result in a heavy task of computation while time t is large. To reduce the amount of the computation, an iterative process of the integral terms is designed, by which the integral terms are computed in a simple iterative process instead of a large number of numerical integrations at each time step. The new method not only greatly reduces the amount of computation, but also increases the precision. Using the numerical approach, the parametric vibrations of the axially moving string with integral constitutive model are analyzed, including transient vibration and long time vibration, the effects of the axially velocity and the tension on moving strings, and the stability of the vibration when the axial speed of a string reaches or exceeds the critical speed.

In chapter six, we study the nonlinear transverse

vibrations of an axially moving viscoelastic string constituted by the fractional differential constitutive law. Since the integrals in the fractional differential constitutive model are improper integrals, the iterative technique in chapter five can not be directly used to solve them. By separating the singular point from the main integral and approximating the kernel of the integral operator by exponential functions, the integrals are transformed into a new form that can be iteratively computed, and an iterative method is presented to simplify the computation. By using the iterative technique, the parametric vibration of an axially moving string constituted by the fractional differential constitutive law is studied.

Key words: axially moving string, viscoelasticity, nonlinearity, partial differential/integral equation, numerical algorithms, vibration analysis

目 录

第一章 绪论	1
1.1 基本问题和研究意义	1
1.2 目前的研究进展	3
1.2.1 轴向运动弦线横向振动的动力学模型	3
1.2.2 轴向运动弦线系统的横向振动的研究方法	8
1.2.3 轴向运动弦线系统的参数振动和动力学 分析	12
1.2.4 轴向运动弦线的能量和守恒量的研究	16
1.3 本文研究的主要内容	18
1.4 有关符号和定义	21
第二章 非线性轴向运动弦线的动力学模型和守恒量	24
2.1 引言	24
2.2 黏弹性弦线的微分本构模型和积分本构模型	24
2.3 黏弹性轴向运动弦线的分数导数本构模型	27
2.4 积分本构模型和分数导数型本构模型的统一表示	30
2.5 轴向运动连续介质模型的运动守恒量及其应用	32
2.6 临界速度附近和超临界速度轴向运动弦线的运动 稳定性	43
第三章 轴向运动弦线横向振动仿真的 Galerkin 方法的讨论	46
3.1 引言	46
3.2 弹性本构运动弦线的 Galerkin 截断方程组的系数计算 方法	50

3.2.1	一般形式	50
3.2.2	弹性本构弦线的非线性 Kirchhoff 模型	58
3.3	微分本构黏弹性弦线的 Galerkin 方法的讨论	58
3.4	数值结果的精度分析方法及应用	62
3.4.1	非线性 Kirchhoff 模型的数值精度分析	63
3.4.2	Mote 的模型的数值精度分析	70
 第四章 微分本构黏弹性轴向运动弦线的数值方法和动力学分析		
4.1	引言	75
4.2	微分本构黏弹性轴向运动弦线的半离散差分法	76
4.2.1	控制方程的差分离散	76
4.2.2	黏弹性微分本构关系的 Standard 模型	79
4.2.3	黏弹性微分本构关系的 Maxwell - Kelvin 模型	81
4.3	微分本构黏弹性轴向运动弦线的直接差分法	84
4.3.1	控制方程的直接差分离散	84
4.3.2	黏弹性弦线 Standard 本构模型的交替 迭代法	86
4.4	微分本构黏弹性轴向运动弦线横向振动的参数振动 分析	89
 第五章 积分本构黏弹性轴向运动弦线横向振动的数值方法和动力学分析		
5.1	引言	93
5.2	积分本构中积分项的递推计算公式	96
5.3	积分本构轴向运动弦线横向振动的参数振动分析	100
5.3.1	低速运动轴向运动弦线的参数振动分析	101
5.3.2	高速运动轴向运动弦线的参数振动分析	104

第六章 轴向运动弦线分数导数本构模型的数值仿真和动力学分析	108
6.1 引言	108
6.2 分数导数本构模型的递推计算方法	109
6.3 分数导数本构黏弹性轴向运动弦线横向振动的参数振动分析	116
第七章 全文总结	122
参考文献	125
附录 攻读博士学位期间发表和完成的论文	139
致谢	141

第一章 绪 论

1.1 基本问题和研究意义

轴向运动弦线可以由许多工程元件抽象而来。如汽车马达的蛇型传送带、线切割机床的放电镍丝、磁带、运动纺织纤维、带锯、悬挂缆车的运动钢索等,忽略弯曲应力,都可以简化为轴向运动弦线研究。作为一种常见的工程元件,轴向运动弦线的横向振动的研究有许多重要的应用背景。

例 1.1 汽车马达蛇型传送带的横向振动问题^{[1][2][3]}。

汽车马达蛇型传送带见图 1.1。蛇型传送带在马达驱动下沿轴向高速运动。传送带在运动过程中产生的横向振动可以导致设备的加速磨损、振动和噪声的增大,因此是改进设计的重要技术指标。当前在汽车制造中广泛采用的蛇型传送带通常用合成橡胶等组成的复合材料制造,这些黏弹性材料不但力学性能好,还可以减少振动带来的负面影响特别是高速运动中的振动影响。由于工程的需要,目前对传送带的横向振动的研究的重点正在转向黏弹性材料的新型传送带的振动的研

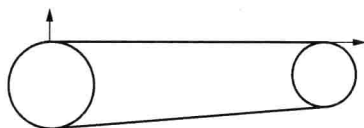


图 1.1a 马达蛇型传送带

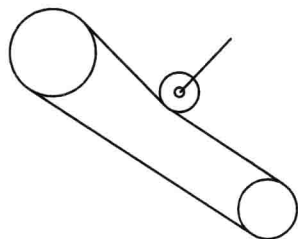


图 1.1b 带张紧轮的马达蛇型传送带

究、轴向运动弦线高速运动产生的非线性现象和不稳定性的研究等。

例 1.2 电火花线切割机床放电镍丝的横向振动问题。

电火花线切割机床的放电镍丝的工作原理如图 1.2 所示。图中是一个装有冷却油的有机玻璃槽,放电镍丝在马达驱动下沿轴向运动,通过镍丝的火花放电对高硬度工件进行切割加工。镍丝的一部分浸在冷却油中。在加工过程中,镍丝横向振动的大小影响切割面的光洁度和切割精度,是提高机床加工精度的一个重要因素。

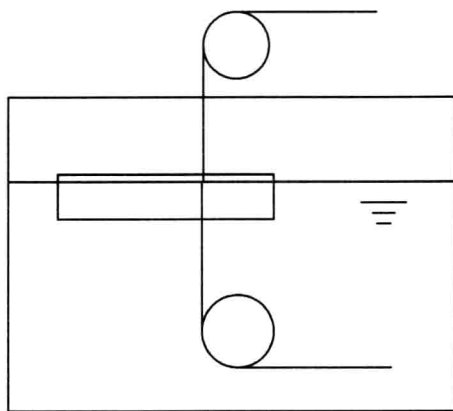


图 1.2 电火花线切割机床放电镍丝工作示意图

还有许多其他的例子。一方面,弦线运动中振动的增强在许多工程问题中有不良的影响,如磁带的横向振动使得声音调制,导致声音的失真^{[4][5][6]};纺织机上的运动纺织纤维的振动影响到纤维的均匀性、断头率等技术指标。另一方面,在许多情况下,合理地利用运动弦线的振动可以改善工艺。如在气流纺纱中,提高高速运动纱线的振动频率和幅值可以提高纱线的质量;在针织工艺中,利用运动纱线的振动可以改善织物的视觉效果等。因此,研究轴向运动弦线的横向振动的动力学特性,在力学理论和工程设计的应用中都具有重要的意义。目前所研究轴向运动弦线的横向振动的许多理论问题都带有很强的工程背景,如超临界速度下的弦线振动的稳定性,黏弹性材

料的应用对改善运动弦线的稳定性的作用等问题。

轴向运动弦线系统是没有抗弯刚度的一维连续介质的运动系统,且平衡位置是直线。许多细长的工程元件像带状物、电缆、链、弦和绳等,当弯曲应力很小时,都可以模型化为弦线进行分析。作为单向高速运动的柔性连续介质,运动弦线系统有独特的力学性能,其力学模型、振动理论和动力学性质的研究无法由其他的模型和理论取代。因此,运动弦线系统的振动理论和动力学性质的研究是力学理论的重要分支。

1.2 目前的研究进展

关于轴向运动弦线的横向振动,目前已有许多综述文章,涉及运动弦线的振动分析、控制等多方面内容。如 Mote(1972)^[7], Ulsoy, Mote 和 Szymani(1978)^[8], Wickert 和 Mote(1988)^[9], Wang 和 Liu(1991)^[10], Abrate(1992)^[11], 陈立群和 Zu(2001)^[12], Chen(2004)^[13] 等的综述文章。本章只对本论文的研究工作所涉及的内容,对有关研究进展进行简要的回顾和总结。

1.2.1 轴向运动弦线横向振动的动力学模型

对轴向运动弦线横向振动的研究可以追溯到一百多年以前 Aitkin(1878)^[14] 和 Skutch(1897)^[15] 等人的工作。早期的研究主要针对线性模型,分析方法也主要限于古典解析的方法。Mote(1966)^[16] 首先研究了轴向运动弦线的非线性振动。他在轴向位移的偏导数很小的假设下建立了弹性弦线横向振动的非线性模型

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + 2\rho c \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} + (\rho c^2 - P) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = AE \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \quad (1.1)$$

其中 ρ, A, c, P 分别是弦线的密度、横截面积、轴向速度和初始张力, E 是弦线的轴向弹性模量, U 是横向位移。利用这一模型, Mote 等研究

了弦线的非线性性质,解释了一些不能用线性模型解释的实验和理论结果。此后的许多年中,在不同的假设下,人们建立并研究了各种不同的非线性模型,以满足不同实际背景的需要。例如,去掉轴向位移的偏导数很小这一假设,则得到较复杂的 Thurman 和 Mote (1969)^[17] 的模型

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + 2c \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) \\ &= AE \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (P - EA) \frac{\partial}{\partial X} \frac{1 + \frac{\partial U}{\partial X}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2}} \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + 2c \frac{\partial^2 W}{\partial T \partial X} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\ &= AE \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + (P - EA) \frac{\partial}{\partial X} \frac{1 + \frac{\partial W}{\partial X}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2}} \quad (1.3) \end{aligned}$$

与模型(1.1)不同的是,Thurman 和 Mote 的模型中考虑了轴向位移 W 和位移变量的高阶项的影响。Ames, Lee 和 Zaiser(1968)^[18] 则利用轴向动量守恒,力的平衡条件和连续性条件得到下面的模型

$$m(P + V) = BN \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + 2c \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{P \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}}{m \left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right]} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + c \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{m \sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2}} \frac{\partial}{\partial X} \frac{P}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2}} \quad (1.6)$$