确立以树干形状指数（γ）为基础的测树制表的新体系

—测树学中多元迴归的一种新解法

第 三 分 册

论证数学模型的解题的涵义和实质

王 逮 纲 著

一九八〇年十月于中南林学院

第三分册目录

七．关于三维空间数学模型对六种二维空间数学模型的投形，论证数学模型的解题的涵义和回归法中的一元回归的实质问题

从本书的第一、二两个分册所揭示的内容，不难发现它的论述完全是阐明数学模型如何建立，如何在解题的过程中引进绝对概念作为支撑点，使得命题取得绝对解、唯一解、一题一解，即求得数学模型对物理模型之切合。于是本质上便和回归法尖锐的对立起来了。这种变革性的变化的重大突破，水到而渠成地创立了"新体系"并且公然声称它推翻了旧体系。为此有全面论证的必要，这便是本章所要阐明的内容。

第一、二两个分册中主要解释的是三维空间的数学模型，而它的对二维空间的数学模型的投形式，则都是解释带有绝对概念的两个因子间即两个维易之间的相互关係（即是旧的回归法所谓一元回归的问题）。所以，从统计易的研究对象中，居然引进了绝对的概念，使得解题的绝对化。这就使得从常识的判断应该是破天荒的第一遭，照一般常理来说不能不引起巨大的震动、兴趣和注意。所以，又照一般常理来推断必然地对著者有着强烈的要求和质询，要求把这类论点解释明白和清楚，气氛轻松一点好，引用一句水浒传中的话儿叫做"砖儿，瓦儿，块々要落地"。说个清楚，交待明白。

著者的理解正是引进了绝对的概念，使得解题的结果置于确信的地步，才配称做是数学模型解。否则仍旧应该保持着回归法

的称法。如此，便泾渭分明保持着科学的定义和正名。这一层也要求本章说明白的。也是一般常识要交待清楚的，

本书的付标题是"测树学中多元回归的一种新解法"。而且本书的方程式也是采用"回"字来编号。均说明以前这一段都把它暂时归属在解多元回归的范畴之中，即隶属在数理统计的名下。

现在，数据丰富了，论据坚实了，可以集中论述了，准备充分了，可以分道扬镳的了。总括一句话，羽毛已丰，时机成熟了。未充分论证数学模型的解题的涵义和回归法中的一元回归的实质问题。"併元法"求解数学模型从1978年12月发表那天起，以其十分顽强和青春活力独树一帜地登上了全部科学发展的历史舞台，而且声称必将顽强地永葆青春地在这舞台上威武而雄壮地一直作为一员角色表演下去。如测树甚至演的是独台戏和连台戏。所以，从整个科学领域来说，也要求对它作为一个专题来集中讨论。这是发展的必然，著者今天不这样写，日后为群情所促，还是一定得补写。与其补写，不如现在就写。这对著者来说是不吐不快，对读者来说，随概念之形成和深入，可能会有这种要求的。

"併元法"它是从旧的回归法中脱胎而出，只是因为引进了绝对概念作为支撑点，所以著者大胆地说了一些十分有把握的绝对话，此类话十分刺耳难听，这也没法，科学之所以伟大在于科学是百分之百的说理的学问，当其始也从来是很一个人侃侃而谈，娓娓而谈的，所谓坐而论道，从来不必有什么顾忌不敢说或是怕说，并不考虑是否有市场，要坐多少年的冷板凳，而他依然是并可以由他一个人谈谈说说的。这种例子，历史上有的是，非是著者之杜撰。这是常例，从来如此。而且，奇怪的是，大凡这类学问居然越陈越香，有陈年花雕的味道。

"併元法"何以如此神气活现，大言不惭，讲一句高度提炼的话就是它在解题的全部过程中，极尽了曲线化直的巧妙，所谓数学模型解，就是求得曲线真正的化直，至于它的求解过程，必

须紧々依靠解题的绝对概念作为支撑点，运用数列变换的巧妙，使之达到"寓曲于直"然后"铺直取曲"两个四言句子的概括和境界。因见近来科学著作芭用这种偈语式的笔法，四言若干句来概括全文而总结之。着春不敏，颇效东施之颦，学邯郸之步以示风雅而附会之。

本书之作从构思，到研究，到研究成功，到坐而论道，著书立说，前后三十年了，穷毕生之精力，许以终生之献身与之相扑相搏。请问究竟是什么引诱力和魅力值得如此迷恋而忘返。这就有必要回顾一番廻归法解题的通病，即是本书的研究治病的目的。温故而知新对接受后文之新概念的准备是有好处的。

先讲一元廻归，一元廻归的凭藉是一张纸，利用直角座标法，它可以表示着两个维易的特性。实体的观测值描点作图，可以得到一条最初折线，藉以估计它的形状和趋势。这便是依据，然后把它对照一些现成的数学方程开展的曲线所构成的图谱（教科书介绍的是不很多的，当然也不可能搜全），将资料用较差法去试去找，找适合它的数学方程，对于真正懂了本书第一、二两个分册便会知道像这种求解平均变率的解释曲线变化是永远找不到完全适合的方程的。即是说不可能。似乎相合的，实质上是貌合神离的却可以找到一些。由于拿不出绝对解的方法，这便注定了一题多解是旧廻归法的必然产物。这是通病之一。

当找到几个相似的方程型之后，于是用最小2乘法去配合它的经验方程，解开后作出一些统计易的估标，或精度，或相关，或F测验等々，作出一些概率估计。比较之下拣得一个好一点的。于是一个经验方程便被提出来了。

再讲二元廻归，对于二元廻归的命题，连同因变易，则相互关系的变易共是三个了。三个元数在起应该怎么办？教科书中自有它的一些说法。据我长期听了它的说法经过长期的实践检验，我说它没有招了。前面说过一元廻归还有一张纸作凭藉，对二元

迴归这炫纸也没有了，即无法构图判别的意思。失去了表观性。须知这便是旧迴归法一只拦路虎。于是全对数式、半对数式、多项式、联合変易式……等々；一概拿来。某甲做A树种的材积表费尽心机得到一个经验方程，据说：相关紧，精度高，如何如何的好，于是定型写文章发表论文加以介绍。可是某乙拿他这种方法去研究B树种，结果是规律不合解不开题，于是又是煎熬一番心血费大气力搭出了一个对B树种的经验方法，又是一篇文章。如是再轮转到丙奎集一番……。就是这样循环往复，生々不已，以至无穷，大有与天地同寿之势。于是滚雪球的结果，有使经验式型之多、之繁、之杂，直叫初学的人眼花瞭乱坠入到五里雾中（好一个繁琐哲学的例子），一辈子理解不完，做不完。看来乱似高深莫测，实质上是瞎子摸象，什么也说不準，说不出一句可以过得硬的话，说不出多大的道理。打靶不得中靶，击鼓击不中鼓心。这种解题就方法论可以用一个"摸"字来概括，直到最后还是和一元迴归一个样，乞灵于"试差法"。这便是一份资料用诸家之说，同时用好几个经验方程型去解。然后用统计估计曷分析分析，从中拣一个好一点々的。形象比喻说，就是买鞋子、买帽子，用脚或头去试着买。从尹来说，它究竟有多少科学味道，值得怀疑。

正由于经验方程的游移性太大，又说不出什么道理，所以它在数学上是品位低下的，经受不了数学分析，一经分析必归谬论。这也是一种归谬法。我便是用此法，在本书第五章第五节比较集中分析了17种迴归方程而否定了它们（见第一分册第72页到79页论证），其他散见于第二册的专论之中。须知"併元法"解得的命题也是以"经验式"的形式表达。这是因为此类命题的性质它的对象是个随机变易，它本身是一个先轨迹而后方程的问题，所以表达方式都是"经验式"。至于两种"经验式"的区别，便在于"併元法"解得的"经验式"是引进了绝对概念的，正确提

出了对实体数学方程结构的，必须是受得起数学分析的，而且也必须经过数学分析不断得到升华增长对实体的认识的。一句话，欢迎数学分析，必定要数学分析，一经分析头头是道，都是实体的规律说明。包含着无穷尽的阐明规律的信息易。可以一通百通增长正着意想不到的真知实学。所以我便曾叫"併元法"解得的绝对解为数学模型解，以示专用。与此相反，正如上述旧廻归法的解题，一定也得经过数学分析证其归谬，极为必要，科学之另一至要意义便是分析淘汰去伪存真。说到这里，显见这一点是旧廻归法的致命伤，这是廻归法的通病之二。

不过得解释一句话，廻归经此分析，倘若在区间解还有一点点用处，便曾叫它做廻归法解好了。切不可以冠之以什么数学模型。科学的界说力主避免混淆等同，必须从严，这是个性质问题。科学常识的问题，并不是难理解的。

再又顺带说一句话，以上议论也是对有这种议论的人的答复。那议论是："用函数的概念来解释统计规律是否合适。"和"併元法"无非是解得一些经验方程。"等々贬词和不识之词。

再又说到三元以上的多元廻归的问题：多元廻归除了多元直线廻归见诸论述以外，多元曲线廻归仍然是块未开垦的处女地。至于多元直线廻归，本来说明了就是求变易间的平均变率，表里一致，也就没有什么可资议论的了。

还是回过头来议论一元廻归和二元廻归吧。谈々它的病源，全对数式、半对数式，以及多项式、联合变易式……等々解廻归不切的病集中在曲线化直这一点上。例如，幂函数取超越函数对数的化直，实质是将座标轴由自然数々列变换成对数々列，只是对座标轴起一个压缩作用而已，而且是仅々就此一压而已。多项式则固定了变易按照某种因次方作线性的消长而已，这时掺了另一个变易进去，不过是形成一种联合变易按某种因次和乘积结构以同一直线斜率作线性消长而已。这许多个而已都是说明数学方

程结构的本质。苦就苦在这种做法多没有从实体本质方面去开刀，全都是形式的、机械的、抓不到痒处的。所以，奇就奇怪实体却不吃这一套，就是事与愿违，化而不直（实体是以变率处々在变化着又怎能经此机械的一压就直呢?!）。不就范的必然的，其结果总是而且无非是将实体本来的按自然数列的一条大弯度的曲线，经过这种化直而被化成一条微弯或小弯的曲线（变易间变率处々在变的本质不变）。这段话，干这行的人都再清楚不过，如果将实体的观察所得的实际值，按选定的方程型去描点作图，总是呈现着细微的弓形或是可察的弓形（本书前文这种例子太多了，没有感性知识的人，可以找一些看看）。显见，由此配合解得的以平均变率消长的理论直线便是这张弓的弦。弓背和弓弦的交点有二。所以准确的说法像这种解题的结果，理论和实体两者的趋势线只有两点是相合的，除此以外，全然不合。走的是两股道。中段有那一小段可以看成是貌似相合，而两端的剪刀状的分歧十分清楚，怎样办呢？于是乞灵于所谓图解法。这一点，早为许多有学问有实际经验的老一辈的森林调查员制表工作者所一再认识和证实。所以，这又是一点致命伤，这是通病之三。

以上三点通病都好觉察，有心人一听便知或一试便信。

事态还有更严重的，由于所研究的对象是一个随机变易，对于这种细微的弓形或可察的弓形的特点是当关连点多时便显示得越明，这是事实的真象本质。反之当关连点少时便逐渐隐晦含混起来，有时由于随机的原因居然会出现根据表观现象现出直线性很强的假象。最是误事了。这时进行统计分析便会得到一个不真实的相关系数的统计估计易用来作解题的判断。无怪乎有些人认为点子（关连点）少一些，相关紧一些，精度高一些。像这一点致命伤之所以说它最为误事，便在这句话。因为，若不明白事物的本质的道理，单々仅凭论文的文章和采用的方法手段是查不出任何这种判据失灵的疵病来。因此，必然会给科学成果的评价带

来极大的紊乱，即是说以假乱真，夹带着许多赝品而无法查出。所以说全部科学研究中以判据失灵是一件最不好办的事。其严重性也就可知了。

回归法有此病入膏肓不可救药的四种通病，不能设想普天下之人都是庸医看不出这些病，都是睁眼瞎子什么都看不出来。所以，可以这样措词，这种情况之下逼也要逼出一个"併元法"来，不是今天逼出来，便是明天逼出来，不被中国人逼出来，一定被外国人逼出来。有病求治，这又是常识，所以，它是科学发展之必然，决非偶然而侥倖的事。难道天下有不怀着坚定目的就像一只没有头的苍蝇一样的搞科学研究的人么。又难道这只没头苍蝇却有那样的巧事被它撞到玻璃窗的角上破碎之处而进入到一个广阔的天地去了么。以上，便是"併元法"脱胎问世，而跻于数学之林之所由来，和它的产生的必然性。

测树学的面纱既揭，本书的庐山真面目暴露得无遗了，原来它是一个如此深刻的纯理论的内容。著者要深深感谢的是测树学给我一个如此美妙的例题了。老前辈 M·Kunze 氏的丰硕遗产——干曲线式（$y^2=px^r$）。它本身便是一个美妙到无与伦比的数学模型式。使我得到解题，使"併元法"得到依附，得到如此深刻、如此美妙的多层次的数学模型，解开了立木树干全部测树因子，无穷尽的均题解的数学模型的信息量。当然，其结果测树学沾光得福了。得着一份如此丰硕的付产品《新体系》，够测树学永世不竭的受用了，测树学终于得到了统一于立木树干三要素"高、粗、形"基准上来的，一元化的，崭新的，不仅是现代化的，而且是未来化的水平上来。各领风流数百年，《新体系》之于测树学便不知几百年了。此话之所以能说绝，仍是依赖"命中目标"四个字之力。真理越辩越明，"併元法"的发展今天达到了这种地步，就是要毫不客气当仁而不让，说绝话，说气壮山河的话，说目中无人的话，去激怒于人，然后形成众矢之的，开展真刀真

三

枪的，真知灼见的，言之有物的一场大百家争鸣，这对于发展科学只是有好处的。否定了回归法，推翻了测树制表的旧体系，好大的口气！显见，这搞的是树万夫敌的事。着者不敏，赤手空拳一人，便敢以凡是人普遍都有的信誉感来赌这一场博、格这场斗。实在是其乐也无穷。

在没有讲正文以前，先说明两点认图的凡例：

①根据本幅图的序号 a、b、C、D、E、F的次序研究它们彼此之间的联系。

②根据大图幅的编号，前后衔接的目序号小图研究它们彼此之间的联系。

以下的解释均以带皮树干为例。

(一)
$$\begin{cases} Y_{带} \log H = 0.899363 + 0.0342143\,D_{1.3带} & (回1) \\ \dfrac{D_{1.3带}}{H} = 0.5565 + 0.02161\,D_{1.3带} & (回11) \end{cases}$$

为基础的所构成的三维空间数学模型，六种二维投影的解释，即六种一元回归的相互关系的实质。

本节的解释应对照图104的六幅解释图互相参看。

1．图104 a 此图是由

$$\begin{cases} Y_{带} = \dfrac{0.899363 + 0.0342143\,D_{1.3带}}{\log H} & (回2) \\ H = \dfrac{D_{1.3带}}{0.5565 + 0.02161\,D_{1.3带}} & (回12) \end{cases}$$

所构成。

察看图104 a，图中H轴叠有三个框格，它分别表示着10m、20m、30m，等三个树高阶（Hj），即（回2）式中H取以上三

个固定值以后在三维座标系统中所标注的点位，三个框格即表示着树高不变在这个三维座标系统中三个 $Y_{带}$ —— $D_{1.3带}$ 二维空间的位置。于是由（迴2）当取三个树高阶 H_j 便得到：

$$Y_{带} = a_j + b_j D_{1.3带}$$

这种模型切合鲜的，各有各自的直线截距和斜率的，和由于 H 值处处连续以至无穷的 $Y_{带j}$ 一群直线方程，也就是（迴1）这个切题的数学方程所满足的条件之一。即数学模拟的根据之一。

那么，10m、20m、30m，三个树高阶（H_j）的 $Y_{带j}$ —— $D_{1.3带j}$ 直线应对应叠在这些二维空间的平面上。但因为避免在图面上叠线太多，所以对这些应叠线没有叠上去，至于，图上所注记的三个树高阶（H_j）的三条 $Y_{带}$ —— $D_{1.3带}$ 的直线，仍是以投形的叠法被叠在那个 10m 树高阶的二维空间平面上。若果，在準照原点的那个 $Y_{带}$ —— $D_{1.3带}$ 二维面上叠上所有的连续的树高阶的 $Y_{带}$ —— $D_{1.3带}$ 无穷多的直线群，那末不难设想这个投形面的形状了，这个问题在后文适当的时候还要讨论一番，以说明投形面的问题。

图中的上下框边叠有一个外凸箭头状的曲面，此曲面便是由（迴12）所制约着所形成的曲面，这个曲面对于上面所解释过的那种层进着的，连续的树高阶 H_j 的无穷多的 $Y_{带}$ —— $D_{1.3带}$ 直线的相割点连线便构成一条 $Y_{带}$ 对 $D_{1.3带}$ H 的三维曲线，为了避免图面上线条太多造成混乱，所以在这个曲面上也没有把它这条应划线叠出来。现在可以谈到一元迴归的实质问题了，如果将（迴12）代入到（迴2）置换式中 H 便解得：

$$Y_{带} = \frac{0.899363 + 0.0342143\, D_{1.3带}}{\log D_{1.3带} - \log(0.5565 + 0.02161 D_{1.3带})} \qquad (迴27)$$

所以，（迴27）这个二维空间数学模型式（用迴归名词解释

即 γ带 —— $D_{1.3}$带 的一元测灯）它是一个由 γ带对 $D_{1.3}$带，H 的三维空间数学模型的对 γ带 —— $D_{1.3}$带这个二维平面的投形式，它的形状是一个伞柄状，这便是前面用到的蜈蚣虫譬喻图的形成原理和由来。它可以进一步推想，如果将（测 12）按照实体的实际变幅而定下它的上下两个限值，于是按以上程序解便会得到相应的投形式而在图 104 a 中便会增上两条限值的伞柄状的曲线，于是论题便进入到三维空间数学模型的二维投形面的范畴中了，本书稍晚将专设一章讨论这个问题。

2．图 104 b　此图是由：

$$
\begin{cases}
\gamma_{带} = \dfrac{0.899363+0.0342143\,D_{1.3带}}{\log H} & （测 2） \\[2ex]
D_{1.3带} = \dfrac{0.5565}{\dfrac{1}{H}-0.02161} & （测 13）
\end{cases}
$$

所构成。

察看图 104 b，图中 $D_{1.3}$带轴叠有三个框格，它分别表示着 6cm，20cm，34cm，等三个径阶（$D_{1.3带j}$）即（测 2）式中 $D_{1.3}$带取以上三个固定值以后，在三维坐标系统中所标注的点位，三个框格即表示着胸径不变在这个三维坐标系统中三个 γ带 —— H 二维空间的位置。于是当取三个径阶 $D_{1.3带j}$ 由（测 2）便得到：

$$
\gamma_{带j} = \frac{C_j}{\log H}
$$

这种模型切合解的，各有各自的双曲线常数 C_j 的和由于 $D_{1.3}$带处处连续以至无穷的一群 $\gamma_{带j}$ 双曲线方程。也就是（测 1）这个切题的数学方程所满足的条件之二，即数学模拟的根据之二。求得对这两点绝对概念的完整描述，便是数学模型的确切

函义。

那么，6cm，20cm，34cm 三个径阶（$D_{1.3带j}$）的 $Y_{带j}$ —— H_j 的双曲线应叠在这些二维空间的平面上。为了避免图面上叠线太多，所以对这些应叠线没有叠上去。至于，图上所注记的三个径阶（$D_{1.3带j}$）的三条 $Y_{带j}$ —— H_j 的双曲线，仍是以投形的叠法被叠在那个 6cm 径阶的二维空间的平面上。如果，在准照原点的那个 $Y_带$ —— $H_{1.3}$ 二维面上叠上所有的，连续的径阶的一群 $Y_带$ —— H 的双曲线，便不难设想这幅一捆香蕉形的投形面的形状了。

图中的上下框边叠有一个内凹筒瓦状的曲面，此曲面便是由（廻13）所制约着所形成的曲面。这个曲面对于上面所解释过的连续的径阶 $D_{1.3带}$ 的 $Y_带$ —— H 双曲线相割点连线便构成一条 $Y_带$ 对 $D_{1.3带}$、H 的三维曲线，为了避免图面上线条太多形成混乱，所以在这个曲面上也没有把这一条应叠线叠出来。现在可以论到一元廻归的实质问题了，如果将（廻13）代入到（廻2）置换式中的 $D_{1.3带}$ 便解得：

$$Y_带 = \frac{0.899363 + 0.00039497648\,H}{(1-0.02161H)\,\log H} \qquad \text{（廻72）}$$

所以，（廻72）这个二维空间数学模型（用廻归名词解释即 $Y_带$ —— H 的一元廻归）是由 $Y_带$ 对 $D_{1.3带}$、H 的三维空间数学模型对 $Y_带$ —— $D_{1.3带}$ 这个二维平面的投形式，它的形状貌似悬练线。

现在进一步推理（廻12）（廻13）同出一源导自（廻11）。它们之间互为函数，H —— $D_{1.3带}$ 和 $D_{1.3带}$ —— H 所以图 104a 和图 104b 上的那两个筒瓦状的曲面实际上是一个，曲面上的 $Y_带$ 对 $D_{1.3带}$、H 的三维曲线却原来就是一条。现在可以恍然大悟了 $Y_带$ —— $D_{1.3带}$ 和 $Y_带$ —— h 这两个一元廻归方程是同出一

流的。图104 a的正视面上的三维空间对 γ带 —— $D_{1.3}$ 带这个二维面上的投影就是图104 b的侧视面上的投影，见箭头符号。相反，图104 b的正视面上的三维空间对 γ带 —— h 这个二维面上的投影也就是图104 a的侧视面上的投影，见箭头符号。

明确以上的联系，现作几点讨论：

①世界上的事物除掉命题的本身便是一个二维空间的数学模型以外，例如：$u=\pi D$（圆的周长＝3.1416×圆的直径）任何三维命题它所反映出来的看来貌似简单的一元廻归的问题，一条简简单单的曲线，都是蕴藏着颇为高深奥妙的道理，它是阐明着三维空间数学模型的投影式的结果性的平均的说明。只有在求解这一对基本的数学模型如本例（廻Ⅰ）（廻Ⅱ），引进了绝对概念作为解题的逻辑基础后，才可能使得数学模型对物理模型的切合。这便是把廻归法的一元廻归提高到数学模型解的揭露事物本质的涵义。这一点便是本书创新独到之处极为难能可贵的。第一次完整地揭示出这种本质的关系。所以，求数学模型解须如（廻Ⅰ）（廻Ⅱ）所示明的程序一样，使它构成一种三维空间数学模型的二维投影解的数学结构。除此以外别无他法，这又是一句绝话。

（廻Ⅰ）（廻Ⅱ）这一组数学模型之所以美妙到无以复加，是因为它模拟了立木树干的三要素高（H），粗（$D_{1.3}$）、形（γ）。而其中树高（H）粗度（$D_{1.3}$）乃是限定维量，即置于掌握之中的测定因子，所以，通过数学模型的约束有使立木极难就范的形状（γ）便被抓到手中来了而且无比驯服。这样便再利用 M·Kunze 的干曲线理论的严谨性的推导衍生，于是得着的便不是仅仅一个蛋而是一窝蛋了。用行话说此解是多层次的得着了除树木年龄以外，几乎所有立木树干测树因子之间无穷尽的数学模型的信息量，如本书第一、二两分册的大量论证所表明。

从应用观点来看，由于这一重要理论基础的突破，遂使在对立木定量的应用上又带来了变革性的深远变化。体现在，它能够