

線型規劃

作業研究之一

(理論、應用及經濟意義之分析)

自序

線型規劃 (*Linear Programming*) 是作業研究 (*O.R.*) 的一大部門。作業研究大致可以說是研究分析求解確定事件 (*Certainty*) 和不確定或帶有風險的事件 (*Uncertainty* 或 *Risk*) 。屬於前一種確定事件的作業研究有線型規劃。屬於後一種不確定事件的作業研究，到目前為止，有存量控制 (*Inventory Control*) ，等待線 (*Waiting Lines* 或 *Queuing Theory*) ，馬可夫連鎖 (*Markov Chain*) ，競賽理論 (*Game Theory*) 等問題。和線型規劃相對立的另一部門是非線型規劃 (*Non-Linear Programming*) ，動態規劃 (*Dynamic Programming*) ，整數規劃 (*Integer Programming*) ，一零規劃 (*one-0 Programming*) 和二次方規劃 (*Quadratic Programming*) 等。這些規劃也都是作業研究。作業研究包羅的範圍雖然廣闊，但是其中能自立門戶，成為一科目的而且有廣泛應用的應當是線型規劃。

作業研究不外是將一事件或問題經過邏輯的分析，系統化後納入一數學模式，應用數學來解答。因此作業研究也可稱為管理數學。作業研究所分析求解的對象，不僅是數量事件，而且也包括數量化的質量事件。因此作業研究也是一種應用在管理上的數量分析。 (*Quantitative Analysis*) 。

作業研究所應用的數學範圍則可分線型代數和機率 (也包括統計學) 兩種。前一種應用在確定的事件上，如線型規劃等。後一種則應用在不確定事件上，如存貨控制，等待線，競賽理論等。

線型代數和機率本質上是數學的一部門，唯有在應用到企業管理的事件上時。才可名符其實稱為管理數學，或作業研究。因此有的作業研究或管理數學的著作常在前幾章或附錄上，介紹線型代數和機率。本書線型規劃在正文二十章後也有一附錄簡介線型代數給需要的讀者們作為研讀本書的準備。

這本書在一年半前就已開始動筆了。當時著者在美國加州 *Santa Clara* 大學企業管理研究所攻讀 *M.B.A.* 學位。1970 年 12 月獲得學位後，曾追隨葉師 (*Chaiho Kim*) 等研究半年，同時寫線型規劃這

本書。當時Kim師的 *Introduction to Linear Programming* 尚在排版付印中。著者能先觀原稿，在編寫本書時獲益良多。本書二十章中有近四分之一的材料（第七章到第十章，和第十二章）採自Kim師的著作。本書也採用了著者過去在財政經濟月刊上所發表過的三篇文章（見參攷書目）。特別是「李榮基夫的經濟結構理論及其實用」這一篇，只將原文修改了一些譯名，全篇編入本書，成為第二十章。

本書前五章和運輸問題的幾章所要求的數學知識僅及於小代數，合乎一般讀者水準。不過線型規劃問題所要求的邏輯理解力，分析力則不是人人皆有足夠的水準。譬如：一位讀過小代數的初中小朋友和一位大學生對線型規劃問題的分析求解的水準有極大的差別。前者僅能就已有多元一次方程式求出變數的答案，後者則能知道如何分析問題，建立一數學模式，求出解答後更能解釋這模式，這解答的經濟意義。通常的線型規劃書本教材，對這最精華，最適用的兩點很少涉及，著者在本書中特別強調。在第十二章中介紹如何分析線型問題，建立模式。經濟意義的解釋則是本書的特徵，散見於本書各章節中。

本書分A、B、C、D和E五部份。

A. 初級線型規劃

1. 線型規劃導言
2. 消取法和簡式法
3. 解答的演算；
4. 求最大和最小
5. 反面問題 *Dual*
6. 向量法
11. 退化問題
12. 模式的建立

B. 運輸問題

- 13. 運輸問題一
- 14. 運輸問題二
- 15. 互運問題
- 16. 職位分派問題
- 17. 推銷員旅程問題

C. 高級線型規劃

- 7. 理論分析
- 8. 隱藏價格
- 9. 感應度分析
- 10. 修正簡式法

D. 特殊線型問題

- 18. 交通網的流量
- 19. 競賽理論
- 20. 李榮基夫理論

E. 附錄線型代數

- 附錄 I. 向量代數
- 附錄 II. 矩陣代數

B組運輸問題中包括職位分派和推銷員旅程問題是因為它們之間有一共同特徵，限制方程式中的係數都是一。

在輔仁大學企業管理系，線型規劃是一學期課程，每週上課二小時，另加二小時實習課。著者曾有過兩次的教學經驗。一學期每週二小時的課程最適當的課程表是選**A組**和**B組**的教材，實習課一小時已夠。如果一學期每週上三小時課可以增加**C組**中的第七章和**D組**。**C組**適宜研究參考，不太適宜為教材。

本書原稿一部份承邱若男助教和吳靜倩助教授讀，並提供實實的意見。全書曾經過四校，校對和謄寫工作，全賴李雅瑩，李淑真和杜幼麗三位助教，以及陳淑卿，周芬芳二位同學協助，著者特借此一角向這幾位助教，同學們致萬分的謝意。

、著者才疏學淺，回國在輔大執教甫及一年，又蒙校方錯愛將商學院行政責任擱在著者肩上；日間週旋於院務人事之間，夜晚透支精力方能提筆，疏漏之處，在所難免，尚請作業研究的先進學者不吝賜教。

線 型 規 劃

作業研究—(理論, 應用及經濟意義的分析)

目 次

第一章 線型規劃導言

1-1 引言.....	1
1-2 線型通則 (<i>Axioms</i>)	3
1-2.1 比例乘法性	
1-2.2 加法性	
1-2.3 線型通則的經濟意義	
1-3 線型規劃的數學模式.....	5
1-3.1 線型規劃是—特殊的數學模式	
1-3.2 線型規劃的典型和數學模式	
1-4 濃縮「線型規劃」數學模式：總和 Σ 式和矩陣式...	7
1-5 線型規劃圖解法.....	9
1-6 簡式法 (<i>Simplex Method</i>) 的導言：.....	14
1-6.1 線型規劃中的聯立方程式結構	
1-6.2 上限條件方程式	
1-6.3 下限條件方程式	
1-6.4 等式限制條件方程式	
1-6.5 近似值限制條件方程式	
1-6.6 簡式表	
1-7 線型規劃簡史.....	21
1-7.1 線型規劃起源於戰場	
1-7.2 線型規劃從戰爭走到了和平	

第二章 Gauss-Jordan 消除法和簡式法關係

2-1 引言.....	25
2-2 <i>Gauss-Jordan</i> 消取法.....	25
2-3 基本解答, 基本變數。	27
2-4 <i>Gauss-Jordan</i> 消取法應用到簡式法.....	28

2—5 經濟意義.....	30
第三章 解答簡式法的運算 (求最大值的線型規劃)	
3—1 引言.....	35
8—2 多項產品「線型規劃」：求最大值簡式法.....	35
3—2.1 問題	
3—2.2 問題圖表化、模式化	
3—2.3 簡式法解答	
3—2.3.1 簡式表中各定名內容	
3—2.3.2 初步基本可行表中評核行的計算	
3—2.3.3 評核行的分析	
3—2.3.4 改善初步基本可行解答的步驟	
3—2.3.5 第一基本可行解答表	
3—2.3.6 改善第一基本可行解答表	
3—2.3.7 第二基本可行解答表	
3—2.4 坐標圖解分析法	
3—3 結論.....	46
第四章 簡式法解答(二)求最小值的線型規劃	
4—1 引言.....	49
4—2 食譜問題 (混合營養問題).....	49
4—2.1 簡式法解答	
4—3 虛設變數的淘汰.....	50
4—3.1 <i>Charnes'M</i> 法	
4—3.1.1 初步基本可行解答表中的評核行數值的計算	
4—3.1.2 改善初步基本可行解答	
4—3.1.3 第一基本可行解答表新數值計算	
4—3.2 二層次法	
第五章 線型規劃中的反面問題 Duality	
5—1 引言.....	57

5—2	從反面來看這問題	57
5—3	在完全競爭市場上	59
5—4	正、反面問題的對比	59
5—5	簡式法解答正反兩問題的對比	60
5.5.1	化限制不等方程式爲等式	
5.5.2	最佳解答	
5—6	隱藏價格	64
5—7	感應度分析	66
5—7.1	隱藏價格不等於零時	
5—7.2	隱藏價格等於零時	
5—7.3	價格係數 (c_j) 的變動振幅	
5—7.4	增加新產品的分析	
第六章 向量法解答線型規劃		
6—1	引言	79
6—2	向量表示線型規劃	79
6—3	向量法的解答	80
6—4	評核第一基本解答	83
6—5	評核第二基本解答	85
6—6	摘要	86
6—7	向量分析法和簡式法的比較	87
第七章 簡式法解答的理論分析		
7—1	基本向量和非基本向量間的關係	95
7—2	Y_j 的性質及功用 (實例解答)	97
7—2.1	Y 向量的經濟意義	
7—3	入選和落選向量的決定	100
7—3.1	決定落選向量的問題	
7—4	矩陣代數解「線型規劃」	103
7—5	矩陣求解實例	105
第八章 隱藏價格 (Shadow Price)		
(歸屬價格) (Imputed Price)		

8—1	引言.....	111
8—2	反面變數 (<i>Dual Variables</i>)	115
8—3	隱藏價格的經濟意義：(從正面問題去看)	112
8—4	證明 $R_i = \lambda_i$	116
8—5	正面問題解答中的隱藏價格 λ_i 和 z	117
8—6	解釋前例多項產品問題.....	118
8—7	「隱藏價格」解釋所基於的假定.....	120
第九章 最佳規劃的感應度分析		
9—1	引言.....	123
9—2	隱藏價格的經濟意義.....	123
9—3	目標函數中係數 (c_i) 的變動.....	125
9—3.1	非基本變數的係數 c_i 變動	
9—3.2	基本變數的係數 c_i 變動 (在基本解答中的變動)	
9—4	限制向量的係數 (常數) d_i 的變動.....	135
9—5	投入產出技術係數 a_{ij} 變動的分析.....	142
9—5.1	非基本向量中 a_{ij} 的變動	
9—5.2	基本變數的 a_{ij} 變動	
第十章 修正簡式法		
10—1	引言.....	157
10—2	反矩陣法的數理分析.....	157
10—3	無虛設變數的修正簡式法.....	160
10—4	摘要.....	165
10—5	修正簡式法求最大值實例.....	166
10—6	有虛設變數的修正簡式法.....	170
10—7	摘要.....	176
10—8	修正簡式法求最小值實例.....	178
第十一章 退化線型規劃 (Degeneracy)		
11—1	引言.....	187
11—2	退化問題.....	187

11—3	退化問題的解答.....	188
11—4	落選變數的決定.....	189
11—4.1	用第一法來求解	
11—4.2	再用第三法求解	
第十二章	實用「線型規劃」模式的建立	
12—1	引言.....	193
12—2	實例的模式形成的特殊性.....	194
12—2.1	混合問題 A Blending Problem	
12—2.1.1	混合問題的分析	
12—2.1.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.2	生產計劃問題 A Production-Planning Problem	
12—2.2.1	生產計劃問題的分析	
12—2.2.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.3	製造業問題 A Manufacturing Problem	
12—2.3.1	製造業問題的分析	
12—2.3.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.4	材料分割問題 A Trim Problem	
12—2.4.1	材料分割問題的分析	
12—2.4.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.5	採購問題 A Caterer Problem	
12—2.5.1	採購問題的分析	
12—2.5.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.6	貨運載重問題 A Cargo-Loading Problem	
12—2.6.1	貨運載重問題的分析	
12—2.6.2	決策變數的認同和模式的建立	
12—2.7	投資計劃問題 An Investment-Planning	
12—2.7.1	投資計劃問題的分析	
12—2.7.2	決策變數的認同和模式的建立	

第十一章 運輸問題(一) Transportation Problem

13—1	引言	213
13—2	構成「線型規劃」模式的三大部份	214
13—3	運輸問題實例	215
13—4	現將上面的運輸問題用三種模式表達如下	216
13—5	運輸問題線型規劃中的多餘等式	217
13—6	運輸問題線型規劃的解答法	218
13—7	迭運輸計劃基表法	218
13—7.1	西北角法	
13—7.2	福吉兒近似法	
13—8	檢定評核最佳運輸計劃	224
13—8.1	腳踏石法	
13—8.1.1	重新調配貨運表方法	
13—8.2	改良調配法 (<i>Modi</i>)	

第十四章 運輸問題(二) Transportation Problem

14—1	限制條件的變動	239
14—2	需求總量≠供給總量	239
14—3	虛平衡法	239
14—4	優先顧客限制	245
14—5	虛數 D_i 上加一極大值運費 M 法	246
14—6	分析第二法結果	250
14—7	供應、推銷和顧客三重限制	251
14—8	變質運輸計劃 (<i>Degeneracy</i>)	256
14—9	H 的簡速法解答工業問題實例	260

第十五章 互運(或轉運)問題 The Trans shipment Problem

15—1	引言	267
15—2	互運問題數學模式	267
15—3	一般互運問題表	270
15—4	互運問題實例	270

第十六章 職位分配問題

16—1	引言.....	277
16—2	職位分派的數學模式.....	278
16—3	職位分派問題的解答.....	278
16—3.1	用 H 簡速法解答	
16—3.2	用逐一列舉法解答	
16—3.3	用匈牙利法 (<i>Hungarian Method</i>)	

第十七章 推銷旅程問題

17—1	引言.....	287
17—2	推銷旅程問題的特點.....	287
17—3	推銷旅程問題的數學模式.....	287
17—4	推銷旅程問題的解答.....	289
17—5	分枝界限法.....	296

第十八章 交通網的流量問題 (*Flows in Networks*)

18—1	引言.....	299
18—2	流量的基本問題.....	299
18—3	連鎖.....	300
18—4	交通網上所用符號的註解.....	301
18—5	解答最大流量問題的方法.....	302
18—6	線型規劃法.....	302
18—6.1	交通結點和交通線矩陣	
18—6.2	建立線型規劃數學模式	
18—7	直視法.....	304
18—8	標記法.....	306
18—8.1	無標記交通網	
18—8.2	交通網1上加標記	
18—8.3	回程注入流量	
18—8.4	交通網2上加標記	
18—8.5	回程注入流量	
18—8.6	交通網3上加標記	
18—8.7	回程注入流量	

18—8.8	交通網4加標記	
18—8.9	回程注入流量	
18—8.10	交通網5上加標記	
18—8.11	回程注入流量	
18—8.12	結論	

第十九章 競賽理論與實用

19—1	引言	315
19—2	競賽理論的種類和型態	316
19—2.1	常數和競賽	
19—2.2	零和競賽	
19—2.3	非零和競賽	
19—3	混合策略	322
19—3.1	混合策略的分析和解答	
19—3.2	撲克牌競賽的期望值	
19—3.3	混合策略的簡化法	
19—4	消滅劣勢策略	331
19—5	線型規劃策略	334

第二十章 李榮基夫的經濟結構理論及其實用

20—1	簡史	337
20—2	經濟平衡理論發展簡述	337
20—3	李榮基夫的經濟應平衡的理論及實驗	339
20—4	李榮基夫的「投入產出表」	340
20—5	「投入產出表」基本方程式	342
20—6	「投入產出表」的閉塞型及開放型	344
20—7	李榮基夫「投入產出表」的應用方程式及其解法	345
20—8	矩陣方程式	346
20—9	「投入產出表」開放型的應用實例	348
20—10	李榮基夫的理論與實用在世界各國的反應	352

附錄 I. 線型代數 (Linear Algebra)

導言.....	355
---------	-----

附錄 I 向量代數 (*Vector Algebra*)

I - 1 引言.....	357
I - 2 向量的加減法.....	358
I - 3 向量乘法.....	360
I - 4 向量幾何.....	361
I - 5 向量的長度.....	363
I - 6 線型組合.....	363
I - 7 線型相依和線型獨立 <i>Linearly Dependent and</i> <i>Linearly Independent</i>	363
I - 8 相依線型的幾何解釋.....	365
I - 9 獨立向量的線型組合.....	367

附錄 II. 矩陣代數 (*Matrix Algebra*)

II - 1 引言.....	369
II - 2 何謂矩陣?.....	369
II - 3 廣義的矩陣.....	370
II - 4 矩陣的特徵.....	372
II - 5 矩陣定律.....	373
II - 5.1 結合律 (<i>Associative Law</i>)	
II - 5.2 分配律 (<i>Distributive Law</i>)	
II - 5.3 消除律 (<i>Cancellation Law</i>)	
II - 6 矩陣代數中的 $+$ $-$ $\times$ $\div$ 運算.....	374
II - 6.1 矩陣加減法	
II - 6.2 矩陣乘法	
II - 6.3 轉置矩陣 (<i>Transposed Matrix</i>)	

II - 7	矩陣代數的應用.....	378
II - 8	矩陣種類.....	379
II - 8.1	對角線矩陣 (<i>Diagonal Matrix</i>)	
II - 8.2	單位矩陣 (<i>Unity</i>)	
II - 8.3	零矩陣 (<i>Null Matrix</i>)	
II - 8.4	對稱矩陣 (<i>Symetric Matrix</i>)	
II - 8.5	正負反號對稱矩陣	
II - 8.6	純量 (<i>Scalar</i>) 矩陣	
II - 8.7	$A(1n)$ 和 $A(n1)$ 矩陣	
II - 8.8	增廣矩陣 (<i>Augmented Matrix</i>)	
II - 8.9	子矩陣 (<i>Submatrix</i>) 和分區矩陣 (<i>Partitioned Matrix</i>)	
II - 8.10	奇異矩陣 (<i>Singular Matrix</i>)	
II - 9	矩陣的秩 (<i>Rank</i>).....	387
II - 10	反矩陣 (<i>Inverse Matrix</i>).....	390
II - 10.1	反矩陣的存在條件	
II - 10.2	反矩陣法	
II - 10.2.1	矩陣和其反矩陣互乘法	
II - 10.2.2	增廣分區矩陣法	
II - 10.2.3	餘因子矩陣法	

附錄 III 第十八章增補節

18 - 4 1/2	應用集合論來分析交通網 (P,302).....	397
18 - 6 - 0	最大流量和最小切口 (P,302).....	399
18 - 6 - 01	一交通網上的瓶頸定義.....	399
18 - 6 - 02	流量不減方程式.....	399
18 - 6 - 03	增廣流量 線.....	400

18 — 6 $\frac{1}{2}$ 交通網的線型規劃 (正反面問題) 模式 (P.304)	401
18 — 6 $\frac{1}{2}$ — 1 正面問題 (Primal)	402
18 — 6 $\frac{1}{2}$ — 2 反面問題 (Dual)	403
18 — 9 交通網的一些特殊問題 (P.312)	406
18 — 9 — 1 複始結點和 (或者) 複終結點	406
18 — 9 — 2 結點容量 (Node Capacity)	407
18 — 9 — 3 無向交通網 (線) (Undirected Networks)	407
18 — 9 — 4 多線最大流量	408
18 — 10 最短路程問題 (P.312)	409
習題	411
中英名詞引得	453
參考書目	461

第一章「線型規劃」導言

-1 引言：企業管理上的主要問題之一就是調配問題 (*Allocation*)。諸如：人力和機器的時間調配，原料存量和各種產品的調配，機器的可用時間和各種產品的調配，產品存量和各地區銷售量的調配等等。整個企業管理的重點就在各種生產因素和產品的調配問題上。

一方面，在一固定階段，企業管理者所能“投入”的生產因素：原料、人力、機器時間，是有一定限量的。在一固定期間，任何一工廠的廠房、工場、機器、一切固定資本是不會變動的，再雄厚的資本，也還是有它的限度。再從流動資本去看，原料的來源和存量，各種技工的人數和時間，在一相當的短期中也是有一定量的限度。

另一方面，企業管理者“投入”生產因素時，一定有一完整的目標。在商言商，企業管理者的目標當然是求最高的利潤，和最低的成本。如何將受時間、空間、數量、限制的“投入”生產因素調配“得當”，達到最佳的境界而獲得最佳的“產出”量，因而獲得最大的收益。這就是企業管理者須面對一個問題的兩面。企業管理者不僅要知道如何調配手頭上有限的生產因素，同時要從不同的調配中，找出最佳的調配，來達到他的企業經營目標——最低成本，最高利潤。事實上，用最低的代價去追求最高的收穫，原是一種理性的要求，因此在任何理性活動中，都有一“求”最佳”問題的存在。企業管理中最佳調配問題，不過是其中之一。

例如：作戰時，軍隊的統帥要盡量設法使他有限的軍力發揮到最高的戰鬥力。

行政長官要為老百姓謀求最高的福利。