# 第一章　命 题 逻 辑

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科．它与数学的其它分支、计算机科学、人工智能、语言学等学科均有密切的联系，并且日益显示出它的重要作用和更加广泛的应用．数理逻辑的内容相当丰富，大体可分为5部分，即：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论．在本书中，只介绍命题逻辑和一阶逻辑（谓词逻辑）的逻辑演算．对数理逻辑感兴趣的读者，可参阅有关专著．

## 1.1　命题符号化及联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句。因而，表达判断的陈述句构成了推理的基本单位．于是称能判断真假的陈述句为**命题**．这种陈述句的判断只有两种可能，一种是正确的判断，一种是错误的判断．称判断为正确的命题的**真值**（或**值**）为真，称判断为错误的命题的真值为假，因而又可以称命题是具有唯一真值的陈述句．

**例1.1**　判断下列句子中哪些是命题．

（1）2是素数．

（2）雪是黑色的．

（3）$2+3=5$．

（4）明年十月一日是晴天．

（5）3能被2整除．

（6）这朵花多好看呀！

（7）明天下午有会吗？

（8）请你关上门！

（9）$x+y>5$．

（10）地球外的星球上也有人．

**解** 在10个句子中，（6）是感叹句，（7）是疑问句，（8）是祈使句，这3句话都不是陈述句，当然它们都不是命题。其余的7个句子都是陈述句，但（9）不是命题，因为它没有确定的真值．当 $x=6, y=7$ 时，$6+7>5$ 正确，而当 $x=1, y=2$ 时，$1+2>5$ 不正确．其余的陈述句都是命题。其中（1），（3）是真命题；（2），（5）为假命题；（4）的真值虽然现在还不知道但到明年十月一日就知道了，因而是命题，它的真值是唯一的，句子（10）的真值也是唯一的，只是我们还不知道而已，随着科学技术的发展，其真值会知道的，因而它也是命题．

从以上的分析可以看出，判断一个句子是否为命题，首先要看它是否为陈述句，然后再看它的真值是否是唯一的．当然真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两回事．

在例1.1中给出的6个命题都是简单的陈述句，都不能分解成更简单的句子了，称这样的命题为**简单命题**或**原子命题**．本书中用小写的英文字母 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$ 表示简单命题，将表示命题的符号放在该命题的前面，称为命题符号化．例如，

$p$：2是素数．

$q$：雪是黑色的．

此时，$p$ 是真命题，$q$ 是假命题．

对于简单命题来说，它的真值是确定的，因而又称为**命题常项**或**命题常元**．上面的 $p$，$q$ 都是命题常项．

在例1.1中，（9）不是命题，但当给定 $x$ 与 $y$ 确定的值后，它的真值也就定下来了，这种真值可以变化的简单陈述句称为**命题变项**或**命题变元**，也用 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i \cdots$ 表示之．一个符

号，例如 $p$，它表示的是命题常项还是命题变项，一般由上，下文来确定。注意，命题变项不是命题。

在数理逻辑中，将命题的真值也符号化。一般用 1（或 $T$）表示"真"（本书中将用 1 表示真），用 0 （或 $F$）表示"假"（本书中用 0 表示假）。有时也用 1 表示真命题，用 0 表示假命题。

以上讨论的是简单命题，在命题逻辑中，主要是研究由简单命题用联结词联结而成的命题，这样的命题称为**复合命题**。下例给出的命题均是复合命题。

例1.2 将下列命题符号化。

（1） 3 不是偶数。

（2） 2 是素数和偶数。

（3） 林芳学过英语或日语。

（4） 如果角 $A$ 和角 $B$ 是对顶角，则角 $A$ 等于角 $B$。

解 上面 4 个句子都是具有唯一真值的陈述句，因而它们都是命题，且都是由简单命题经过联结词的联结而形成的复合命题。（1）中命题也可说成"并非 3 是偶数."，使用了联结词"并非"。（2）中命题也可说成"2 是素数并且 2 是偶数."，使用了联结词"并且"。（3）中使用了联结词"或"。（4）中使用了联结词"如果，则"。除了以上 4 个联结词外，常用的，特别是在数学中常用的联结词还有"当且仅当"。以上 5 种联结词也是自然语言中常用的联结词，不过在自然语言中有的联结词具有不精确性。例如联结词"或"，有时表示相容性析取，有时表示排斥性的析取。可是在数理逻辑中不允许这种二义性的存在，因而对联结词必须给出精确的定义。另外，为了书写和推演的方便，必须将联结词符号化。下面给出 5 种常用联结词的符号表示及相应复合命题的严格定义。

**定义1.1** 设 $p$ 为任一命题。复合命题"非 $p$"（或"$p$ 的否定"）称为 $p$ 的**否定式**，记作 $\neg p$。$\neg$ 为**否定联结词**。$\neg p$ 为真当且仅当

$p$为假。

在例1.2（1）中，设$p$表示"3是偶数"，则$\neg p$表示"3不是偶数"。显然，当$p$的真值为0时，$\neg p$的真值为1。

**定义1.2** 设$p$，$q$为二命题。复合命题"$p$并且$q$"（或"$p$和$q$"）称作$p$与$q$的**合取式**，记作$p \wedge q$。$\wedge$为**合取联结词**。$p \wedge q$为真当且仅当$p$与$q$同时为真。

在例1.2（2）中，用$p$表示"2是素数"，$q$表示"2是偶数"，则$p \wedge q$表示"2是素数和偶数"，由于$p$，$q$的真值均为1，所以$p \wedge q$的真值也为1。

$p$与$q$的合取表达的逻辑关系是$p$与$q$两个命题同时成立，因而，自然语言中常用的联结词"既……又……"，"不仅……而且……"，"虽然……但是……"等，都可以符号化为$\wedge$，请看下例。

**例1.3** 将下列命题符号化。

（1）李平既聪明又用功。

（2）李平虽然聪明，但不用功。

（3）李平不但聪明，而且用功。

（4）李平不是不聪明，而是不用功。

**解** 用$p$表示"李平聪明"，$q$表示"李平用功"，则（1），（2），（3），（4）分别符号化为$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$p \wedge q$和$\neg(\neg p) \wedge \neg q$。可见以上4个复合命题全用联结词$\wedge$联结。但不能见到"和"，"与"就用"$\wedge$"。例如，"李文与李武是兄弟"，"王芳和陈兰是好朋友"，这两个命题中分别有"和"及"与"字，可是它们都是简单命题而不是复合命题，因而，分别符号化为$p$，$q$即可。

**定义1.3** 设$p$，$q$为二命题。复合命题"$p$或$q$"称作$p$与$q$的**析取式**，记作$p \vee q$。$\vee$为**析取联结词**。$p \vee q$为真当且仅当$p$与$q$中至少一个为真。

由定义不难看出，析取式$p \vee q$表示的是一种相容性或，即允许$p$与$q$同时为真。例如，"王燕学过英语或法语"，可符号

化为$p\vee q$，其中$p$为“王燕学过英语”，$q$为“王燕学过法语”，当仅$p$为真，仅$q$为真，$p$与$q$同时为真时，$p\vee q$均为真。

可是在自然语言中的“或”具有二义性，有时表示的是相容性或，有时表示的是不相容性或（即排斥或）.例如，“派小王或小李中的一人去开会”不能符号化为$p\vee q$的形式，因为这里的“或”表达的是排斥或。但可以借助于联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$共同来表达这种排斥或.即符号化为$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$的形式,或$(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$的形式，在1.4节中，将给排斥或严格的定义。

**定义1.4** 设$p$，$q$为二命题.复合命题“如果$p$，则$q$”称作$p$与$q$的**蕴涵式**，记作$p\rightarrow q$，称$p$为蕴涵式的**前件**，$q$为蕴涵式的**后件**.$\rightarrow$称作**蕴涵联结词**.$p\rightarrow q$为假当且仅当$p$为真且$q$为假.

$p\rightarrow q$表示的基本逻辑关系是，$q$是$p$的必要条件，或$p$是$q$的充分条件.因此，复合命题“只要$p$就$q$”，“$p$仅当$q$”，“只有$q$才$p$”等都可以符号化为$p\rightarrow q$的形式.

在使用蕴涵联结词时，除了注意其表示的基本逻辑关系外，还应注意两点.其一，在自然语言中，“如果$p$，则$q$”中的$p$与$q$往往有某种内在的联系，但在数理逻辑中“$p\rightarrow q$”中，$p$与$q$不一定有什么内在联系。其二，在数学中，“如果$p$，则$q$”往往表示前件$p$为真，后件$q$为真的推理关系，但在数理逻辑中，当前件$p$为假时，$p\rightarrow q$为真.

为了掌握蕴涵联结词的逻辑关系及应用中应注意的事项，请看下例.

**例1.4** 将下列命题符号化.

（1）只要不下雨，我就骑自行车上班.

（2）只有不下雨，我才骑自行车上班.

（3）若$2+2=4$，则太阳从东方升起.

（4）若$2+2\neq 4$，则太阳从东方升起.

（5）若$2+2=4$，则太阳从西方升起.

（6）若 $2+2\neq 4$，则太阳从西方升起。

**解** 先分析（1），（2）。令 $p$：天下雨。$q$：我骑自行车上班。在（1）中，$\neg p$ 是 $q$ 的充分条件，因而符号化为 $\neg p\rightarrow q$。在（2）中，$\neg p$ 是 $q$ 的必要条件，因而应符号化为 $q\rightarrow\neg p$。在使用蕴涵联结词时，一定要认真分析蕴涵式的前件与后件，然后组成蕴涵式。另外还应注意同一命题的各种等价说法。例如，"除非下雨，否则我就骑自行车上班"与（1）是等价的。"如果下雨，我就不骑自行车上班"与（2）是等价的。

再分析（3）—（6）。设 $p$：$2+2=4$。$q$：太阳从东方升起。$r$：太阳从西方升起。则（3），（4），（5），（6）分别符号化为 $p\rightarrow q$，$\neg p\rightarrow q$，$p\rightarrow r$，$\neg p\rightarrow r$。在这些蕴涵式中，前件，后件之间无内在联系。由于 $p,q,r$ 的真值均知道，由定义可知上面4个蕴涵式的真值分别为1，1，0，1。

**定义1.5** 设 $p,q$ 为二命题。复合命题"$p$ 当且仅当 $q$"称作 $p$ 与 $q$ 的**等价式**，记作 $p\leftrightarrow q$。$\leftrightarrow$称作**等价联结词**。$p\leftrightarrow q$ 真当且仅当 $p$，$q$ 真值相同。

等价式 $p\leftrightarrow q$ 所表达的逻辑关系是，$p$ 与 $q$ 互为充分必要条件。只要 $p$ 与 $q$ 的真值同为真或同为假，$p\leftrightarrow q$ 的真值就为真，否则 $p\leftrightarrow q$ 的真值为假，请看下例。

**例1.5** 分析下列各命题的真值。

（1） $2+2=4$ 当且仅当3是奇数。

（2） $2+2=4$ 当且仅当3不是奇数。

（3） $2+2\neq 4$ 当且仅当3是奇数。

（4） $2+2\neq 4$ 当且仅当3不是奇数。

（5）两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等。

（6）两角相等当且仅当它们是对顶角。

**解** 设 $p$：$2+2=4$，$q$：3是奇数，则 $p$，$q$ 都是真命题。（1），（2），（3），（4）分别符号化为 $p\leftrightarrow q$，$p\leftrightarrow\neg q$，$\neg p\leftrightarrow$

$q$，$\neg p\leftrightarrow\neg q$.由定义可知，$p\leftrightarrow q$ 和 $\neg p\leftrightarrow\neg q$ 的真值为 1，而 $p\leftrightarrow\neg q$ 和 $\neg p\leftrightarrow q$ 的真值为 0.

在（5）中，由于两圆的面积相等与它们的半径相等同为真或同为假，所以该命题为真.

在（6）中，由于相等的两角不一定是对顶角，所以该命题为假.其实，（5），（6）中的命题要在一阶逻辑（谓词逻辑）中才能刻划得更精确.

以上介绍的5种常用的联结词也称**真值联结词或逻辑联结词**.在命题逻辑中，可用以上5种联结词将各种各样的复合命题符号化.基本步骤如下：

（1）分析出各简单命题，将它们符号化；

（2）使用合适的联结词，把简单命题逐个联结起来，组成复合命题的符号化表示.

**例 1.6** 将下列命题符号化.

（1）小王是游泳冠军或百米赛跑冠军.

（2）小王现在在宿舍或在图书馆里.

（3）选小王或小李中的一人当班长.

（4）如果我上街，我就去书店看看，除非我很累.

（5）王一乐是计算机系的学生，他生于1968年或1969年，他是三好学生.

**解** 各命题符号化如下：

（1）$p\vee q$，其中，$p$：小王是游泳冠军.$q$：小王是百米赛跑冠军.

（2）这里的“或”是排斥或，但因小王在宿舍与在图书馆不能同时发生，因而也可符号化为 $p\vee q$.其中，$p$：小王在宿舍.$q$：小王在图书馆.

（3）这里的“或”也为排斥或.设 $p$：选小王当班长.$q$：选小李当班长.因为 $p$ 与 $q$ 可同时为真，所以应符号化为$(p\wedge\neg q)\vee$

$(\neg p \wedge q)$；而不应符号化为 $p \vee q$.

在使用析取联结词时，首先应分析表达的是相容或还是排斥或.若是相容或，或是$p$，$q$ 不能同时为真的排斥或均可直接符号化为 $p \vee q$ 的形式. 如果是排斥或,并且 $p$ 与 $q$ 可同时为真,就应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的形式.有的书上，在基本联结词集中就给出了排斥或联结词.考虑到简洁性,本书在基本联结词集中没给出排斥或联结词.在 1.4 节中给出了它的定义.

（4）$\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$.其中，$p$：我上街.$q$：我去书店看看.$r$：我很累.

此句中的联结词"除非"相当于"如果不……"的意思,因而$\neg r$可看成 $p \rightarrow q$ 的前件. 其实，此命题也可以叙述为"如果我不累并且我上街，则我就去书店看看"，因而也可以符号化为 $(\neg r \wedge p) \rightarrow q$.

（5）$p \wedge (q \vee r) \wedge s$. 其中，$p$：王一乐是计算机系学生.$q$：他生于 1968 年.$r$：他生于1969年. $s$：他是三好学生.

5 种联结词符也称为逻辑运算符. 它们与普通数的运算符一样，可以规定运算的优先级，本书中规定优先级的顺序为$\neg$, $\wedge$, $\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 如果出现的联结词相同，又无括号时，按从左到右顺序运算.若遇有括号时，先进行括号中的运算.

## 1.2 命题公式及分类

在上节中，介绍了 5 种常用的联结词及由它们组成的基本复合命题：$\neg p$，$p \wedge q$，$p \vee q$，$p \rightarrow q$，$p \leftrightarrow q$，其中 $p$，$q$ 为简单命题，即命题常项。当然由这 5 种联结词和多个命题常项可以组成更复杂的复合命题. 若在复合命题中，$p$，$q$，$r$ 等不仅可以代表命题常项，还可以代表命题变项，这样组成的复合命题形式称为**命题公式**. 抽象地说，命题公式是由命题常项，命题变项、联结

词、括号等组成的符号串．但并不是由这些符号任意组成的符号串都是命题公式，因而必须给出命题公式的严格定义．首先给出由命题常项、变项、联结词、圆括号等组成的合式公式的定义，然后规定一个符号串是命题公式当且仅当它是合式公式．

**定义1.6** （1）单个命题常项或变项 $p$，$q$，$r$，$\cdots$，$p_i$，$q_i$，$r_i$，$\cdots$，0，1是合式公式；

（2）如果 $A$ 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式；

（3）如果 $A$，$B$ 是合式公式，则 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式；

（4）只有有限次地应用（1）—（3）组成的符号串才是合式公式．

今后我们将合式公式称为**命题公式**，或简称为**公式**．

为方便起见，规定 $(\neg A)$，$(A\wedge B)$ 等的外层括号可以省去．在公式的定义中，引进了 $A$，$B$ 等符号，它们代表任意的命题公式，在以下的定义中均有类似的情况．

根据定义，$\neg(p\vee q)$，$p\rightarrow(q\rightarrow r)$，$(p\wedge q)\leftrightarrow r$ 等都是命题公式，但 $pq\rightarrow r$，$(\neg p\vee q)\rightarrow r$ 等都不是命题公式．

由定义可看出，命题公式的结构可以很复杂，为此需要给出命题公式层次的定义，以便于研究和演算．

**定义 1.7** （1）若 $A$ 是单个命题（常项或变项）$p,q,r$，$\cdots$，$p_i$，$q_i$，$r_i$，$\cdots$，0，1，则称 $A$ 是 0 层公式．

（2）称 $A$ 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 $A$ 符合下列情况之一：

① $A=\neg B$，$B$ 是 $n$ 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 $B$，$C$ 分别为 $i$ 层和 $j$ 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $A=B\vee C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②；

④ $A=B\rightarrow C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②．

（3）若 $A$ 的最高层次为 $k$，则称 $A$ 是 $k$ 层公式．

定义中的符号"＝"为通常的等号，以下再出现时意义相同．

由定义可看出，$\neg p\vee q$，$p\wedge q\wedge r$，$\neg(\neg p\wedge q)\to(r\vee s)$ 分别为 2 层，2 层，4 层命题公式．

一个含有命题变项的命题公式的真值是不确定的，只有对它的每个命题变项用指定的命题常项代替后，命题公式才变成命题，其真值也就唯一确定了。例如，命题公式 $(p\wedge q)\to r$ 中，若指定 $p$ 为"2是素数"，$q$ 为"3是奇数"，$r$ 为"4能被2整除"，则 $(p\wedge q)\to r$ 变成真命题．若 $p$，$q$ 的指定同前，而 $r$ 为"3能被2整除"，则 $(p\wedge q)\to r$ 就变成假命题了．

一般地，对一个命题公式的**解释**或**赋值**定义如下．

**定义1.8** 设 $A$ 为一命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为出现在 $A$ 中的所有的命题变项．给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 指定一组真值，称为对 $A$ 的一个赋值或解释．若指定的一组值使 $A$ 的值为真，则称这组值为 $A$ 的**成真赋值**，若使 $A$ 的值为假，则称这组值为 $A$ 的**成假赋值**．

若命题公式 $A$ 中含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，给定一组赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$（$\alpha_i$ 为 0 或 1），是指 $p_1=\alpha_1$，$p_2=\alpha_2$，$\cdots$，$p_n=\alpha_n$．若命题变项为 $p$，$q$，$r$，$\cdots$，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n$ 指定给它们的顺序应按字典顺序．例如，公式 $A=(p\wedge q)\to r$，110（$p=1,q=1$，$r=0$）为 $A$ 的成假赋值，111，011，010 等是 $A$ 的成真赋值．

含 $n$（$n\geqslant 1$）个命题变项的命题公式，共有 $2^n$ 组赋值．将命题公式 $A$ 在所有赋值之下取值的情况列成表，称为 $A$ 的**真值表**．构造真值表的具体步骤如下：

（1）找出命题公式中所含的所有命题变项 $p_1$，$p_2,\cdots,p_n$（若无下角标就按字典顺序给出），列出所有可能的赋值（$2^n$个）；

（2）按从低到高的顺序写出各层次；

（3）对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后

计算出命题公式的值。

例1.7 求下列命题公式的真值表。

（1）$p\wedge(q\vee\neg r)$；

（2）$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$；

（3）$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$。

解

表 1.1

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $q\vee\neg r$ | $p\wedge(q\vee\neg r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

表 1.2

| $p$ | $q$ | $p\rightarrow q$ | $p\wedge(p\rightarrow q)$ | $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

表 1.3

| $p$ | $q$ | $p\to q$ | $\neg(p\to q)$ | $\neg(p\to q)\wedge q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

表 1.1，表 1.2，表 1.3 分别为（1），（2），（3）的真值表．由表 1.1 可知，100，110，111 是（1）的成真赋值，其余的都是成假赋值．由表 1.2 可知，（2）无成假赋值．由表 1.3 可知，（3）无成真赋值．根据在各种赋值下的取值情况，可将命题公式分为 3 类，定义如下．

**定义1.9** 设 $A$ 为一个命题公式．

（1）若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为真，则称 $A$ 为**重言式**或**永真式**；

（2）若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为假，则称 $A$ 为**矛盾式**或**永假式**；

（3）若 $A$ 至少存在一组赋值是成真赋值，则 $A$ 是**可满足式**．

由定义可知，重言式一定是可满足式，但反之不真．

给定一个命题公式，判断其类型的一种方法是利用命题公式的真值表．若真值表最后一列全为 1，则对应的命题公式为重言式；若最后一列全为 0，则对应的命题公式为矛盾式；若最后一列即有 0 又有 1，则对应的命题公式为非重言式的可满足式．在例 1.7 中，由真值表可知，（1）为可满足式；（2）为重言式；（3）

为矛盾式．下两节中，还将给出判断命题公式类型的其它方法．

## 1.3 等值演算

给定 $n$（$n\geq 1$）个命题变项，按合式公式的形成规则可以形成无数多个命题公式，但这些无穷尽的命题公式中，有些具有相同的真值表．例如，$n=2$时，$p\to q$，$\neg p\vee q$，$\neg(p\wedge\neg q)$，…，表面看来是不同的命题形式，但它们在 4 个赋值 00，01，10，11 下均有相同的真值，也就是它们的真值表最后一列是相同的．事实上，$n$ 个命题变项只能生成 $2^{2^n}$ 个真值不同的命题公式．在 $n=2$ 时，只能生成 $2^{2^2}=16$ 个真值不同的命题公式．这就存在着如何判断哪些命题公式具有相同真值的问题．设 $A$，$B$ 是均含 $n$ 个命题变项 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$ 的命题公式，由定义可知，若 $A$，$B$ 具有相同的真值，则 $A\leftrightarrow B$ 总取值为 1，即 $A\leftrightarrow B$ 是重言式．下面给出 $A$ 与 $B$ 真值相同的严格定义．

**定义 1.10** 设 $A$，$B$ 为二命题公式，若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 $A$ 与 $B$ 是**等值的**，记作 $A\Leftrightarrow B$．

注意，定义中引进的符号“$\Leftrightarrow$”不是联结词符，它只是当 $A$ 与 $B$ 等值时的一种简便记法．千万不能将 $\Leftrightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 或 $\Leftrightarrow$ 与 $=$ 混为一谈．

另外，不难看出命题公式之间的等值关系是自反的，对称的和传递的，因而是等价关系．

根据定义判断两命题公式是否等值可用真值表法，但可将真值表简化．设 $A$，$B$ 为二命题公式，由定义判断 $A$ 与 $B$ 是否等值应判断 $A\leftrightarrow B$ 是否为重言式，若 $A\leftrightarrow B$ 的真值表最后一列全为 1，则 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，因而 $A\Leftrightarrow B$．但最后一列全为 1 当且仅当在各赋值之下，$A$ 与 $B$ 的真值相同，因而判断 $A$ 与 $B$ 是否等值等价于判断 $A$，$B$ 的真值表是否相同．

例1.8 判断下列命题公式是否等值.

（1）$\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$；

（2）$\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$.

**解**（1）

**表 1.4**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p\vee q$ | $\neg(p\vee q)$ | $\neg p\vee\neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

由表 1.4 可知，$\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 不等值.

（2）

**表 1.5**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p\vee q$ | $\neg(p\vee q)$ | $\neg p\wedge\neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

由表 1.5 可知，$\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 是等值的.

还可以用真值表法验证许多等值式，其中有些是很重要的，

它们是通常所说的布尔代数或逻辑代数的重要组成部分。下面给出24个重要的等值式，希望读者牢记住它们，这是学好数理逻辑的关键之一。在下面的公式中，$A$，$B$，$C$ 等仍代表任意的命题公式。

| | |
|---|---|
| 1. $A\Leftrightarrow\neg\neg A$. | 双重否定律 |
| 2. $A\Leftrightarrow A\vee A$. | 等幂律 |
| 3. $A\Leftrightarrow A\wedge A$. | |
| 4. $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$. | 交换律 |
| 5. $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$. | |
| 6. $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$. | 结合律 |
| 7. $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$. | |
| 8. $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$. | 分配律 |
| 9. $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$. | |
| 10. $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$. | 德·摩根律 |
| 11. $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$. | |
| 12. $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$. | 吸收律 |
| 13. $A(A\vee B)\Leftrightarrow A$. | |
| 14. $A\vee 1\Leftrightarrow 1$. | 零　律 |
| 15. $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$. | |
| 16. $A\vee 0\Leftrightarrow A$. | 同一律 |
| 17. $A\wedge 1\Leftrightarrow A$. | |
| 18. $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$. | 排中律 |
| 19. $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$. | 矛盾律 |
| 20. $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$. | 蕴涵等值式 |
| 21. $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$. | 等价等值式 |
| 22. $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$. | 假言易位 |
| 23. $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$. | 等价否定等值式 |

24. $(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A$.　　　　　　　　归谬论

在以上公式中，由于$A$,$B$，$C$等代表的是任意的命题公式，因而每个公式都是一个模式，它可以代表无数多个同类型的命题公式。例如，$p\vee\neg p\Leftrightarrow 1$，$(p\wedge q)\vee\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow 1$，$(\neg p)\vee\neg(\neg p)\Leftrightarrow 1$等都是第18式（排中律）的具体形式，每个具体的命题形式称为对应模式的一个实例。有了上述基本等值式后，不用真值表法就可以推演出更多的等值式来。根据已知的等值式，推演出另外一些等值式的过程称为**等值演算**。在进行等值演算时，还往往用到**置换规则**。例如，已知命题公式为$p\wedge\neg(q\vee r)$，根据德·摩根律，可用$\neg q\wedge\neg r$置换公式中的$\neg(q\vee r)$，使其变成$p\wedge(\neg q\wedge\neg r)$，这样做的根据是下述的置换定理。

**定理1.1**　设$\Phi(A)$是含命题公式$A$的命题公式，$\Phi(B)$是用命题公式$B$置换了$\Phi(A)$中的$A$之后得到的命题公式。如果$A\Leftrightarrow B$，则$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$。

证明略。

有了基本的等值式及置换定理就可以进行等值演算了。利用等值演算可以验证两个命题公式等值，也可以判别命题公式的类型，还可以用来解决许多实际问题。下面举一些等值演算的例子。

**例1.9**　验证下列等值式。

（1）$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$；

（2）$p\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$。

**解**　验证两个命题公式等值可以从其中任一个开始演算。

（1）$p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(q\to r)$　　　　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$　　　　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$　　　　（结合律）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$　　　　（德·摩根律）