集合論

著

東海数学叢書(2)

集　合　論

岡山大学教授　理学博士

稲垣　　武著

東海書房

集　合　論

定　價　三百八十圓
地方定価　四百円

昭和25年3月10日　印　刷
昭和25年3月15日　初版発行

著　者　稲　垣　　武
發行者　古　川　敬　次
印刷者　加　藤　松　次

發行所　株式會社　東　海　書　房
東京都中野區江古田3の1223
出版協會々員番號　A 120026
振替東京　195270

序　　言

集合論は G. Cantor (1845—1918) に依つて創始せられたもので，これなくしては現在の數學を理解することが出來ない，と云つても過言ではない程數學の各分野に深い關聯を有してゐるものである．特に數學の基礎の研究には不可缺のものであり，又その取扱ふ概念の普遍的なると，無限を直接對象とするために，數學と哲學とを結ぶ鎖ともなつてゐる．

本書では大した豫備知識を期待することなく，集合論の概要を紹介することを目標とした．第1章から第5章までに於いては，一般集合論，換言すれば"無限の算術"とも呼ばるべきものを取扱ひ；第6章では，一般集合論の應用の一例として，M. Fréchet に依つて始められた抽象空間論の中，特に超限數と關係深い個所に就いて記述した；最後の章では，一見順序數には無關係と思はれる個所にも，探ればその實深い繋りを有するものの存在を示すために解析集合論の一端を考察した．

集合論は抽象空間論，點集合論，更に一般解析學へとその應用は廣範である．これらへ進むための入門書として，拙きこの書が役立つならば，筆者の喜びこれに過ぎるものはない．尙更に深く進まんとする讀者の便を考慮して，卷末に若干の參考書を列擧して置いた．

昭和二十三年二月

札幌にて

著　者　識

目　　次

第 4 章　順　序　數

第 5 章　準順序集合と順序集合との關係

第 6 章　抽象空間論への應用

第 7 章　解析集合との關係

第1章 基本概念

§1. 集　　合

集合なる概念は説明する必要がない程基本的なものではあるが，念のため若干の例を擧げて，二三の注意を述べることにする．

（1） 2, 3, 5, 7 の集合，

（2） 10 より小なる素數の集合，

（3） 有理數の集合，

（4） 平面內で一定點よりの距離が一定正數より大ならざる點の集合，

（5） 平面內で一定點を中心とする同心圓の集合．

集合 M を構成してゐる個々の物を M の**要素**と云ひ，p が M の要素なることを

$$p \in \mathrm{M} \quad 又は \quad \mathrm{M} \ni p$$

で表はし，p は M に**屬す**又は M は p を**含む**と云ふ．なほ q が M の要素ならざることを

$$q \bar{\in} \mathrm{M} \quad 又は \quad \mathrm{M} \bar{\ni} q$$

で表はし，q は M に**屬さぬ**又は M は q を**含まぬ**と云ふ．例 (1) の集合を M で表はせば，$5 \in \mathrm{M}$ ではあるが，$6 \bar{\in} \mathrm{M}$ である．

扨て，以上の諸例からわかる如く集合を定義するには二つの方法がある，卽ち

第一は例 (1) の如く若干個の物を列擧して，それを要素とする集合を定義する方法で，これを集合の**外延的定義**と云ふ．例へば a, b, c を要素とする集合を $\{a, b, c\}$ 又は $\{b, c, a\}$ 等で表はし，要素 a, b, c を書く順序に無關係に同一の集合を表はすものとするのである．なほこの記法に依れば $\{a\}$

は唯一つの要素 a を有する集合を意味する．吾々の常識からすれば，少くとも二つの要素を含むものを集合と云ひたいのであるが，この常識に從つておれば今後集合に關する命題を述べる際に幾多の不便が生ずるので，便宜上 $\{a\}$ をも集合と呼ぶことにする．

同じく用語上の問題であるが，例へば幾何學に於いて無限遠點を導入することによつて，幾何學に於ける命題の陳述が大いに簡單化せられるのみならず又問題の取扱ひが理論的に統一され得る利益があることは，讀者の良く知る所であらう．丁度この無限遠點の導入に倣つて，要素を有さぬ集合が存在すると規約して，これを**空集合**と呼ぶことにする．

第二は例 (2), (3), (4), (5) の如く，或る條件を與へて，それを滿す物の全體として集合を定義する方法で，これを集合の**內包的定義**と云ふ．例 (1), (2) の集合は實は同じ集合であるから，この集合は外延的及び內包的の兩定義により與へられる．一般に外延的定義により與へられる集合は，必ず內包的定義によつても與へられることが證明出來るが，それは此處では略しておく．(3), (4), (5) の如く無限に多くの要素を有する集合は，その凡ての要素を列擧することは出來ないから，內包的定義による以外に方法はない．

扨て第二の方法により集合を定義すると云つても，任意の物 p をとる時 p がその集合に屬するか否かゞ判定出來なくては困るであらう．換言すれば集合を定義するために用ひ得る條件は，任意の物 p をとる時 p がこの條件を滿すか否かゞ判定可能である如きものに限るのである．此處に判定可能であると云ふ意味は，p がこの條件を滿すとか又は滿たさぬとかゞ決定出來得ると云ふのではなくて，この條件を滿すか否かは不明であつても，それらの何れか一方であることが決定され得ると云ふことである．例へば (4) の有理數の集合を考へる時，π^π は有理數なりや否やは現在の處決定は出來ないのであるが，而し π^π は有理數なるか然らざるかの何れかであることは確かであるから，此の集合は定義せられてゐると見做すのである．これに反して

"可なり大なる數"と云へば，どれが可なり大なる數なるか又は然らざるかを決定することは不可能であるから，"可なり大なる數"の集合は意味を有しないのである．

次に (5) の集合の要素は圓であり，圓は又 (4) から解る如く點の集合である．卽ち集合を要素とする集合をも考へるのである．斯樣に集合を要素とする集合を**集合族**と云ふ．

扨て集合族を考へると，唯一つの要素 a から成る集合 $\{a\}$ と a とは區別しなければならないことは注意を要することである．何故なら，若し集合 M と，M を要素とする集合 $\{M\}$ とを區別しないとすれば，M は $\{M\}$ の要素であるから M は $M=\{M\}$ の要素となる．卽ち任意の集合は自分自身の要素となる．所が例へば集合 $\{1,2\}$ の要素は自然數 1,2 であつて，決して $\{1,2\}$ ではないから，自分自身を要素としない集合が存在することになり矛盾が起るから．

§2. 部分集合　素な集合

A, B を二つの集合とすれば，論理上次の四つの場合が可能である：

(1) A の凡ての要素は B に屬し，且つ B の凡ての要素は A に屬する，

(2) A の凡ての要素は B に屬するも，B の或る要素は A に屬さぬ，

(3) A の或る要素は B に屬さぬも，B の凡ての要素は A に屬する，

(4) A の或る要素は B に屬さず，且つ B の或る要素は A に屬さぬ．

(1) の場合，A と B とは**相等しい**と云ひ，$A=B$ と表はす．卽ち集合はそれを規定する條件の如何に拘らず，要素によつて一意的に定まるものと規約するのである．從つて無限に多くの要素を有する集合であつても，その要素全體を察知し得る如き表現を用ひ得る時は，外延的定義の場合に倣つて表示することが出來る．例へば自然數の集合は $\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$ にて表示することが出來る．

集合 A,B が相等しからざる時**相異なる**と云ひ，$A \neq B$ で表はす.

今 A,B を共に空集合とする．すると B の要素ならざる物は當然 A の要素ではない；從つて對偶をとれば，A の要素は凡て B の要素となる．同様に，B の要素は凡て A の要素となるから，定義により $A=B$. このことから空集合は唯一つより存在しないことになる．今後は空集合を0で表はすことにする.

$A \neq 0$ は，A が實際に要素を有する集合なることを意味する.

(2) の場合，A の要素は B の要素の一部分である．この時 A を B の**眞部分集合**と云ひ，$A \subset B$（又は $B \supset A$）と表はす．記號 $\subset$ は實數の大小關係を表はす不等號 $<$ を眞似たものであり，性質に於いても不等號のそれと同様である．例へば集合 A,B,C に對して $A \subset B$, $B \subset C$ が成立すれば $A \subset C$ となる.

特に A の要素が凡て B に屬する時は，(1) 又は (2) の何れかの場合である，即ち $A=B$ 又は $A \subset B$ である．斯る時 $A \subseteqq B$（又は $B \supseteqq A$）と記し，A を B の**部分集合**，又は A は B に含まれる又は B は A を含むと云ふ．この定義から任意の集合 A に對して $A \subseteqq A$ 及び $0 \subseteqq A$ となる，即ち集合 A に對して A 自身及び空集合は共に A の部分集合となる．例へば集合 $\{1,2,3\}$ の部分集合の全體は，

$$0,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}$$

の $8(=2^3)$ 個である．なほ n 個の要素から成る集合の部分集合の全體の個數を求めるに，m 個 $(0 \leqq m \leqq n)$ の要素を含む部分集合の總數は

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ 個}$$

であるから

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n}=2^n,\ \text{但し}\ \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,$$

卽ち 2^n 個である.

(3) の場合は, (2) の場合と同樣に $A \supset B$ である.

(4) の場合は, A, B が共に他方に屬さぬ要素を有するから, A は B の部分集合でもなければ又 B は A の部分集合でもない. 更に詳しく云へば, A と B とに同時に屬する要素のある時, 例へば $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ のごとき場合と, A, B に同時に屬する要素のない場合, 例へば $A=\{1,2\}$, $B=\{3\}$ の如き場合とがある. 後者の場合 A と B とは互に**素な集合**又は**互に素である**と云ふ. この定義から空集合と任意の集合とは互に素となる.

§3. 順序ある組

平面上の點の座標 (x,y) を考へれば, $x \neq y$ なる時は $(x,y) \neq (y,x)$, 卽ち座標は x,y に關して非對稱である. 所が相異なる物 a,b の集合に對しては $\{a,b\}=\{b,a\}$ となり, これは a,b に關して對稱である. そこで a,b から a,b に關して非對稱なる集合を作るには, $a \neq b$ なる時は $\{a\} \neq \{b\}$, $\{a\} \neq \{a,b\}$ 且つ $\{b\} \neq \{a,b\}$ であるから, $\{a\}$ と $\{a,b\}$ とを要素とする集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ を作れば $\{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{a,b\}\}$ となり, a,b に關して非對稱である. 依つて

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

とおき, (a,b) を a,b の**順序ある組**と云ふ.

尙 $a=b$ なる時にも

$$(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\}\}, \quad 但し\ \{a\}=\{a,a\},$$

を順序ある組と呼ぶことにする.

順序ある組に關して次の定理が成立する:

定理. 順序ある組 $(a,b),(c,d)$ が相等しいための完全條件は $a=c$, $b=d$ なることである.

證明. これが充分條件なることは明かであるから, 必要條件なることを示

さう.

$(a,b)=(c,d)$ 即ち $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ であるから, $\{a\}=\{c\}$, $\{a,b\}=\{c,d\}$ であるか又は $\{a\}=\{c,d\}$, $\{a,b\}=\{c\}$ である.

(i) $\{a\}=\{c\}$, $\{a,b\}=\{c,d\}$ なる時. 先づ $\{a,b\}=\{c,d\}$ から $a=c$, $b=d$ であるか又は $a=d$, $b=c$ である. 前者の場合は證明は終る. 後者の場合は更に $\{a\}=\{c\}$ から $a=c$ となる. 從つて當然 $a=c$, $b=d$.

(ii) $\{a\}=\{c,d\}$, $\{a,b\}=\{c\}$ なる時. 先づ $\{a\}=\{c,d\}$ から $a=c=d$. 同様に $\{a,b\}=\{c\}$ から $a=b=c$ となる. 從つて $a=c$, $b=d$. (終り)

順序ある組 (a,b) に於いて, a,b を夫々第一要素, 第二要素と呼ぶ.

以上は二つの物の順序ある組であるが, 一般に n 個の物の順序ある組も考へ得られる. 例へば三個の物 a,b,c に對して

$$(a,b,c)=(a,(b,c))$$

と定義すれば a,b,c に關して非對稱となる. 實際 $(a,b,c)=(d,e,f)$ とすれば定義より $(a,(b,c))=(d,(e,f))$, 故に定理より $a=d$ 及び $(b,c)=(e,f)$. 再び定理を用ひて $(b,c)=(e,f)$ より $b=e$, $c=f$ となる. 從つて $a=d$, $b=e$, $c=f$ となるから. a,b,c を夫々 (a,b,c) の第一要素, 第二要素, 第三要素と云ふ.

特に順序ある組 (μ,a) を a_μ と書くことにすれば, $\mu\neq\nu$ なる時, 集合 $\{a_\mu,b_\nu\}$ は a,b に關して非對稱であるから, これも亦 a,b の順序ある組と云ふことが出來る.

一般に集合 M の要素を添字として有する物の集合 $\{\cdots\cdots,a_\mu,\cdots\cdots,b_{\mu'},\cdots\cdots\}$ は a,b に關して非對稱であるから, これも亦順序ある組と見做せる. 尚誤解の起らぬ時は a_μ を以つて要素 a を表はすことがある.

特に $\mathrm{M}=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 又は $\mathrm{M}=\{1,2,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots\}$ なる時, 順序ある組を $\{a_1,b_2,\cdots\cdots,e_n\}$ 及び $\{a_1,b_2,\cdots\cdots,e_n,\cdots\cdots\}$ で表はし, これらを夫々**有限系列**, **無限系列**と云ひ, e_n を第 n 番目の要素と云ふ.

§4. 寫　　像

Pを順序ある組 (a,b) の集合とする. Pが要素 (a,b) を含む時, b を a の**像**, a を b の**原像**と云ふ. Pの二要素で, それらの第一要素が同一で且つ第二要素が異なる場合も起り得るから, 一般には a の像は唯一つとは限らない. b の原像に對しても同樣である. 今Pの要素の第一要素 a の集合をA, 第二要素 b の集合をBとおく. するとAの各要素 a にはその像の集合 $f(a)$ が對應し, 逆にBの各要素 b にはその原像の集合 $g(b)$ が對應する. 卽ちPはAとBの要素の間に成立してゐる結合關係を與へるものである. 結合關係 $f(a)$ を, Pにより定められたAからBへの(**多意)寫像**, A, Bを夫々 $f(a)$ の**變域**及び**値域**と云ふ. 尙 $g(b)$ をBからAへの寫像又は $f(a)$ の**逆寫像**と云ひ, $f^{-1}(b)$ で表はすことがある. 同樣に $f(a)$ を $g(b)$ の逆寫像と云ひ, $g^{-1}(a)$ とも表はす.

特に凡ての a に對して唯一つの像 b が對應する時, $f(a)$ を**一意寫像**と云ふ. $f(a)$ が一意寫像の場合にもその逆寫像 $f^{-1}(b)$ は必ずしも一意寫像ではない. 普通最も屢々遭遇する寫像は, $f(a)$ が一意でその逆寫像 $f^{-1}(b)$ が多意の場合である.

以上の如き一意寫像の定義を換言すれば: 一定の規則(吾々の場合にはP)に據り, 集合Aの各要素 a に集合Bの確定せる一つの要素 $f(a)$ が對應する時, この對應 $f(a)$ をAからBの中への一意寫像又は簡單に a の一意寫像と云ふのである. 此處に一定の規則とはそれが解析的の式又は何等か他の式によつて表はされ得ることを必要としないことは勿論であり, 又Bの確定せる要素とは, 丁度集合の場合に於けると同樣に, Bの何の要素であるかゞ確定し得ると云ふのではなくて, Bの定まれる要素であることが確定し得られると云ふ意味である. なほ集合の場合に凡ての要素を列擧する必要がなかつたから, 寫像の場合に於いても, 凡ての a に對して $f(a)$ を列擧する必要は勿論ない. 單に各 a に對して $f(a)$ が確定することが解れば良

いのである.

一意寫像のこの定義は Dirichlet の與へたものである. 逆にこの定義によれば, 一定の規則を f で表はし, 順序ある組 (x,y) で "x は A に屬し, y は f に據り x に對應する $f(x)$ である" と云ふ條件により集合 P を定義する時, この P から定められる寫像は明かに寫像 $f(a)$ と一致する. このことは Dirichlet の定義と既に掲げた定義とは同値であることを示すものである.

Dirichlet の定義の意味を明瞭ならしめるため一例を掲げておく; 有理數に1を, 無理數に0を對應せしめる, と云ふ規則によつて

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ は有理數,}\\ 0 & x \text{ は無理數}\end{cases}$$

なる一意寫像を得る. これを **Dirichlet の函數**と云ふ.

此處で函數を定める規則は何等式を用ひて表はされてゐないし, 又凡ての實數 x に對して $f(x)$ が1か0か何れであるかを決定してもゐない. 尚 π^{π} は有理數なりや否やは不明であるから, $f(\pi^{\pi})$ は1か又は0かは確定は出來ないが, その何れか一方であることは確かであるから, 吾々は Dirichlet の函數は定義せられたものと見做すのである.

扨て定義から A を變域, B を値域とする一意寫像は, A の要素とその像たる B の要素とから成る順序ある組が與へられゝば確定するから, 結局 A の要素を添字に有する B の要素の集合が與へられゝばよい. 從つて A から B への一意寫像は, 集合 $\{\cdots\cdots, b_a, \cdots\cdots\}$ を以つて表はすことが出來る.

次に二つの一意寫像 f, φ ある時, その變域が同一で且つ變域の各要素 a に對して $f(a)=\varphi(a)$ なる時, f と φ は相等しいと云はれる.

今 A を變域, 値域は B に屬する一意寫像を $f(a)$ とする. A の部分集合 A^* の各要素 a に對して $\varphi(a)=f(a)$ により寫像 $\varphi(a)$ を定義すれば, これは A^* を變域とする一意寫像である. この寫像 $\varphi(a)$ を $f(a)$ の**縮小**

寫像と云ふ．このとき $\varphi(a)$ の値域は當然 $f(a)$ の値域の部分集合である．尙 $\varphi(a)$ を最初に與へられた寫像とすれば，$f(a)$ の變域は $\varphi(a)$ の變域を部分集合として含み且つ A^* の各要素 a で $\varphi(a)=f(a)$ となつてゐる．かゝる時 $f(a)$ を $\varphi(a)$ の**擴張寫像**と云ふ．

一意寫像 $b=f(a)$ の逆寫像 $a=f^{-1}(b)$ が又一意寫像なる時，換言すれば A の異なる要素 a, a' に對して $f(a) \neq f(a')$ なる時，$f(a)$ を**一對一寫像**と云ふ．この時逆寫像 $f^{-1}(b)$ も亦一對一寫像である．

集合論に於いて重要なのは一對一寫像である．集合 A から B への一對一寫像 $b=f(a)$ が存在する時，A と B とは**對等**であると云ひ，

$$A \sim B$$

で表はす．この時 $f(a)$ の逆寫像 $f^{-1}(b)$ は B から A への一對一寫像であるから $B \sim A$．卽ち $A \sim B$ と $B \sim A$ とは同値である．尙 $A \sim B$ なる時，A の眞部分集合 A^* は $f(a)$ により B の或る眞部分集合 B^* と對等となることも明かであらう．

集合 A, B, C ありて $A \sim B$, $B \sim C$ とする．卽ち A から B へ，B から C への一對一寫像 $b=f(a)$, $c=g(b)$ が存在する時は，$f(a)$, $g(b)$ の**合成寫像** $c=g(f(a))$ は A から C への一對一寫像である．依つて $A \sim C$ となる．

特に集合 A から A へは一對一寫像 $a=f(a)$ が存在するから $A \sim A$．この寫像を**恒等寫像**と云ふ．

以上の結果から，集合が對等であると云ふ關係は次の三條件を滿すことを知る：

（1）　反射律　　$A \sim A$,

（2）　對稱律　　$A \sim B$ なる時は $B \sim A$,

（3）　推移律　　$A \sim B$, $B \sim C$ なる時は $A \sim C$.

§5. 集合の和，積及び差

二つの集合 A, B ある時，A, B の少くとも一方に屬する要素を要素とする集合を A, B の**和集合**又は單に**和**と云ひ，$A+B$ で表はす．又 A, B に同時に屬する要素を要素とする集合を A, B の**積集合**又は**共通部分**又は單に**積**と云ひ，$A\cdot B$ 又は AB で表はす．

定義より $A\subseteqq B$ なることは $A+B=B$ 又は $AB=A$ と同値である．A, B が互に素なることは $AB=0$ と同値である．

一般に集合 M の各要素 μ に一つの集合 A_μ が對應してゐる時，A_μ の少くとも一つに屬する要素を要素とする集合 S を A_μ $(\mu\in M)$ の和集合又は和と云ひ，

$$S=\sum_{\mu\in M}A_\mu,\quad S=\sum_{\mu}A_\mu\quad 又は\quad S=\sum A_\mu$$

と表はす．又凡ての A_μ $(\mu\in M)$ に同時に屬する要素を要素とする集合 D を $A_\mu(\mu\in M)$ の積集合又は共通部分又は積と云ひ，

$$D=\prod_{\mu\in M}A_\mu,\quad D=\prod_{\mu}A_\mu\quad 又は\quad D=\prod A_\mu$$

等で表はす．

特に M が自然數の集合 $\{1,2,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots\}$ なる時は，

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots=\sum_{n}A_n,$$

$$D=\prod_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cdot A_2\cdots\cdots A_n\cdots\cdots=\prod_{n}A_n$$

等と表はす．

集合の和及び積の定義は，集合の族 $\{A_\mu\}$ $(\mu\in M)$ が與へられゝば，何の集合が M の何の要素に對應するかに無關係であるから，和及び積に關しては所謂交換，結合，配分の諸法則が成立する．即ち