高等学校教学参考书

高等数学

（基础部分）

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出 版 前 言

本书是按 1964 年 8 月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版，上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书可作为高等工业院校的教学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高 等 数 学

（基础部分）

上　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012・0184　开本 850×1168　1/32　印张 15

字数 339,000　印数199001—369000　定价(5)￥1.40

1964 年 8 月第 1 版　　1978 年12月第 6 次印刷

出 版 前 言

本书是按1961年12月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误

本书分上、下两册出版，下册内容是矢量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、常微分方程与级数。

本书可作为高等工业院校的教学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高 等 数 学

（基础部分）

下 册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012・0187 开本 850×1168 1/32 印张 12 5/16

字数 335,000 印数 39,001—189,000 定价(5)¥1.20

1961年12月第1版 1973年9月第[illegible]次印刷

高等学校教学参考书

高等数学

（基础部分）

下册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

上册目录

下册目录

預备知識

§1. 实数与数軸

数，最初产生于点算物件的个数，最基本的数是自然数：1, 2, 3, ⋯.

数的运算中，最簡单的是加法运算．事实上，点算物件的个数也体現着一个一个地累加．

由于生产的逐漸发展，人們对客观事物的认識逐漸深入，数的运算扩充为四則运算，数的范圍亦由自然数扩充到整数：0, ±1, ±2, ⋯，再扩充到有理数．所謂有理数，是指$\frac{q}{p}$这种形式的数，其中 p, q 都是整数，且 $p\neq 0$．有理数当然包括了所有整数，这是因为，当 $p=1$ 时，有理数就簡化为整数．

有理数可以用十进位小数来表示，这些小数或者是有尽的，或者是循环的．例如：

$$\frac{1}{4}=0.25,\quad \frac{5}{6}=0.8\dot{3},\quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

反过来，任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数．

在实际生活中，常要測量一些物理量，如长度、面积、时間、溫度、電量等，取了一定的单位以后，这些量都可以被測量，測量的結果用数来表示．但有些量不能用有理数来表示，例如，对于两直角边皆为单位长度的直角三角形，其斜边的长度为$\sqrt{2}$个单位长度，$\sqrt{2}$不是一个有理数，又如半徑为单位长度的圓，它的面积是π个单位面积（单位长度的平方），π 也不是一个有理数．像$\sqrt{2}$，π 这样的数，如果用十进位小数来表示，都是不循环的无尽小数：

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots,\quad \pi=3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数統称为实数. 在实数范圍內, 可以进行更多种的运算, 如对于正的实数可以进行开方, 取对数, 对于任何实数可以取三角函数等. 在高等数学这一門課程中, 除了个别情况外, 所遇到的都是实数.

大家都知道, 在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題, 例如, 三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着, 又如, 数量間的比例关系与相似形有直接的联系. 通过图形我們不仅能直观地认識数量的抽象性质, 并且还可以利用图形解决一些数量的問題(如第六章中将要讲到的方程的图解法); 通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲綫的切綫). 現在我們研究实数, 也要設法将数与形結合起来.

設有一条无穷长的直綫, 习惯上都把它放在水平的位置, 在这直綫上任取一点 O, 称为原点, 在这直綫上規定好一个正方向 (习惯上規定向右的方向为正方向), 在这直綫上再規定好一个长度的单位. 这种具有原点, 正方向与长度单位的直綫叫做数軸.

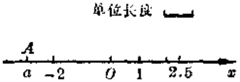


图 0.1

对于每一个实数 a, 我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应. 規定的方法是: 若 $a=0$, 則点 A 就是原点; 若 $a>0$, 則点 A 在原点之右, 且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度; 若 $a<0$, 則点 A 在原点之左, 且点 A 与原点間的距离等于 $-a(-a>0)$ 个单位长度.

反过来說, 对于数軸上每一个点 A, 我們可以規定一个实数 a 与它对应. 規定的方法是: 若点 A 是原点, 則 $a=0$; 若点 A 在原点 O 之右, 則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离); 若点 A 在原点 O 之左, 則 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数軸上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数軸上的点的性质就发生了紧密的联系.

总起来說：有理数与无理数統称为实数．每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示．在所有实数与数軸上所有点之間存在着一一对应的关系，也就是說，对于每一个实数 a，在数軸上有一个点 A 与它对应，对于数軸上每一个点 A，有一个实数 a 与它对应．这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a=\begin{cases}|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右,}\\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合,}\\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左,}\end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离，也就是綫段 $\overline{OA}$ 的长度.

数軸也称为实数軸，也簡称为軸．与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数軸上的坐标.

为了簡单計，我們时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它們，我們有时說实数 a，也有时說点 a.

数軸上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点.

显然，如实数 a 小于实数 b，則点 a 在点 b 的左方，且 $b-a$ 就是点 a 与点 b 間的距离.

現在我們进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性．任給两个有理数 $a, b(a<b)$，則在 a, b 之間至少可以找到一个有理数．例如，a, b 的算术平均数 $c=\frac{a+b}{2}$ 就是 a, b 之間的一个有理数．同样，在 a, c 之間也至少可找到一个有理数．依次类推，可知 a, b 之間可以找到无穷多个有理数．所謂有理数的稠密性就是指：不論有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之間总可以找到无穷多

个有理数，这就是說，有理点在数軸上是到处稠密的。

用同样的方法可以論证，实数也具有稠密性。

第二，实数的連續性. 既然实数与数軸上的点一一对应，可見实数充滿数軸而沒有"空隙"，这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密，但并不連續，例如$\sqrt{2}$，π 这些无理数就是有理数中的"空隙"，有理点之間有无穷多这种"空隙"。

实数的連續性是实数的一个最根本的性质。在以后的学习中常要用到这个性质。

§2. 絕对值

当我們对一个物理量进行直接測量时，常常是測不准的，有时偏大，有时偏小. 評定測量的准确度时，經常注意到的是偏离的大小，而不計較偏大了还是偏小了，处理这类問題时，常要用到实数的絕对值. 現在我們来介紹一下絕对值的定义及关于絕对值的一些性质。

定义. 对于实数 a，定义 a 的絕对值 $|a|$ 为

$$|a|=\begin{cases} a, & 若\ a>0, \\ 0, & 若\ a=0, \\ -a, & 若\ a<0. \end{cases}$$

例. $|2|=2$, $|-3.1|=3.1$, $|0|=0$.

容易看出，不論点 a 在原点的右方或左方，实数 a 的絕对值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

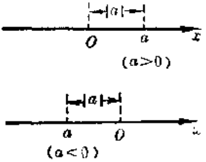


图 0.2

1. 关于絕对值的性质

以下关于絕对值的一些性质都是明显的。

(i) $|a|\geqslant 0$.

这个不等式表示 $|a|>0$ 或者 $|a|=0$.

(ii) $|-a|=|a|$.

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕对值相同。

(iii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

$a>0$ 时, 右边是等号, 左边是不等号; $a<0$ 时, 右边是不等号, 左边是等号; $a=0$ 时, 左边右边都是等号.

(iv) **对于实数 a, 如有一正数 ε, 使**

(1) $$|a|<\varepsilon,$$

则必然有

(2) $$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

其逆亦眞.

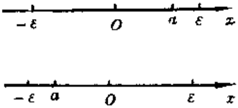


图 0.3

从几何上来看, (1) 表示点 a 与原点間的距离小于 ε, (2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之間, 所以, 它們表示相同的意义.

(v) **对于实数 a, 如有一正数 N, 使**

(3) $$|a|>N,$$

则必然有

(4) $$a>N \text{ 或 } a<-N.$$

其逆亦眞.

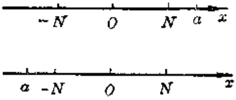


图 0.4

从几何上来看, (3) 表示点 a 与原点間的距离大于 N, (4) 表示点 a 在点 N 之右或在点 $-N$ 之左, 它們也表示相同的意义.

II. 有关絕对值的四則运算

(i) **对于任意两个实数 a, b, 恒有**

(5) $$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

证明: 根据性质(iii), 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

二式相加, 得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

根据性质(iv), 即知

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

证毕.

例. 当 a, b 同号时, (5) 式中等号成立, 如:

$$|3+5|=|3|+|5|,$$

$$|(-3)+(-5)|=|-3|+|-5|.$$

当 a, b 异号时, (5) 式中不等号成立, 如:

$$|3+(-5)|<|3|+|-5|,$$

$$|(-3)+5|<|-3|+|5|.$$

(ii) **对于任意两个实数 a, b, 恒有**

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{6}$$

证明: 因为

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证毕.

(iii) **对于任意两个实数 a, b, 恒有**

$$|ab|=|a|\cdot|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad (b\neq 0). \tag{7}$$

根据絕对值的定义, 这两个公式显然是正确的.

§3. 变量及变量的变化范圍

我們考察各种自然現象与技术过程时, 常会遇到各种各样的量, 如水庫中水的深度、丰产田的面积、汽車行駛时汽油的消耗量、机床安全运轉的时間、高炉的溫度、工厂內工人的名額等等. 这些量都有共同的特征, 即采取了一定的单位以后, 这些量都可以通过度量用数来表示. 这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中, 有的量变化, 即取不同的值, 有的量則保持一个固定的值而不变, 前者叫做变量, 后者叫做常量. 例如人造卫星与地球間的距离是一个变量; 在一定时期內, 車間里的車床台数是一个常量. 若一个量在所討論的过程中变化很小, 以至对某个实用目的来讲可以忽略不計时, 我們也把它算作是常量. 例如, 在不同的地点, 落体

的重力加速度是不同的,因而它是个变量,但在較小地区中研究落体运动时,通常将重力加速度看成常量. 因此,一个量是常量还是变量,要根据具体情况来决定.

为了控制技术过程,使它滿足生产实践中所提出的种种要求,就必須把問題中所涉及的各个变量的变化情况弄清楚. 例如,为了把电压控制在 220 伏左右,或把設备利用率提高到接近 100%,就必須弄清楚电压或設备利用率的变化情况,只有这样,才能拟定出适当的措施以达到上述目的. 所以研究变量是数学中重要的課題.

变量的性质与类型是多种多样的,可以从各个不同的角度来加以考察.钟摆与鉛垂綫間的夹角是个連續变化着的变量,它的值是有界限的,譬如說总是介于$-\frac{\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$之間. 但多边形的边数这个变量則只能取 3, 4, 5…这些正整数值,它不是連續变化的,它的值可以无限增大,它不是有界的. 由此可見,仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范圍来說,就有連續、不連續与有界、无界之分. 若就变量的变化趋势来說,也有种种不同,例如,火車从出发站开出后与出发站的距离,一般是个不断增大的变量,某个工厂产品中的次品率也許是个不断减小的变量,而地球与太阳間的距离則是时而变大、时而变小的变量. 再如就变量变化的速度来讲,也有快慢之别. 系統地研究变量的这些特点,找出它們相互联系的規律,以便利用这些規律去解决生产中的問題,这就是我們学习这門課程的目的.

在今后的討論中,为了叙述的簡便起見,經常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量,a, b, c 等字母来代表常量. 当然,这也不是一成不变的.

变量所能取得的值的范圍常可用不等式来表示. 例如,若以 θ 代表钟摆与鉛垂綫間的夹角,則按上面一段所述的情况,θ 的变化范圍可以用不等式

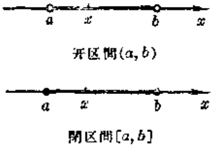
$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

来表示。

为了看起来更加清楚，我們还常采用下述的几何表示法，把变量 x 所能取的每一个值都用数軸上的一个点来表示，于是变量就可用变点即通常所說的动点来表示，而常量就相当于数軸上的一个定点了。这时，变量的变化范圍也可在数軸上以图形表示出来。例如，若变量 x 的变化范圍在 a, b 二数之間，即 $a<x<b$，那么，相应的动点就在数軸上的点 a 与点 b 之間变化，这些点构成一个不包括端点在内的綫段，我們称之为开区間，并以記号 (a, b) 来記它。正像我們常把数 a 叫做点 a 一样，我們也常把不等式

$$a<x<b$$

叫做开区間。若变量 x 的变化范圍在 a、b 二数之間，且能取 a 与 b 二値，即 $a\leqslant x\leqslant b$，相应的动点就在数軸上构成一个包括端点在内的綫段，我們称之为閉区間 $[a, b]$。



开区間 (a, b)

閉区間 $[a, b]$

图 0.5

我們也常把不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

叫做閉区間。

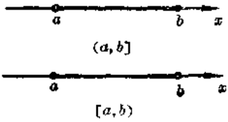
变量 x 的变化范圍也可以是半开区間

$$a<x\leqslant b,$$

記作 $(a, b]$（見图 0.6 上图），或半开区間

$$a\leqslant x<b,$$

記作 $[a, b)$（見图 0.6 下图）。



$(a, b]$

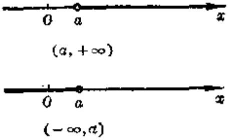
$[a, b)$

图 0.6

变量 x 的变化范圍也可以是无穷区間

$$x>a,\quad x\geqslant a,\quad x<a \text{ 或 } x\leqslant a,$$

分別記作 $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ 或



$(a, +\infty)$

$(-\infty, a)$

图 0.7

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值, 在这种情况下, 我們将变量 x 的变化范圍記作

$$-\infty < x < +\infty,$$

亦可記作无穷区間 $(-\infty, +\infty)$.

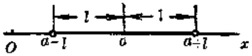


图 0.8

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区間叫做点 a 的 l 邻域. 这是以后經常要討論到的一种区間. 这种区間的端点是 $a-l$ 与 $a+l$, 因此, 这种区間可用不等式

(1) $$a-l < x < a+l$$

来表示. 这种区間还有一种常見的表示法: 将(1) 式改写为

(2) $$-l < x-a < l,$$

根据絕对值的性质(iv), (2)式相当于

(3) $$|x-a| < l.$$

所以, 点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示.

不等式(3)本身也有明显的几何意义. 容易看出, 不論 x 和 a 取什么值, $|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 間的距离. 由此可知, 不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之間的距离小于 l(参看图 0.8).

例一. 点 2 的 l 邻域$\left(l=\frac{5}{2}\right)$, 可表示为

$$2-\frac{5}{2} < x < 2+\frac{5}{2} \quad 即 \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2},$$

这个区間也可表示为

$$|x-2| < \frac{5}{2}.$$

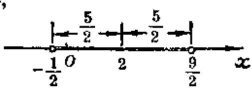


图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区間, 动点 x 位于这区間内时, 动点 x 与定点 2 的距离小于 $\frac{5}{2}$, 也就是 $|x-2| < \frac{5}{2}$.