

高等学校教学参考书

高等数学

(基础部分)

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出版前言

本书是按1964年8月第一版重印的,重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版,上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书可作为高等工业院校的教学参考书,也可供有关的工程技术人员参考。

高等数学

(基础部分)

上册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 J3012·0184 开本 850×1168 1/32 印张 15

字数 335,000 印数199001—369000 定价(5)¥1.40

1964年8月第1版

1978年12月第6次印刷

出版前言

本书是按1961年12月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上、下两册出版，下册内容是矢量代数、空间解析几何、多元函数微积分学、常微分方程与级数。

本书可作为高等工业院校的教学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高等数学

(基础部分)

下册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13042·0185 开本 850×1168 1/32 印张 12 1/16

字数 335,000 印数 39,001—189,000 定价(5)¥1.20

1951年12月第1版 1973年9月第3次印刷

11000

高等学校教学参考书



高等数学

(基础部分)

下册

8413=113

清华大学数学教研组编



人民教育出版社



上册目录

预备知識.....	1
§ 1. 实数与数轴(1) § 2. 绝对值(4) § 3. 变量及变量的变化范围(6)	
§ 4. 充分条件与必要条件(10)	
第一章 平面解析几何.....	14
§ 1. 轴上的有向线段(14) § 2. 平面上的直角坐标及其基本问题(20)	
§ 3. 曲线与方程. 圆的方程(25) § 4. 直线的方程(37) § 5. 关于直线的一些问题(42)	
§ 6. 椭圆的标准方程及其性质(51) § 7. 双曲线的标准方程及其性质(57)	
§ 8. 抛物线的标准方程及其性质(62) § 9. 坐标的变换(66) § 10. 一般二次曲线的研究(72)	
§ 11. 极坐标(81) § 12. 曲线的参数方程(92)	
第二章 函数.....	103
§ 1. 函数概念(103) § 2. 函数表示法(108) § 3. 反函数. 多值函数(114)	
§ 4. 初等函数(119) § 5. 双曲线函数(126)	
第三章 极限.....	133
§ 1. 极限概念导引(133) § 2. 整标函数的极限(数列的极限)(138) § 3. 连续自变量的函数的极限(150)	
§ 4. 无穷大量. 无穷小量. 有界函数(162) § 5. 关于无穷小量的运算定理. 极限运算法则(169)	
§ 6. 极限存在的准则. 两个重要的极限(179) § 7. 无穷小量的比较(191)	
第四章 函数的连续性.....	199
§ 1. 函数在一点处的连续性. 间断点(199) § 2. 连续函数及其运算(206)	
§ 3. 初等函数的连续性(208) § 4. 闭区间上连续函数的性质(214)	
第五章 导数与微分.....	217
§ 1. 函数的变化率. 导数概念(217) § 2. 导数的几何解释(226) § 3. 求函数的导函数的方法——函数的微分法(229)	
§ 4. 微分概念及其性质(248) § 5. 微分在近似计算中的应用(252)	
§ 6. 高阶导数(265) § 7. 由参数方程所确定的函数的微分法(270)	
第六章 导数与微分的应用.....	276
§ 1. 几个基本定理(276) § 2. 求未定型的极限(288) § 3. 台劳公式(297)	

(v)

§ 4. 函数研究及函数作图(311) § 5. 曲率, 渐屈线及渐伸线(336) § 6. 方程的近似解(351)

第七章 不定积分.....360

§ 1. 原函数与不定积分概念(360) § 2. 基本积分表, 不定积分的简单性质(364) § 3. 变量替换法(372) § 4. 分部积分法(378) § 5. 有理函数的不定积分(385) § 6. 三角函数有理式的不定积分(393) § 7. 一些含有根式的不定积分(396) § 8. 补充说明(400)

第八章 定积分及其应用, 旁义积分402

§ 1. 定积分概念(402) § 2. 定积分的性质(413) § 3. 定积分与原函数的关系(418) § 4. 定积分的变量替换法则及分部积分法则(425) § 5. 定积分的近似算法(431) § 6. 定积分的几何应用(437) § 7. 定积分的物理及力学应用(454) § 8. 旁义积分(461)

下册目录

第九章 空間解析几何·矢量代数.....475

§ 1. 二阶行列式·两个三元一次齐次方程(475) § 2. 三阶行列式·高阶行列式(482) § 3. 空間直角坐标及其基本問題(497) § 4. 矢量·矢量的加减法(501) § 5. 数量与矢量的积(504) § 6. 矢量在一轴上的投影(506) § 7. 矢量在坐标轴上的投影·矢量的投影表示式(510) § 8. 用矢量在坐标轴上的投影来表示矢量的模与矢量的方向余弦(512) § 9. 两个矢量的数积(515) § 10. 两个矢量的矢积(520) § 11. 三个矢量的混合积(524) § 12. 曲面与方程·空間曲綫的方程(527) § 13. 平面的方程(537) § 14. 有关平面的一些問題(542) § 15. 直綫的方程(546) § 16. 有关直綫、平面的一些問題(551) § 17. 关于三个三元一次方程組的解的討論(557) § 18. 二次曲面的标准方程(565)

第十章 多元函数及其微分法.....571

§ 1. 多元函数的基本概念(571) § 2. 二元函数的极限和連續性(580) § 3. 偏导数(584) § 4. 全微分(587) § 5. 复合函数的微分法(599) § 6. 隐函数的微分法(603) § 7. 函数的参数表示法及其微分法(613) § 8. 高阶偏导数(618) § 9. 多元函数的极值(623) § 10. 二元函数的台劳公式(633)

第十一章 常微分方程.....636

§ 1. 基本概念(636) § 2. 一阶微分方程(640) § 3. 一阶方程近似解法(658) § 4. 正交軌綫(653) § 5. 高阶方程的特殊类型(666) § 6. 高阶綫性方程(671) § 7. 常系数綫性方程(681) § 8. 常微分方程組(694)

第十二章 重积分.....703

§ 1. 二重积分的概念(703) § 2. 二重积分的基本性质(707) § 3. 二重积分在直角坐标系中的計算方法——累次积分法(708) § 4. 极坐标系中二重积分的計算方法(718) § 5. 三重积分概念(722) § 6. 三重积分在直角坐标系中的計算方法——累次积分法(723) § 7. 柱坐标系及球坐标系中的三重积分計算法(728) § 8. 二重积分的几何应用(737) § 9. 二重积分与三重积分的物理应用(740)

第十三章 曲綫积分与曲面积分.....746

§ 1. 对弧长的曲线积分(746)	§ 2. 对坐标的曲线积分(751)	§ 3. 沿平面闭路的曲线积分·格林定理(762)
§ 4. 曲线积分与路径无关的条件(766)	§ 5. 全微分的准则·原函数的求法(773)	§ 6. 全微分方程的解(778)
§ 7. 对面积的曲面积分(779)	§ 8. 对坐标的曲面积分(783)	§ 9. 奥斯特罗格拉茨基公式(简称奥氏公式)(791)
§ 10. 斯托克斯公式(794)	§ 11. 空间曲线积分与路径无关的条件(794)	

第十四章 级数.....797

§ 1. 常数项级数概念(797)	§ 2. 级数的基本性质(800)	§ 3. 正项级数收敛性的判别法(802)
§ 4. 任意项级数(808)	§ 5. 函数项级数的一般概念(811)	§ 6. 幂级数(823)
§ 7. 台劳级数(834)	§ 8. 付立叶级数(853)	

預备知識

§ 1. 实数与数軸

数,最初产生于点算物件的个数,最基本的数是自然数: 1, 2, 3, ...

数的运算中,最简单的是加法运算。事实上,点算物件的个数也体现着一个一个地累加。

由于生产的逐渐发展,人们对客观事物的認識逐渐深入,数的运算扩充为四則运算,数的范围亦由自然数扩充到整数: 0, ± 1 , ± 2 , ..., 再扩充到有理数。所谓有理数,是指 $\frac{q}{p}$ 这种形式的数,其中 p, q 都是整数,且 $p \neq 0$ 。有理数当然包括了所有整数,这是因为,当 $p=1$ 时,有理数就简化为整数。

有理数可以用十进位小数来表示,这些小数或者是有尽的,或者是循环的。例如:

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}, \quad \frac{22}{7} = 3.14285\dot{7}.$$

反过来,任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数。

在实际生活中,常要测量一些物理量,如长度、面积、时间、温度、重量等,取了一定的单位以后,这些量都可以被测量,测量的结果用数来表示。但有些量不能用有理数来表示,例如,对于两直角边皆为单位长度的直角三角形,其斜边的长度为 $\sqrt{2}$ 个单位长度, $\sqrt{2}$ 不是一个有理数,又如半径为单位长度的圆,它的面积是 π 个单位面积(单位长度的平方), π 也不是一个有理数。像 $\sqrt{2}$, π 这样的数,如果用十进位小数来表示,都是不循环的无尽小数:

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots, \pi=3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数。

有理数与无理数統称为实数。在实数范围内，可以进行更多种的运算，如对于正的实数可以进行开方，取对数，对于任何实数可以取三角函数等。在高等数学这一門課程中，除了个别情况外，所遇到的都是实数。

大家都知道，在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題，例如，三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着，又如，数量間的比例关系与相似形有直接的联系。通过图形我們不仅能直观地認識数量的抽象性质，并且还可以利用图形解决一些数量的問題（如第六章中将要讲到的方程的图解法）；通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題（如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲线的切线）。現在我們研究实数，也要設法将数与形結合起来。

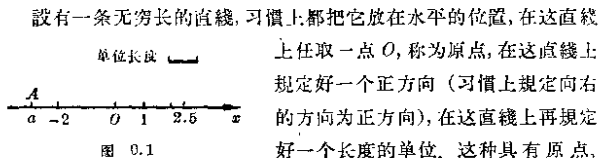


图 0.1

正方向与长度单位的直线叫做数轴。

对于每一个实数 a ，我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应。規定的方法是：若 $a=0$ ，則点 A 就是原点；若 $a>0$ ，則点 A 在原点之右，且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度；若 $a<0$ ，則点 A 在原点之左，且点 A 与原点間的距离等于 $-a$ ($-a>0$) 个单位长度。

反过來說，对于数軸上每一个点 A ，我們可以規定一个实数 a 与它对应。規定的方法是：若点 A 是原点，則 $a=0$ ；若点 A 在原点 O 之右，則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离)；若点 A 在原点 O 之左，則 $a=-|OA|$ 。

这样一来，所有实数与数轴上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数轴上的点的性质就发生了紧密的联系。

总起来说：有理数与无理数统称为实数。每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示。在所有实数与数轴上所有点之间存在着——对应的关系，也就是说，对于每一个实数 a ，在数轴上有一个点 A 与它对应，对于数轴上每一个点 A ，有一个实数 a 与它对应。这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a \rightarrow \begin{cases} |OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右,} \\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合,} \\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左,} \end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之间的距离，也就是线段 $\overline{OA}$ 的长度。

数轴也称为实数轴，也简称为轴。与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数轴上的坐标。

为了简单计，我们时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它们，我们有时说实数 a ，也有时说点 a 。

数轴上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点。

显然，如实数 a 小于实数 b ，则点 a 在点 b 的左方，且 $b-a$ 就是点 a 与点 b 间的距离。

现在我们进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性。任给两个有理数 $a, b (a < b)$ ，则在 a, b 之间至少可以找到一个有理数。例如， a, b 的算术平均数 $c = \frac{a+b}{2}$ 就是 a, b 之间的一个有理数。同样，在 a, c 之间也至少可找到一个有理数。依次类推，可知 a, b 之间可以找到无穷多个有理数。所谓有理数的稠密性就是指：不论有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之间总可以找到无穷多

个有理数,也就是說,有理点在数軸上是到处稠密的.

用同样的方法可以論证,实数也具有稠密性.

第二,实数的連續性. 既然实数与数軸上的点一一对应,可見实数充滿数軸而沒有“空隙”,这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密,但并不連續,例如 $\sqrt{2}, \pi$ 这些无理数就是有理数中的“空隙”, 有理点之間有无穷多这种“空隙”.

实数的連續性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

§ 2. 絕對值

当我们对一个物理量进行直接测量时, 常常是测不准的, 有时偏大, 有时偏小. 評定测量的准确度时, 經常注意到的是偏离的大小, 而不計較偏大了还是偏小了, 处理这类問題时, 常要用到实数的絕對值. 現在我們来介紹一下絕對值的定义及关于絕對值的一些性质.

定义. 对于实数 a , 定义 a 的絕對值 $|a|$ 为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a > 0, \\ 0, & \text{若 } a = 0, \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

例. $|2| = 2, |-3.1| = 3.1, |0| = 0.$

容易看出, 不論点 a 在原点的右方或左方, 实数 a 的絕對值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

1. 关于絕對值的性质

以下关于絕對值的一些性质都是明显的.

(i) $|a| \geq 0.$

这个不等式表示 $|a| > 0$ 或者 $|a| = 0.$

(ii) $|-a| = |a|.$

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕對值相同.

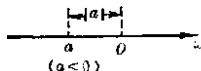
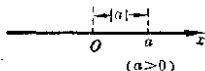


图 0.2

$$(iii) \quad |a| \leq a \leq |a|.$$

$a > 0$ 时, 右边是等号, 左边是不等号; $a < 0$ 时, 右边是不等号, 左边是等号; $a = 0$ 时, 左边右边都是等号.

(iv) 对于实数 a , 如有一正数 ε , 使

$$(1) \quad |a| < \varepsilon,$$

則必然有

$$(2) \quad -\varepsilon < a < \varepsilon.$$

其逆亦真.

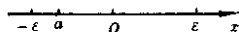
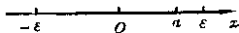


图 0.3

从几何上来看, (1) 表示点 a 与原点间的距离小于 ε , (2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之间, 所以, 它们表示相同的意义.

(v) 对于实数 a , 如有一正数 N , 使

$$(3) \quad |a| > N,$$

則必然有

$$(4) \quad a > N \text{ 或 } a < -N.$$

其逆亦真.

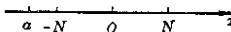
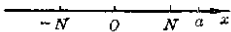


图 0.4

从几何上来看, (3) 表示点 a 与原点间的距离大于 N , (4) 表示点 a 在点 N 之右或在点 $-N$ 之左, 它们也表示相同的意义.

II. 有关绝对值的四则运算

(i) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(b) \quad |a+b| \leq |a| + |b|.$$

证明: 根据性质(iii), 有

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

二式相加, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

根据性质(iv), 即知

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

证毕.

例. 当 a, b 同号时, (5) 式中等号成立, 如:

$$\begin{aligned} |3+5| &= |3|+|5|, \\ |(-3)+(-5)| &= |-3|+|-5|. \end{aligned}$$

当 a, b 异号时, (5) 式中不等号成立, 如:

$$\begin{aligned} |3+(-5)| &< |3|+|-5|, \\ |(-3)+5| &< |-3|+|5|. \end{aligned}$$

(ii) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(6) \quad |a-b| \geq |a|-|b|.$$

证明: 因为

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b| \geq |a|-|b|. \quad \text{证毕.}$$

(iii) 对于任意两个实数 a, b , 恒有

$$(7) \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0).$$

根据绝对值的定义, 这两个公式显然是正确的.

§ 3. 变量及变量的变化范围

我們考察各种自然现象与技术过程时, 常会遇到各种各样的量, 如水库中水的深度、丰产田的面积、汽车行驶时汽油的消耗量、机床安全运转的时间、高炉的温度、工厂内工人的名额等等. 这些量都有共同的特征, 即采取了一定的单位以后, 这些量都可以通过度量用数来表示. 这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中, 有的量变化, 即取不同的值, 有的量则保持一个固定的值而不变, 前者叫做变量, 后者叫做常量. 例如人造卫星与地球间的距离是一个变量; 在一定时期内, 车间里的车床台数是一个常量. 若一个量在所讨论的过程中变化很小, 以至对某个实用目的来讲可以忽略不计时, 我們也把它算作是常量. 例如, 在不同的地点, 落体

的重力加速度是不同的,因而它是个变量,但在较小地区中研究落体运动时,通常将重力加速度看成常量。因此,一个量是常量还是变量,要根据具体情况来决定。

为了控制技术过程,使它满足生产实践中所提出的种种要求,就必须把問題中所涉及各个变量的变化情况弄清楚。例如,为了把电压控制在 220 伏左右,或把设备利用率提高到接近 100%,就必须弄清楚电压或设备利用率的变化情况,只有这样,才能拟定出适当的措施以达到上述目的。所以研究变量是数学中重要的课题。

变量的性质与类型是多种多样的,可以从各个不同的角度来加以考察。钟摆与铅垂线间的夹角是个连续变化着的变量,它的值是有界限的,譬如說总是介于 $-\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 之間。但多边形的边数这个变量則只能取 3, 4, 5... 这些正整数值,它不是连续变化的,它的值可以无限增大,它不是有界的。由此可见,仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范围來說,就有连续、不连续与有界、无界之分。若就变量的变化趋势來說,也有种种不同,例如,火車从出发站开出后与出发站的距离,一般是个不断增大的变量,某个工厂产品中的次品率也許是个不断减小的变量,而地球与太阳間的距离則是时而变大、时而变小的变量。再如就变量变化的速度来讲,也有快慢之别。系統地研究变量的这些特点,找出它們相互联系的規律,以便利用这些規律去解决生产中的問題,这就是我們学习这门课程的目的。

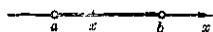
在今后的討論中,为了叙述的簡便起見,經常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量, a, b, c 等字母来代表常量。当然,这也不是一成不变的。

变量所能取得的值的范围常可用不等式来表示。例如,若以 θ 代表钟摆与铅垂线間的夹角,則按上面一段所述的情况, θ 的变化范围可以用不等式

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

来表示.

为了看起来更加清楚, 我们还常采用下述的几何表示法. 把变量 x 所能取的每一个值都用数轴上的一个点来表示. 于是变量就可用变点即通常所说的动点来表示, 而常量就相当于数轴上的一个定点了. 这时, 变量的变化范围也可在数轴上以图形表示出来. 例如, 若变量 x 的变化范围在 a, b 二数之间, 即 $a < x < b$, 那么, 相应的动点就在数轴上的点 a 与点 b 之间变化, 这些点构成一个不包括端点在内的线段, 我们称之为开区间, 并以记号 (a, b) 来记它. 正像我们常把数 a 叫做点 a



开区间 (a, b)



闭区间 $[a, b]$

图 0.5

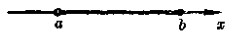
我们也常把不等式

一样, 我们也常把不等式

$$a < x < b$$

叫做开区间. 若变量 x 的变化范围在 a, b 二数之间, 且能取 a 与 b 二值, 即 $a \leq x \leq b$, 相应的动点就在数轴上构成一个包括端点在内的线段, 我们称之为闭区间 $[a, b]$.

$$a \leq x \leq b$$

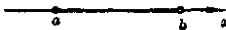


$(a, b]$

叫做闭区间.

变量 x 的变化范围也可以是半开区间

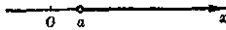
$$a < x \leq b,$$



$[a, b)$

记作 $(a, b]$ (见图 0.6 上图), 或半开区间

$$a \leq x < b,$$

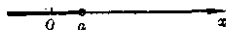


$(a, +\infty)$

记作 $[a, b)$ (见图 0.6 下图).

变量 x 的变化范围也可以是无穷区间

$$x > a, x \geq a, x < a \text{ 或 } x \leq a,$$



$(-\infty, a)$

分别记作 $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, a)$ 或

图 0.7

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值, 在这种情况下, 我们将变量 x 的变化范围记作

$$-\infty < x < +\infty,$$

亦可记作无穷区间 $(-\infty, +\infty)$.

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区间叫做点 a 的 l 邻域. 这是以后

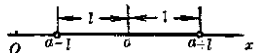


图 0.8

经常要讨论到的一种区间. 这种区间的端点是 $a-l$ 与 $a+l$, 因此, 这种区间可用不等式

$$(1) \quad a-l < x < a+l$$

来表示. 这种区间还有一种常见的表示法: 将(1)式改写为

$$(2) \quad -l < x-a < l,$$

根据绝对值的性质(iv), (2)式相当于

$$(3) \quad |x-a| < l.$$

所以, 点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示.

不等式(3)本身也有明显的几何意义. 容易看出, 不论 x 和 a 取什么值, $|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 间的距离. 由此可知, 不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之间的距离小于 l (参看图 0.8).

例一. 点 2 的 l 邻域 ($l = \frac{5}{2}$), 可表示为

$$2 - \frac{5}{2} < x < 2 + \frac{5}{2} \quad \text{即} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2},$$

这个区间也可表示为

$$|x-2| < \frac{5}{2}.$$

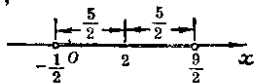


图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区间, 动点 x 位于这区间内时, 动点 x 与定点 2 的距离小于 $\frac{5}{2}$, 也就是 $|x-2| < \frac{5}{2}$.