

新編数学ハンドブック

応用編

小松勇作
編集



朝倉書店

新版 数学ハンドブック—応用編—

1972年9月25日 初版第1刷
1981年8月10日 第6刷

編者 小松勇作

発行者 朝倉邦造

発行所 株式会社 朝倉書店

東京都新宿区新小川町2-10

郵便番号 162

電話 03(260)0141

振替口座 東京 6-8673 番

〈検印省略〉

© 1972 〈無断複写・転載を禁ず〉
3041-110005-0032

日東紙工・渡辺製本

まえがき

近年の科学技術の発展は、質的にも量的にもまったくいちじるしい。時々刻々と蓄積される人類の知的所産は整理にいとまがないほどであり、多くの情報が種々雑多な形でたえず流されつづけている。世はあげて情報化社会への突入という様相を呈してきたといえよう。

その中にあって、数学もまたその基礎理論だけにとどまらず、応用方面にわたって広範な分野を開拓しつつある。数学はそれ自体として麗しい理論体系であることはいうまでもない。しかも、それと同時に、他の諸分野において有力な手段として活用されている。思考の自由と成果の普遍性に標榜される数学の特性は、いかなる分野においても適応性をそなえているわけである。この点は近年ことに切実にひろく認識されてきたところである。

しかしながら、具体的に数学を学習し利用しようという観点からすると、その内容は重点項目に限ってすら、あまりにも多彩であり過ぎる。ことに、数学を応用するという立場からは、指針をえることですので手をこまぬくほどである。

この新編 数学ハンドブックは、このような現状に対処するために企画されたものである。内容の構成と分担執筆者については全面的に新規企画の形をとり、さらに素材の多様化に伴って基礎編と応用編とに分冊した。

内容の程度としては、大学教養課程から理工系の専門課程にいたる広い範囲にわたり、理工系を志す学生をはじめ、教育者や研究者にとって、学習のための事典ないしは備忘録として活用されることを期待している。

各章は、それぞれの専門的な研究者の分担執筆に成っている。記述の形式としては、一般的な解説のほか、定理と証明、例題と解、例などを織りまぜ、

応用上の便をもはかっている。さらに、編集の観点から、全編を通じて、関連事項の間の有機的な引用をはかるとともに、表現をなるべく統一することに意を用いた。しかし、他面では、執筆者の個性的な趣好も生かされている。また、巻末にはかなり詳細な索引がついている。

本書ができあがるまでに、分担執筆された諸氏の協力はもとより、酒井良君が全編にわたる入念な校正に努力された。また、朝倉書店編集部の各位は本書の刊行に尽力された。これらの諸氏に深く感謝の意を表したい。

1972 年秋

編集者しるす

執筆 者

(執筆順)

東京教育大学教授 理学博士	茂 ^も	木 ^ぎ	勇 ^{いさむ}
岡山大学教授 理学博士	田 ^た	代 ^{しろ}	嘉 ^{よし} 宏 ^{ひろ}
東京工業大学教授 理学博士	小 ^こ	松 ^{まつ}	勇 ^{ゆう} 作 ^{さく}
東京工業大学助教授 理学博士	吹 ^{すい}	田 ^た	信 ^{のぶ} 之 ^{ゆき}
早稲田大学教授 理学博士	杉 ^{すぎ}	山 ^{やま}	昌 ^{しょう} 平 ^{へい}
三重大学助教授 理学博士	広 ^{ひろ}	海 ^み	玄 ^{げん} 光 ^{こう}
大阪府立大学教授 理学博士	梯 ^{かげはし}	鉄 ^{てつ} 次 ^じ 郎 ^{ろう}	
横浜国立大学助教授 理学博士	吉 ^{よし}	原 ^{はら}	健 ^{けん} 一 ^{いち}
大阪大学教授 理学博士	坂 ^{さか}	口 ^{ぐち}	実 ^{みのる}
神戸大学教授 理学博士	井 ^い	関 ^{せき}	清 ^{きよ} 志 ^し
大阪大学教授 理学博士	西 ^{にし}	田 ^だ	俊 ^{とし} 夫 ^お

目 次

I. ベクトル解析 [茂木 勇]

1. ベクトルの代数	2.5. ベクトル場の発散と回転
1.1. ベクトルとその演算	25
1.2. 共線・共面・基底	3
1.3. ベクトルの内積	8
1.4. ベクトルの外積・三重積	11
2. ベクトル関数の微分法	2.6. grad, div, rot に関する 公式
2.1. 1変数のベクトル関数の 微分法	28
2.2. 2変数のベクトル関数・ 曲面	3. ベクトルの積分法
2.3. スカラー場・ベクトル場	32
2.4. 方向微分係数	35
	3.3. 曲線座標・体積分
	39
	4. 積分定理
	4.1. 発散定理(ガウスの定理) とその応用
	41
	4.2. ストークスの定理
	43
	4.3. 発散と回転の意味
	44

II. 特殊曲線・特殊曲面 [田代 嘉宏]

1. 特殊平面曲線	2.1. 曲線の曲率
1.1. 包絡線・縮閉線・伸開線	63
1.2. 特殊な代数曲線	2.2. 空間の螺線
1.3. 垂足曲線・一般シッソイ ド	66
1.4. 輪転曲線	71
1.5. 懸垂線・トラクトリック ス	72
1.6. 螺線	74
1.7. リサージュの曲線	3. 特殊曲面
2. 特殊空間曲線	3.1. 回転面
	76
	3.2. 線織面
	78
	3.3. 包絡面・可展面
	81
	3.4. 定曲率曲面
	84
	3.5. 極小曲面
	85

III. 関数の近似 [小松 勇作・吹田 信之]

1. 多項式近似・有理関数近似	2.4. 固有関数系	97
1.1. ベキ級数・三角級数	87	
1.2. ワイエルシュトラスの近似定理	89	
1.3. チェビシェフ近似	90	
1.4. 複素領域での近似	92	
2. 直交関数系		
2.1. 正規直交系	93	
2.2. 直交多項式系	95	
2.3. 完全性	96	
3. 漸近級数		
3.1. 漸近級数	100	
3.2. 一般性質	103	
3.3. 具体例	105	
4. 積分の評価		
4.1. ラプラス積分	109	
4.2. 鞍点法	111	
4.3. 具体例	116	

IV. 応用関数方程式 [杉山 昌平]

1. 差分方程式	3.3. 安定性	160
1.1. 主要解	123	
1.2. 漸近展開	124	
1.3. 差分不等式	125	
1.4. 安定性と有界性	128	
1.5. 周期解	135	
2. 非線形微分方程式		
2.1. n 次元線形系	137	
2.2. 摂動系	141	
2.3. リアプノフの第二方法	147	
3. 関数微分方程式		
3.1. 関数微分方程式	151	
3.2. 初期値問題	151	
4. 積分微分方程式		
4.1. 種属共存	166	
4.2. 2階積分微分方程式	167	
4.3. 翼形	167	
4.4. 制御問題	168	
4.5. その他	169	
5. 最適制御		
5.1. 最大原理	169	
5.2. 線形系	172	
5.3. 可制御性	173	
5.4. 離散系	174	

V. 演算子法 [広海 玄光]

1. 演算子法の発展	2.1. 意味	175
1.1. 演算子	175	
1.2. 演算子法	175	
2. ヘビサイド演算子法		
2.1. 演算規約	176	
2.2. 応用例	178	
3. ラプラス変換		

目	次	vii
3.1. ラプラス変換……………	178	
3.2. 演算法則……………	179	
3.3. ラプラス変換とヘビサイド演算子法との関係……	181	
4. ミクシンスキー演算子法		
4.1. 演算子の導入……………	182	
4.2. 微分演算子……………	184	
4.3. 不連続関数と演算子……	186	
4.4. 演算子列と演算子級数……	189	
4.5. 演算子値関数……………	189	
5. 超関数と演算子		
5.1. 超関数とその微分……………	193	
5.2. 超関数と演算子との関係…	195	
6. 応用		
6.1. 常微分方程式……………	195	
6.2. 差分方程式……………	202	
6.3. 偏微分方程式……………	205	
6.4. 積分方程式……………	208	

VI. 数 値 解 析 [梯 鉄次郎]

1. 補間法と近似		
1.1. 差分(定義)……………	212	
1.2. 差分商(階差商)……………	213	
1.3. ニュートンの補間公式……	216	
1.4. 等間隔補間……………	218	
1.5. ラグランジュの補間公式…	221	
1.6. 三角多項式による補間……	223	
1.7. 最良近似……………	226	
2. 数値積分		
2.1. ニュートン・コートの数値積分……………	228	
2.2. ガウスの数値積分……………	233	
2.3. チェビシェフ型の数値積分……………	240	
3. 代数方程式の解法		
3.1. 連立1次方程式・消去法…	242	
3.2. 反復法による連立1次方程式の解法……………	245	
3.3. 共役勾配法……………	247	
3.4. 代数方程式の数値解法……	250	
4. 常微分方程式の数値解法		
4.1. 常微分方程式の数値解法…	254	
4.2. 出発値の計算法……………	255	
4.3. 前進型解法……………	257	
4.4. 反復型解法……………	260	
4.5. 差分方程式と安定性……	262	

VII. 統 計 [吉原 健一]

1. 基礎的事項		
1.1. よく用いられる確率分布…	265	
1.2. よく用いられる情報量……	273	
2. 標本分布		
2.1. 母集団と標本と統計量……	275	
2.2. 一般の母集団からの統計量の分布……………	277	
2.3. 正規母集団からの統計量の分布……………	280	
2.4. 特殊な統計量……………	282	
3. 統計的推測 (I)		
3.1. 推定の問題……………	285	
3.2. 点推定……………	285	
3.3. 区間推定法……………	288	
3.4. ノン・パラメトリック推定……………	292	

4. 統計的推測 (II)	
4.1. 検定の考え方	293
4.2. 母数の検定	294
4.3. ノン・パラメトリック検定	298
5. 統計的推測 (III)	
5.1. 統計的決定関数論 (非逐次)	301
5.2. 確率過程の推測	304
5.3. 逐次解析	306

6. 実験計画	
6.1. 線形仮説の検定	307
6.2. 分散分析法	308
6.3. 回帰分析	311
7. 標本調査法	
7.1. 標本調査の考え方	311
7.2. 任意抽出法	311
7.3. 集落抽出法と多段抽出法	312
7.4. 層化抽出法	313

VIII. オペレーションズ・リサーチ [坂口 実]

1. オペレーションズ・リサーチの意義・目的と方法	314	原理	329
1.1. OR の意義と目的	314	4.2. 縮小変換と基本的な関数方程式	332
1.2. OR の方法と数理計画法	314	4.3. その他の関数方程式	334
2. 線形計画法	315	4.4. 経済分析と動的計画	335
2.1. 線形計画法における双対性	317	5. 待ち行列の理論	336
2.2. シンプレックス法	321	5.1. 待ち行列過程	336
3. 非線形計画法	325	5.2. $M/M/c$ 型モデル	338
4. 動的計画法	328	5.3. 積分方程式による接近	340
4.1. 多段決定問題と最適性の		6. 順序づけの問題	342
		7. ゲームの理論	345

IX. 計算機 [井関 清志]

1. 計算機の歴史	350	要素	367
2. 計算可能性	351	4.2. 計算機における情報の表現	369
3. 抽象計算機	357	4.3. 入力・出力装置	373
3.1. シェファードソン・スターギス機械	359	4.4. 記憶装置	375
3.2. チューリング機械	361	4.5. 制御装置・演算装置	376
3.3. ワン機械	366	4.6. 演算と制御	381
4. 電子計算機のハードウェア	367	5. プログラミングとその言語	383
4.1. デジタル計算機の構成		5.1. FORTRAN	384

5.2. ALGOL	387	6. アナログ計算機	388
------------------	-----	------------------	-----

X. 情 報 理 論 〔西田 俊夫〕

1. はじめに	391	4. 情報路	409
2. 情報量	392	4.1. 伝達確率	409
2.1. 情報量とエントロピー	392	4.2. 容量	412
2.2. エントロピーの性質	395	5. 符号復元	415
2.3. 獲得情報量	398	5.1. 最尤法	415
3. 符号化	401	5.2. 誤り修正の符号	418
3.1. 復元可能な符号化	401	5.3. シャノンの基本定理	420
3.2. 最適符号化	404	6. 情報源	422

参 考 書	425
-------	-----

付 表 〔広海 玄光・小松 勇作〕

ラプラス変換表・演算子関数表	432	F分布	448
常用対数表	434	フィッシャーの z 変換	450
三角函数表	436	二項係数	451
ガンマ函数の常用対数表	440	諸係数	452
正規分布	442	定数値の表	453
χ^2 分布	446	特殊函数のグラフ	454
t 分布	447		

索 引

人名索引	455
事項索引	458

基礎編目次

I. 代数学・整数論	菅 野 恒 雄
II. 幾何学	石 原 繁
III. 微分学	猪 狩 惺
IV. 積分学	渡 利 千 波
V. 函数論	松 本 幾久二
VI. 位相数学	竹之内 脩
VII. 常微分方程式	大久保 謙二郎
VIII. 積分方程式・変分法	小 沢 満
IX. 特殊級数・積分変換	小 松 勇 作
X. 特殊函数	西 宮 範
XI. 偏微分方程式	{ 平 沢 義 一 西 本 敏 彦 魚 返 正
XII. 確率	

I. ベクトル解析

1. ベクトルの代数

1.1. ベクトルとその演算

線分 PQ に対して、 P から Q へ向かう方向に向きをつけて考えたとき、これを $\overrightarrow{PQ}$ で表わし、 P を始点、 Q を終点とするベクトルという。二つのベクトル $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P'Q'}$ があって、 $\overrightarrow{PQ}$ を平行移動して P を P' に重ねたとき、同時に Q が Q' に重なるならば、これらのベクトルは等しいといい、そのことを $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ で表わす。つまり、同じ向きに平行で、長さの等しい有向線分は同じベクトルを表わす。ベクトルは、有向線分の向きと長さだけに注目して、その位置を度外視したものである。そこで、ベクトルを表わすには、その始点がどこにあるかを明示しないで、一つの文字を用いて a または $\vec{a}$ のように表わし、特に始点が P 、終点が Q であるときは $a = \overrightarrow{PQ}$ とかく。もちろん、ベクトル a の始点 P を定めると、その終点 Q は確定するから、 $a = \overrightarrow{PQ}$ のときは

$$P + a = Q$$

とかくことにする。この表わし方は、ベクトルの意味をよく伝えている。また、 $a = \overrightarrow{PQ}$ のとき、線分 PQ の長さは始点 P がどこにあっても同じであるから、これを $|a|$ または $|\overrightarrow{PQ}|$ で表わし、これをそのベクトルの大きさという。 $a = \overrightarrow{PQ}$ のとき、 $\overrightarrow{QP}$ は a と大きさが等しく、向きが反対のベクトルを定める。このベクトルを $-a$ で表わす。特に始点と終点が一致する場合は一点になるが、これもベクトルの特別の場合と考えて零ベクトルとよび、 0 で表わす。零ベクトルは大きさ $|0|$ は 0 で、方向は任意である。

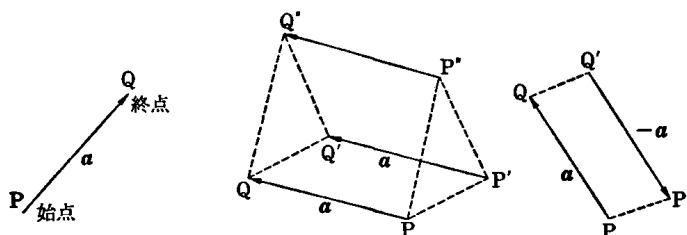


図 1.1

二つのベクトル a, b が与えられたとき、まず、任意の点 A を定め、続いて順に

$$A + a = B, \quad B + b = C$$

となる点 B, C を定めるとき、 $\overrightarrow{AC}$ で表わされるベクトル c を a と b の和といい、

$$a + b = c$$

とかく、ベクトルの和を求める演算をその加法という。

ベクトルの加法については、つぎの法則が成り立つ：

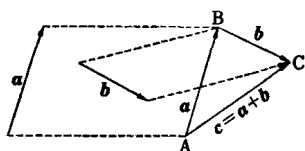
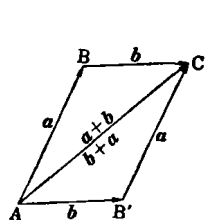


図 1.2

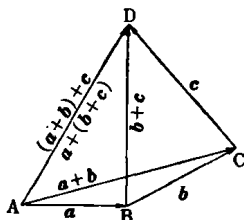
- A. 1. $a+b=b+a,$
 A. 2. $(a+b)+c=a+(b+c),$
 A. 3. $a+o=a, \quad o+a=a,$
 A. 4. $a+(-a)=o, \quad (-a)+a=o.$

証明. A. 1 は図 1.3 (i) で ABCB' が平行四
 辺形であることからわかる。A. 2 は図 1.3 (ii) で

$\overrightarrow{AD}$ が $(a+b)+c$ または $a+(b+c)$ を表わすとみられることからわかる。A. 3, A. 4
 は、加法の定義と o および $-a$ の定義からわかる。 (証終)



(i)



(ii)

図 1.3

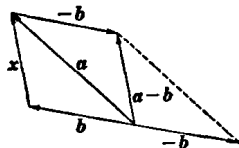


図 1.4

ベクトル a, b が与えられたとき、 b との和が a に等しくなるベクトル x を $a-b$ と
 かし、 a から b を引いた差という(→図 1.4). 式で表わせば、

$$b+x=a \iff x=a-b.$$

このように定義すると、つぎの関係が成り立つ：

$$a-b=a+(-b).$$

証明. $b+x=a$ の両辺に $-b$ を加えると、左辺は $-b+(b+x)=(-b+b)+x=o+x$
 $=x$ となるから、 $x=a+(-b)$ がえられる。 (証終)

a を任意のベクトル、 k を実数とすると、 ka はつ
 ぎのようなベクトルを表わす。これを a の k 倍という：

$$\text{大きさ: } |ka| = |k| |a|,$$

$$\text{向き: } \begin{cases} k > 0 & \text{ならば } a \text{ と同じ,} \\ k < 0 & \text{ならば } -a \text{ と同じ.} \end{cases} \quad (\rightarrow \text{図 1.5})$$

この定義から、ベクトルの実数倍について、つぎのこ
 とがらが成り立つ；ただし、 k, l は実数とする：

- M. 1. $1 \cdot a = a,$
 M. 2. $k(la) = kla,$
 M. 3. $(k+l)a = ka + la,$
 M. 4. $k(a+b) = ka + kb.$

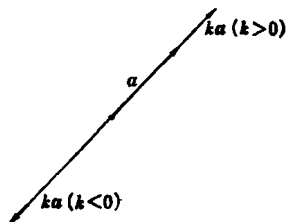


図 1.5

これらの事実は図をかいてみれば容易にわかる。

また、つぎの事実もすぐ確かめられる：

$$(-1)a = -a, \quad 0a = o, \quad ko = o.$$

ベクトルの加法と実数倍とを合わせて、ベクトルの線形演算といい、ベクトルに対して実数をスカラーという。

一般に、集合 V の元を a, b, c などであわし、実数の集合(一般には体) R の元を a, b, c などであわすとき、 V の元について A. 1~A. 4 および M. 1~M. 4 をみたす演算

$$a+b \quad \text{および} \quad ka$$

が定義されているならば、 V を R の上の線形空間またはベクトル空間という。これまで、有向線分を使ってベクトルを扱ってきたが、このベクトルの集合は実数の上のベクトル空間の一つの具体的な表現を与えている。

ここでは、主としてユークリッド空間(三次元)の幾何学的なベクトルとその応用だけについてのべる。(線形空間の一般論については、→基礎編 I § 4)

1.2. 共線・共面・基底

r 個のベクトル $a_1, \dots, a_r$ に対し、任意の点 P をとり、

$$P + a_i = A_i \quad (i=1, \dots, r)$$

によって r 個の点 $A_1, \dots, A_r$ を定めたとき、これらの点がすべて P を通る一直線上にあれば、 $a_1, \dots, a_r$ は共線であるといい、これらの点がすべて P を通る一平面上にあれば、 $a_1, \dots, a_r$ は共面であるという。共線なベクトルはすべて共面である。

零ベクトル o については、 $P + o = P$ であるから、零ベクトルは任意のベクトルと共線(共面)である。

o でない二つのベクトル a, b が共線であるということは、これらがどの位置にあっても、同一の直線 g に平行であるということ、 o でない三つのベクトル a, b, c が共面であるということは、これらがどの位置にあっても、同一の平面 π に平行であるということにほかならない。

共線なベクトルはすべて一直線上のベクトルで代表させ、共面なベクトルはすべて一平面上のベクトルで代表させることができる(→図 1.6)。

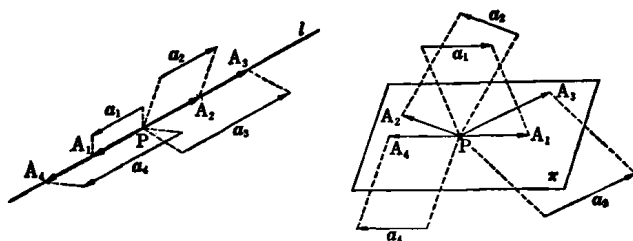


図 1.6

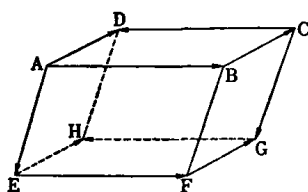


図 1.7

例 1. 図 1.7 で示される平行六面体の辺に向きをつけたベクトルにおいて、それぞれ

(1) $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{GH}, \vec{EF}$ は共線,

(2) $\vec{AD}, \vec{BC}, \vec{FG}, \vec{EH}$ は共線,

(3) $\vec{AE}, \vec{BF}, \vec{CG}, \vec{DH}$ は共線;

(1), (2) の 8 個のベクトルは共面,

(2), (3) の 8 個のベクトルは共面,

(3), (1) の 8 個のベクトルは共面

である。

ベクトル a, b に対して、任意の実数 k, l をとり、和 $ka+lb$ をつくれば、これも一つのベクトルとなる。一般に何個かのベクトル $a_1, \dots, a_r$ に対して、任意の実数 $l_1, \dots, l_r$ をとり、

$$l_1 a_1 + \dots + l_r a_r = \sum_{i=1}^r l_i a_i$$

としてつくった一つのベクトルを、 $a_1, \dots, a_r$ の一次結合という。

定理 1.1. ベクトル a は 0 ではないとする。任意のベクトル b が a と共線であるための必要十分条件は、適当な実数 k をとって、 $b=ka$ と表わせることである。

証明. a, b が共線ならば、任意の点 P をとって

$$A = P + a, \quad B = P + b$$

とすれば、三点 P, A, B は一直線上にあり、 $a \neq 0$ であるから、 A は P とは異なる点である。したがって、

$$\vec{PB} = k \vec{PA} \quad \text{すなわち} \quad b = ka$$

となる実数 k がある。ただし、 B が P と一致するとき、すなわち $b=0$ のときは、 $k=0$ である。

逆に、 ka と a とは共線であるから、 $b=ka$ ならば、 b と a とは共線である。(証終)

定理 1.2. 二つのベクトル a, b は共線ではないとする。ベクトル c が a, b と共面であるための必要十分条件は、 c が a と b の一次結合で表わされること、すなわち、適当な実数 k, l をとれば、 $c=ka+lb$ と表わされることである。

証明. c が a または b と共線ならば、定理 1.1 により

$$c=ka \quad \text{または} \quad c=lb$$

とかける。 c が a, b のどちらとも共線でなければ、もちろん $c \neq 0$ である。そこで、任意の点 P をとり、

$$A = P + a, \quad B = P + b, \quad C = P + c$$

とすると、 A, B, C は P を通る一平面上にある。そこで、 P および C を通ってそれぞれ PA, PB に平行な直線をひくと、線分 PC を対角線とする平行四辺形 $PA'CB'$ ができる(→図 1.8)。そして、

$$c = \vec{PC} = \vec{PA'} + \vec{PB'}$$

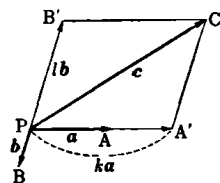


図 1.8

$$\begin{aligned}
 &= k\overrightarrow{PA} + l\overrightarrow{PB} \\
 &= k\mathbf{a} + l\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

となることがわかる。

逆に, $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$ のとき, $\mathbf{c}$ が $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と共面であることは容易に確かめられる。(証終)

定理 1.1 は $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ を仮定して, $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ と共線であるための条件を示し, 定理 1.2 は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が共線でないことを仮定して, $\mathbf{c}$ が $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と共面であるための条件を示しているが, 共線, 共面はベクトル間の相互関係であるから, 上のような仮定なしにのべておくこともできる。

定理 1.3. i. 二つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が共線であるための必要十分条件は, 少なくとも一方は $\mathbf{o}$ でない適当な実数 k , l をとって, つぎのようにかけることである:

$$k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

ii. 三つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が共面であるための必要十分条件は, 少なくとも一つは $\mathbf{o}$ でない適当な実数 k , l , m をとって, つぎのようにかけることである:

$$k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c} = \mathbf{o}.$$

証明. i. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が共線で, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ または $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ のときは, 定理 1.1 によってこの形の式がえられる. $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{o}$ のときは, k , l は任意の実数でよい。

逆に, $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = \mathbf{o}$ のとき, $l \neq 0$ ならば $\mathbf{b} = -(k/l)\mathbf{a}$, $k \neq 0$ ならば $\mathbf{a} = -(l/k)\mathbf{b}$ となつて, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は共線である。

ii. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が共線のときは, i によって, $k'\mathbf{a} + l'\mathbf{b} = \mathbf{o}$ と $k''\mathbf{a} + m'\mathbf{c} = \mathbf{o}$ かあるいは $l''\mathbf{b} + m''\mathbf{c} = \mathbf{o}$ のどちらかを使って $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c} = \mathbf{o}$ を導くことができる. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が共面であつて, 共線でないとするれば, このうち少なくとも二つは $\mathbf{o}$ ではないから, たとえば $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が $\mathbf{o}$ でないとすれば, 定理 1.2 により $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}$, すなわち $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$ となる. $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ または $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が $\mathbf{o}$ でないときも同様である。

逆に, $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c} = \mathbf{o}$ で, k , l , m のうち少なくとも一つが $\mathbf{o}$ でないときは, 例えば $m \neq 0$ ならば,

$$\mathbf{c} = -\frac{k}{m}\mathbf{a} - \frac{l}{m}\mathbf{b}$$

とかける. $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ のときは, 定理 1.2 により $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と共面である. また, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の少なくとも一方が $\mathbf{o}$ ならば, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は共線となる. いずれにしても $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は共面である. $m \neq 0$ または $l \neq 0$ の場合も同様である。(証終)

定理 1.4. i. $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ のとき, $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ となるのは $k=0$ のときに限る。

ii. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が共線でないとき, $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} = \mathbf{o}$ となるのは, $k=l=0$ のときに限る。

iii. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が共面でないとき, $k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + m\mathbf{c} = \mathbf{o}$ となるのは, $k=l=m=0$ のときに限る。

証明. i. $k=0$ のときは $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ である. 逆に, もし $k \neq 0$ であつて $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ となつたとすると, 両辺に $1/k$ を掛けることにより $\mathbf{a} = (1/k)\mathbf{o} = \mathbf{o}$ となり, 仮定に反する. よつて, $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ となるのは $k=0$ のときに限る。