新編
数学ハンドブック
応用編

小松勇作
編集

新編数学ハンドブック

応用編

小 松 勇 作
編 集

朝 倉 書 店

新版 数学ハンドブック—応用編—

1972年9月25日 初 版第1刷
1981年8月10日 第6刷

編者 小 松 勇 作
発行者 朝 倉 邦 造
発行所 株式会社 朝 倉 書 店
東京都新宿区新小川町2-10
郵便番号 162
電話 03(260)0141
振替口座 東京6-8673番

〈検印省略〉

日東紙工・渡辺製本

3041-110005-0032

ま え が き

近年の科学技術の発展は，質的にも量的にもまったくいちじるしい．時々刻刻と蓄積される人類の知的所産は整理にいとまがないほどであり，多くの情報が種々雑多な形でたえず流されつづけている．世はあげて情報化社会への突入という様相を呈してきたといえよう．

その中にあって，数学もまたその基礎理論だけにとどまらず，応用方面にわたって広範な分野を開拓しつつある．数学はそれ自体として麗しい理論体系であることはいうまでもない．しかも，それと同時に，他の諸分野において有力な手段として活用されている．思考の自由と成果の普遍性に標榜される数学の特性は，いかなる分野においても適応性をそなえているわけである．この点は近年ことに切実にひろく認識されてきたところである．

しかしながら，具体的に数学を学習し利用しようという観点からすると，その内容は重点項目に限ってすら，あまりにも多彩であり過ぎる．ことに，数学を応用するという立場からは，指針をえることですでに手をこまぬくほどである．

この新編数学ハンドブックは，このような現状に対処するために企画されたものである．内容の構成と分担執筆者については全面的に新規企画の形をとり，さらに素材の多様化に伴って基礎編と応用編とに分冊した．

内容の程度としては，大学教養課程から理工系の専門課程にいたる広い範囲にわたり，理工系を志す学生をはじめ，教育者や研究者にとって，学習のための事典ないしは備忘録として活用されることを期待している．

各章は，それぞれの専門的な研究者の分担執筆に成っている．記述の形式としては，一般的な解説のほかに，定理と証明，例題と解，例などを織りまぜ，

応用上の便をもはかっている．さらに，編集の観点から，全編を通じて，関連事項の間の有機的な引用をはかるとともに，表現をなるべく統一することに意を用いた．しかし，他面では，執筆者の個性的な趣好も生かされている．また，巻末にはかなり詳細な索引がついている．

本書ができあがるまでに，分担執筆された諸氏の協力はもとより，酒井良君が全編にわたる入念な校正に努力された．また，朝倉書店編集部の各位は本書の刊行に尽力された．これらの諸氏に深く感謝の意を表したい．

1972 年秋

編集者しるす

執 筆 者

（執筆順）

東京教育大学教授 理学博士 茂 木 勇

岡山大学教授 理学博士 田 代 嘉 宏

東京工業大学教授 理学博士 小 松 勇 作

東京工業大学助教授 理学博士 吹 田 信 之

早稲田大学教授 理学博士 杉 山 昌 平

三重大学助教授 理学博士 広 海 玄 光

大阪府立大学教授 理学博士 梯 鉄次郎

横浜国立大学助教授 理学博士 吉 原 健 一

大阪大学教授 理学博士 坂 口 実

神戸大学教授 理学博士 井 関 清 志

大阪大学教授 理学博士 西 田 俊 夫

目　　次

I. ベクトル解析　　［茂木　勇］

II. 特殊曲線・特殊曲面　　［田代　嘉宏］

III. 函数の近似 [小松 勇作・吹田 信之]

IV. 応用関数方程式 [杉山 昌平]

V. 演算子法 [広海 玄光]

VI. 数　値　解　析　〔梯　鉄次郎〕

VII. 統　計　〔吉原　健一〕

VIII. オペレーションズ・リサーチ ［坂口 実］

IX. 計 算 機 ［井関 清志］

X. 情 報 理 論　［西田　俊夫］

参 考 書

付　　表　［広海　玄光・小松　勇作］

索　　引

基礎編目次

I. ベクトル解析

1. ベクトルの代数

1.1. ベクトルとその演算

線分 PQ に対して，P から Q へ向かう方向に向きをつけて考えたとき，これを $\overrightarrow{PQ}$ で表わし，P を**始点**，Q を**終点**とする**ベクトル**という．二つのベクトル $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P'Q'}$ があって，$\overrightarrow{PQ}$ を平行移動して P を P′ に重ねたとき，同時に Q が Q′ に重なるならば，これらのベクトルは等しいといい，そのことを $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P'Q'}$ で表わす．つまり，同じ向きに平行で，長さの等しい有向線分は同じベクトルを表わす．ベクトルは，有向線分の向きと長さだけに注目して，その位置を度外視したものである．そこで，ベクトルを表わすには，その始点がどこにあるかを明示しないで，一つの文字を用いて $\boldsymbol{a}$ または $\vec{a}$ のように表わし，特に始点が P，終点が Q であるときは $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$ とかく．もちろん，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点 P を定めると，その終点 Q は確定するから，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$ のときは

$$\mathrm{P}+\boldsymbol{a}=\mathrm{Q}$$

とかくことにする．この表わし方は，ベクトルの意味をよく伝えている．また，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$ のとき，線分 PQ の長さは始点 P がどこにあっても同じであるから，これを $|\boldsymbol{a}|$ または $|\overrightarrow{PQ}|$ で表わし，これをそのベクトルの**大きさ**という．$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$ のとき，$\overrightarrow{QP}$ は $\boldsymbol{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを定める．このベクトルを $-\boldsymbol{a}$ で表わす．特に始点と終点が一致する場合は一点になるが，これもベクトルの特別の場合と考えて**零ベクトル**とよび，$\boldsymbol{o}$ で表わす．零ベクトルは大きさ $|\boldsymbol{o}|$ は 0 で，方向は任意である．

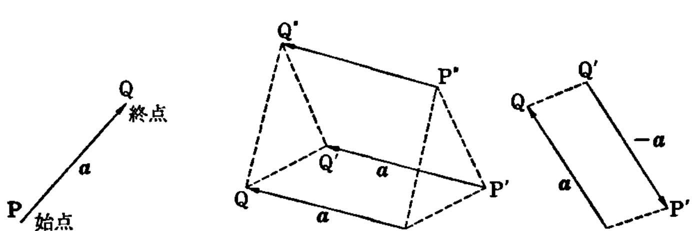


図 1.1

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，まず，任意の点 A を定め，続いて順に

$$\mathrm{A}+\boldsymbol{a}=\mathrm{B}, \qquad \mathrm{B}+\boldsymbol{b}=\mathrm{C}$$

となる点 B, C を定めるとき，$\overrightarrow{AC}$ で表わされるベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和といい，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

とかく．ベクトルの和を求める演算をその**加法**という．

ベクトルの加法については，つぎの法則が成り立つ：

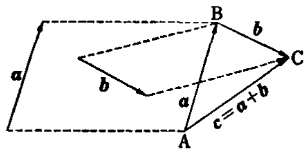


図 1.2

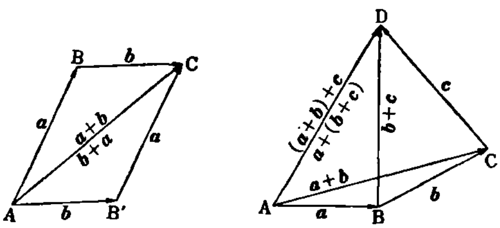
A. 1. $\qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$

A. 2. $\qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$

A. 3. $\qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$

A. 4. $\qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}, \quad (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}.$

証明. A. 1 は図 1.3 (i) で ABCB′ が平行四辺形であることからわかる．A. 2 は図 1.3 (ii) で $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ または $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ を表わすとみられることからわかる．A. 3, A. 4 は，加法の定義と $\boldsymbol{o}$ および $-\boldsymbol{a}$ の定義からわかる． （証終）



(i) (ii)

図 1.3

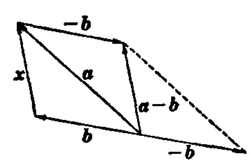


図 1.4

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{b}$ との和が $\boldsymbol{a}$ に等しくなるベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ とかき，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ を引いた**差**という(→図 1.4)．式で表わせば，

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

このように定義すると，つぎの関係が成り立つ：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

証明. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ の両辺に $-\boldsymbol{b}$ を加えると，左辺は $-\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ となるから，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ がえられる． （証終）

$\boldsymbol{a}$ を任意のベクトル，k を実数とするとき，$k\boldsymbol{a}$ はつぎのようなベクトルを表わす．これを $\boldsymbol{a}$ の k 倍という：

大きさ：$|k\boldsymbol{a}|=|k|\,|\boldsymbol{a}|,$

向き：$\begin{cases} k>0 & \text{ならば } \boldsymbol{a} \text{ と同じ,} \\ k<0 & \text{ならば } -\boldsymbol{a} \text{ と同じ.} \end{cases}$ （→図 1.5）

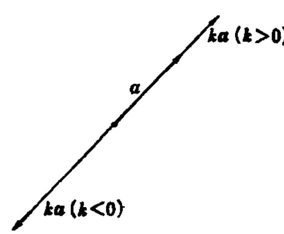


図 1.5

この定義から，ベクトルの実数倍について，つぎのことがらが成り立つ；ただし，k, l は実数とする：

M. 1. $\qquad 1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$

M. 2. $\qquad k(l\boldsymbol{a})=kl\boldsymbol{a},$

M. 3. $\qquad (k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a},$

M. 4. $\qquad k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}.$

これらの事実は図をかいてみれば容易にわかる.

また，つぎの事実もすぐ確かめられる:

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}, \qquad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}, \qquad k\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}.$$

ベクトルの加法と実数倍とを合わせて，ベクトルの線形演算といい，ベクトルに対して実数を**スカラー**という.

一般に，集合 V の元を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ などで表わし，実数の集合(一般には体) R の元を a, b, c などで表わすとき，V の元について A. 1〜A. 4 および M. 1〜M. 4 をみたす演算

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \quad \text{および} \quad k\boldsymbol{a}$$

が定義されているならば，V を R の上の**線形空間**または**ベクトル空間**という. これまで，有向線分を使ってベクトルを扱ってきたが，このベクトルの集合は実数の上のベクトル空間の一つの具体的な表現を与えている.

ここでは，主としてユークリッド空間(三次元)の幾何学的なベクトルとその応用だけについてのべる. (線形空間の一般論については，→ 基礎編 I § 4)

1.2. 共線・共面・基底

r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ に対し，任意の点 P をとり，

$$\mathrm{P}+\boldsymbol{a}_i=\mathrm{A}_i \qquad (i=1, \cdots, r)$$

によって r 個の点 $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_r$ を定めたとき，これらの点がすべて P を通る一直線上にあれば，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は**共線**であるといい，これらの点がすべて P を通る一平面上にあれば，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は**共面**であるという. 共線なベクトルはすべて共面である.

零ベクトル $\boldsymbol{o}$ については，$\mathrm{P}+\boldsymbol{o}=\mathrm{P}$ であるから，零ベクトルは任意のベクトルと共線(共面)である.

$\boldsymbol{o}$ でない二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が共線であるということは，これらがどの位置にあっても，同一の直線 g に平行であるということ，$\boldsymbol{o}$ でない三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が共面であるということは，これらがどの位置にあっても，同一の平面 π に平行であるということにほかならない.

共線なベクトルはすべて一直線上のベクトルで代表させ，共面なベクトルはすべて一平面上のベクトルで代表させることができる(→ 図 1.6).

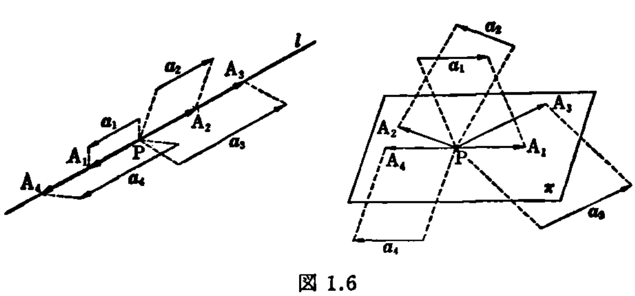


図 1.6

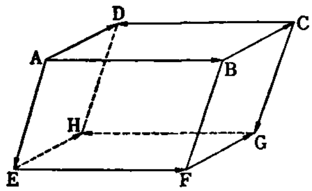


図 1.7

例 1. 図 1.7 で示される平行六面体の辺に向きをつけたベクトルにおいて，それぞれ

(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$ は共線，
(2) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EH}$ は共線，
(3) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$ は共線；
(1)，(2) の 8 個のベクトルは共面，
(2)，(3) の 8 個のベクトルは共面，
(3)，(1) の 8 個のベクトルは共面

である．

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，任意の実数 k, l をとり，和 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ をつくれば，これも一つのベクトルとなる．一般に何個かのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ に対して，任意の実数 $l_1, \cdots, l_r$ をとり，

$$l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{a}_r=\sum_{i=1}^{r} l_i\boldsymbol{a}_i$$

としてつくった一つのベクトルを，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の**一次結合**という．

定理 1.1. ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{o}$ ではないとする．任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ と共線であるための必要十分条件は，適当な実数 k をとって，$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ と表わせることである．

証明. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共線ならば，任意の点 P をとって

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}+\boldsymbol{a}, \qquad \mathrm{B}=\mathrm{P}+\boldsymbol{b}$$

とすれば，三点 P, A, B は一直線上にあり，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ であるから，A は P とは異なる点である．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=k\overrightarrow{\mathrm{PA}} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$$

となる実数 k がある．ただし，B が P と一致するとき，すなわち $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ のときは，$k=0$ である．

逆に，$k\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$ とは共線であるから，$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ ならば，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ とは共線である．（証終）

定理 1.2. 二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は共線ではないとする．ベクトル $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と共面であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表わされること，すなわち，適当な実数 k, l をとれば，$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ と表わされることである．

証明. $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{b}$ と共線ならば，定理 1.1 により

$$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{c}=l\boldsymbol{b}$$

とかける．$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のどちらとも共線でなければ，もちろん $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{o}$ である．そこで，任意の点 P をとり，

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}+\boldsymbol{a}, \qquad \mathrm{B}=\mathrm{P}+\boldsymbol{b}, \qquad \mathrm{C}=\mathrm{P}+\boldsymbol{c}$$

とすると，A, B, C は P を通る一平面上にある．そこで，P および C を通ってそれぞれ PA, PB に平行な直線をひくと，線分 PC を対角線とする平行四辺形 PA′CB′ ができる(→図 1.8)．そして，

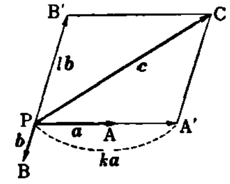


図 1.8

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PA'}}+\overrightarrow{\mathrm{PB'}}$$

$$=k\overrightarrow{\mathrm{PA}}+l\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$
$$=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$$

となることがわかる．

逆に，$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ のとき，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と共面であることは容易に確かめられる．（証終）

定理 1.1 は $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ を仮定して，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ と共線であるための条件を示し，定理 1.2 は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が共線でないことを仮定して，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と共面であるための条件を示しているが，共線，共面はベクトル間の相互関係であるから，上のような仮定なしにのべておくこともできる．

定理 1.3. i. 二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が共線であるための必要十分条件は，少なくとも一方は 0 でない適当な実数 k, l をとって，つぎのようにかけることである:

$$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}.$$

ii. 三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が共面であるための必要十分条件は，少なくとも一つは 0 でない適当な実数 k, l, m をとって，つぎのようにかけることである:

$$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}.$$

証明. i. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が共線で，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ または $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ のときは，定理 1.1 によってこの形の式がえられる．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ のときは，k, l は任意の実数でよい．

逆に，$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ のとき，$l\neq 0$ ならば $\boldsymbol{b}=-(k/l)\boldsymbol{a}$, $k\neq 0$ ならば $\boldsymbol{a}=-(l/k)\boldsymbol{b}$ となって，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は共線である．

ii. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が共線のときは，i によって，$k'\boldsymbol{a}+l'\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ と $k''\boldsymbol{a}+m'\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ かあるいは $l''\boldsymbol{b}+m''\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ のどちらかを使って $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ を導くことができる．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が共面であって，共線でないとすれば，このうち少なくとも二つは $\boldsymbol{o}$ ではないから，たとえば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{o}$ でないとすれば，定理 1.2 により $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$，すなわち $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ となる．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ または $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{o}$ でないときも同様である．

逆に，$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ で，k, l, m のうち少なくとも一つが $\boldsymbol{o}$ でないときは，例えば $m\neq 0$ ならば，

$$\boldsymbol{c}=-\frac{k}{m}\boldsymbol{a}-\frac{l}{m}\boldsymbol{b}$$

とかける．$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ のときは，定理 1.2 により $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と共面である．また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が $\boldsymbol{o}$ ならば，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は共線となる．いずれにしても $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は共面である．$m\neq 0$ または $l\neq 0$ の場合も同様である．（証終）

定理 1.4. i. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ のとき，$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ となるのは $k=0$ のときに限る．

ii. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が共線でないとき，$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ となるのは，$k=l=0$ のときに限る．

iii. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が共面でないとき，$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ となるのは，$k=l=m=0$ のときに限る．

証明. i. $k=0$ のときは $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ である．逆に，もし $k\neq 0$ であって $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ となったとすると，両辺に $1/k$ を掛けることにより $\boldsymbol{a}=(l/k)\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$ となり，仮定に反する．よって，$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ となるのは $k=0$ のときに限る．