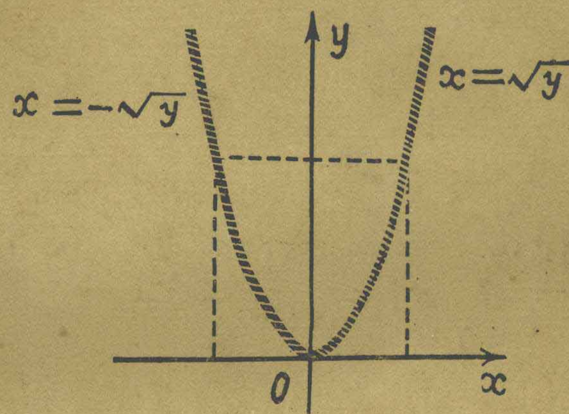
全国高等林业院校试用教材

工程数学

南京林学院 编



木材机械加工专业用

中国林业出版社

全国高等林业院校试用教材

工　程　数　学

南京林业大学　主编

木材机械加工专业用

中 国 林 业 出 版 社

前　　言

本书系根据1981年全国农口高等院校数学教学研讨会精神，并参照全国高等院校工科数学教材编写会议确定的编写大纲编写的。

本书分两部分，前一部分为线性代数，后一部分为概率论与数理统计。考虑到章节内容的伸缩性，书中加“*”号的部分，可根据具体情况取舍。

本书线性代数部分由南京林业大学蒋祖芳编写，并承南京大学周伯壎教授主审；概率论与数理统计部分由南京林业大学束仁荣、沈叔度编写，并承南京大学唐述钊、张守智两同志主审。在编写过程中，还得到了南京林业大学数学教研组同志的热情帮助，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，书中难免有错，恳请读者批评指教。

编者

1984.2.

目　　录

线性代数

概率论与数理统计

线性代数

第一章 行列式

行列式是线性代数中最基本的一个内容，它不仅在数学本身并且在物理、力学、工程与农林科学上都有着广泛的应用。行列式的理论起源于线性方程组的解法。本章将在中学代数关于行列式知识的基础上进一步讨论 n 级行列式，给出 n 级行列式的定义并研究它的一些基本性质与计算方法，介绍利用行列式解某类线性方程组的方法。

§1. 线性方程组与行列式

在初等代数中已学过，二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1—2}$$

不等于零时，它有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1—3}$$

同样，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1—4}$$

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1—5}$$

不等于零时，它有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1—6}$$

式中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

我们看到，用行列式解线性方程（1—1），（1—4）是简便的，但是许多从理论和实际问题里导出的线性方程组常常含有几十个、几百个未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等。我们将在下一章讨论含有任意个未知量任意个方程的线性方程组。本章先讨论形式比较特殊的线性方程组，即未知量的个数与方程的个数相等的情形。这一类线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1—7}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表未知量，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 代表未知量的系数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代表常数项。

在这一章里，我们想把二元和三元线性方程组解的行列式形式加以推广。这在数学理论上或在实际应用上都有着重大的意义。为了达到这一目的，我们首先需要清楚二阶和三阶行列式的结构规律，然后由此规律推广行列式的概念。下面将利用排列来给出这一规律，为此先对排列的概念作一些讨论。

§2. 排　　列

本节介绍排列的一些基本概念，为下节定义 n 阶行列式作准备。

观察（1—2）与（1—5），行列式的元素 a_{ij} 带有二个附标，第一个附标表示元素所在行的序数（称为行标），第二个附标表示元素所在列的序数（称为列标）。我们把每一项元素的第一个附标按从小到大的顺序（称为自然顺序）排列后，把第二个附标依次写下来分别得到

$$12,\ 21 \tag{1—8}$$

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321 \tag{1—9}$$

在二阶行列式的情况下，(1—8）式表示两个数码 1，2 的一切可能的排列，共有二项。在三阶行列式的情况下，(1—9）式表示三个数码 1，2，3 的一切可能的排列，共有六项。

一般有

定义1　由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 元排列**。

在作 n 个数码的一个排列时，第一个位置的数码可以取这 n 个数码中的任何一个，所以有 n 种可能；当第一个位置取定后，第二个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 个数码中选取，所以只有 $n-1$ 种可能。因此第一个和第二个位置的数码一共有 $n(n-1)$ 种不同的选法。同样，当第一个、第二个位置的数码都已取定，那么，第三个位置的数码只能在剩下的 $n-2$ 个数码中选取。于是前三个位置的数码一共有 $n(n-1)(n-2)$ 种不同的选法。如此得 n 个数码的不同排列共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1$个，记 $1\cdot2\cdots(n-1)\cdot n=n!$，读作 n 的阶乘。

值得注意的是式（1—9）中，除 123 是按自然顺序排列的以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面的情况。例如排列 231 中，2 比 1 大，但是 2 排在 1 前面。这样的排列顺序是与自然顺序相反的，我们称它为逆序。

定义2　在一个排列中，如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面，就称这两个数码构成一个逆序。在一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**。

例如在排列 231 中有 21 和 31 两个逆序，所以 231 的逆序数等于 2。又如排列 321 中共有 32，31，21 等 3 个逆序，所以 321 的逆序数等于 3。

如果 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 个数码的一个排列，为简便起见采用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 来表示 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数。并且可以按照以下办法来计算它的逆序数。

$$\begin{aligned}\tau(i_1i_2\cdots i_n)=&(i_1\text{ 后面比 } i_1\text{ 小的数码的个数})\\&+(i_2\text{ 后面比 } i_2\text{ 小的数码的个数})\\&+\cdots\cdots\\&+(i_{n-1}\text{ 后面比 } i_{n-1}\text{ 小的数码的个数})\end{aligned}$$

例1　求 $\tau(n\ n-1\cdots21)$

解　在排列 $n\ n-1\cdots21$ 中，n 与它后面 $n-1$ 个数码都构成逆序；$n-1$ 与它后面 $n-2$ 个数码都构成逆序；……；2 与 1 也构成逆序。所以

$$\begin{aligned}\tau(n\cdots21)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=1/2\,n(n-1)\end{aligned}$$

定义3　逆序数为偶数（零也算作偶数）的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例如在前面三个数码 1，2，3 的 6 个排列中，有三个偶排列，即 123、231 和 312；三个奇排列，即 132、213 和 321。偶排列和奇排列各占一半的这种情形并非偶然。一般说来，在 n 个数码的所有排列中，偶排列和奇排列各占一半。为证明这一事实，需要进一步研究排列的奇偶性。

把一个排列中某两个数码交换一下，而其余的数码不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个**对换**。例如经过 1，2 对换，排列 132 就变成了排列 231。这时，可以看到

经过一个对换，奇排列 132 变成了偶排列 231。一般地，有下列定理

定理 1 每一个对换都改变排列的奇偶性。

证 先看对换相邻两个数码的情形。排列

$$\cdots i\ j\cdots \tag{1—10}$$

经过 i 与 j 对换变成

$$\cdots j\ i\cdots \tag{1—11}$$

这里“…”表示那些不动的数码。经过这个对换后，在排列 (1—10)，(1—11) 中 i 或 j 与前面和后面的各个数码所构成的逆序数没有改变，不同的只是 i 与 j 的次序。如果原来 ij 构成逆序，则经过对换，整个排列的逆序数减少一个；如果原来 ij 不构成逆序，则经过对换，整个排列的逆序数就增加一个。不论是哪一种情形，排列的奇偶性皆有改变。

再看一般情形。假定 i 与 j 之间有 s 个数码，即排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1—12}$$

经过 i 与 j 对换，排列 (1—12) 变成

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1—13}$$

这样一个不相邻两数码的对换可以通过若干次相邻的对换来实现。先让 i 向右移动，依次与 $k_1,\cdots,k_s$ 对换，经过 s 次相邻的两个数码的对换以后，(1—12) 变为

$$\cdots k_1\ k_2\cdots k_sij\cdots$$

再让 j 向左移动，依次与 $i,k_s,\cdots,k_2,k_1$ 对换，经过 $s+1$ 次相邻两数码的对换以后，排列便变为 (1—13)，因此 i 与 j 的对换总共通过 $2s+1$ 次相邻的对换来实现。前面已证明，相邻两个数码的一个对换改变排列的奇偶性，所以奇数次的相邻对换也要改变排列的奇偶性。 证毕

定理 2 任意一个 n 元排列都可以经过若干个对换变成自然顺序，并且所作对换的个数与这个 n 元排列有相同的奇偶性。

证 用数学归纳法，当 $n=2$ 时，共有两个排列 12，21。排列 21 经过一个对换便变成 12，并且对换的个数 1 与 21 这个排列具有相同的奇性，所以定理 2 在 $n=2$ 时正确。

假设定理的第一结论对于任一 $n-1$ 元排列成立，现证明它对任一 n 元排列也成立。

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个任意的 n 元排列，如果 $i_n=n$，那么，由归纳法假设，$n-1$ 元排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 可以经若干次对换变成 $12\cdots n-1$，因此这一系列对换也就同时把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$。如果 $i_n\neq n$，则对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 作 i_n 与 n 的对换，变成 $i_1'\cdots i'_{n-1}n$，这又归结到上面的情形。因此，定理的第一结论普遍成立。

因为自然顺序 $12\cdots n$ 是偶排列，所以由定理 1，如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列，则变成 $12\cdots n$ 所作对换的次数为偶数；如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列，则变成 $12\cdots n$ 所作对换的次数为奇数。本定理完全得到证明。 证毕

最后，我们来证明一个重要的结论

定理 3 $n\geqslant 2$ 时，n 个数码的奇排列与偶排列的个数相等，各有 $1/2\ n!$ 个。

证 设 n 元排列中，有 p 个奇排列，有 q 个偶排列。则 $p+q=n!$，下面来证明 $p=q$。

任取一个奇排列 $i_1i_2\cdots i_n$，则由定理 1，把它的最前面两个数码 i_1 与 i_2 对调一下，所得到的排列 $i_2i_1\cdots i_n$ 为一个偶排列。用这种方法，把 p 个奇排列的最前两个数码都对换一下就得到 p 个偶排列。由于对这 p 个偶排列最前面两个数码对换一下又可以得到原来的 p 个奇排列，所以这 p 个偶排列各不相同。但偶排列一共有 q 个，所以 $p\leqslant q$。同样，把 q 个偶排列的最前面两个数码对换一下，得到 q 个不同的奇排列。所以 $q\leqslant p$。由此可得 $p=q=\frac{1}{2}n!$。

证毕

§ 3. n 阶行列式的定义

有了上述排列的预备知识，我们可以对于二阶和三阶行列式作进一步研究，得出它们的结构规律。再利用这些规律来定义 n 阶行列式。

从前面的讨论不难看到二阶行列式（1—2）和三阶行列式（1—5）有如下规律：它们都是一些乘积的代数和，且每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素所构成的，并且展开式恰恰就是由全部这种可能的乘积构成。在 $n=2$ 时，（1—2）中不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$ 两项，在 $n=3$ 时，（1—5）中这样的项共有 $3!=6$ 项。此外，每一项乘积都带有正号或负号。这符号确定如下：在三阶行列式的展开式（1—5）中，项的一般形式可写为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $j_1j_2j_3$ 是数码 1，2，3 的某一个排列。当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为偶数，相应的项带有正号，当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为奇数，相应的项带有负号。二阶行列式的情形也是这样。于是（1—5）可缩写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

式中 $j_1j_2j_3$ 表示数码 1，2，3 的一个排列 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 的所有可能的排列求和。

在上式的基础上不难推广到一般的情形。

定义 4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列（a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素），在它的两边各画一条竖线，并把它定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1\text{—}14)$$

此处 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 1，2，$\cdots$，n 的所有 n 元排列求和。这样一个数学符号（1—14）称为一个 n

阶行列式。它又常写成 $det|a_{ij}|$ 或 $|a_{ij}|_1^n$。它等于一个共有 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由行列式中每行每列任取一个元素的乘积，且每一项前面的符号确定如下：当该项的因子的行标按自然顺序排列，而相应的列标成偶排列时，符号为正；当相应的列标成奇排列时，符号为负。

由上定义可知，n 阶行列式的展开式是由 $n!$ 项组成，由定理 3，在展开式（1—14）中有 $\frac{1}{2}n!$ 项前面带正号，有 $\frac{1}{2}n!$ 项带负号。

一个 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广。特别当 $n=1$ 时，一阶行列式就是数 a。

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 这是一个 4 阶行列式，它的展开式应该有 24 项，但是由于这个行列式中有很多零，所以有很多项等于零。故只要找出那些不等于零的项，再来决定它们的符号就可以了。项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

在行列式中第 1 行的元素除去 a_{11} 以外全为零，所以只要考虑 $j_1=1$ 的项即可。在第 2 行中，除去 a_{21} 与 a_{22} 外，其余元素全为零，因此 j_2 只有 1, 2 这两种可能， 由于 $j_1=1$，所以 j_2 就不能等于 1 了，从而 $j_2=2$。同理 $j_3=3$，$j_4=4$。行列式中不为零的项只有

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$$

这一项。而且

$$\tau(1\ 2\ 3\ 4)=0$$

于是

$$D=a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$$

同样可推得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\ a_{22}\cdots a_{nn}。 \qquad (1—15)$$

象这种**主对角线**（从左上角到右下角的对角线）某一侧的元素全为零的行列式，称为**三角形行列式**。由此可得出一个计算行列式的有用结论：三角形行列式的值等于主对角线上 n 个元素的乘积。

于是

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \qquad (1-16)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (1-17)$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**。(1—16) 说明对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，把 n 个元素的行标排列成自然顺序，再由列标所组成排列的逆序数来决定这项的符号。如果给了一般的不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \qquad (1-18)$$

这里 $i_1 i_2 \cdots i_n$; $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 元排列。能不能由这两个排列的逆序数直接决定这一项前面所带的正负号呢？利用排列的性质，不难证明 (1—18) 的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \qquad (1-19)$$

事实上，为了用定义来决定 (1—18) 的符号，就要把 n 个元素重新排列，使得它们的行标成为自然顺序，即排成

$$a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'} \qquad (1-20)$$

于是这一项前面的符号就是

$$(-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} \qquad (1-21)$$

下面证明 (1—19) 与 (1—21) 是一致的。因为从 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 变到 $a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'}$ 可以经过若干次对换来实现。在两个元素对换时，元素的行标与列标的排列也都同时作一次对换；即两个数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 和 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 都同时改变奇偶性，因此它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不改变。这就是说，对 (1—18) 作一次两因子的调换不改变 (1—19) 的值。在若干次因子的调换以后，(1—18) 变成 (1—20)，同时有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n) + \tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} = (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}$$

所以 (1—19) 与 (1—21) 是一致的。也就证得：n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

前面所带的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$

例如 $a_{23} a_{42} a_{14} a_{31}$ 是四阶行列式 $|a_{ij}|_1^4$ 中的一项，它的行标排列的逆序数 $\tau(2413) = 3$，列标排列的逆序数 $\tau(3241) = 4$，于是这项的符号为 $(-1)^{3+4} = -1$。如果它的行标成自然排列 1 2 3 4 即 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$，则对于列标排列有 $\tau(4312) = 5$，所以它的符号也是 $(-1)^5 = -1$。