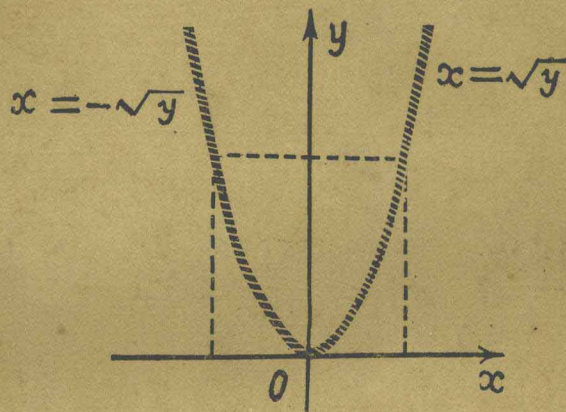


全国高等林业院校试用教材

工程数学

南京林学院 编



木材机械加工专业用

中国林业出版社

全国高等林业院校试用教材

工 程 数 学

南京林业大学 主编

木材机械加工专业用

中国林业出版社

前 言

本书系根据 1981 年全国农口高等院校数学教学研讨会精神,并参照全国高等院校工科数学教材编写会议确定的编写大纲编写的。

本书分两部分,前一部分为线性代数,后一部分为概率论与数理统计。考虑到章节内容的伸缩性,书中加“*”号的部分,可根据具体情况取舍。

本书线性代数部分由南京林业大学蒋祖芳编写,并承南京大学周伯璠教授主审;概率论与数理统计部分由南京林业大学束仁荣、沈叔度编写,并承南京大学唐述钊、张守智两同志主审。在编写过程中,还得到了南京林业大学数学教研组同志的热情帮助,在此一并表示感谢。

由于我们水平有限,书中难免有错,恳请读者批评指教。

编者

1984.2.

目 录

线性代数

第一章 行列式	(1)
§ 1. 线性方程组与行列式	(1)
§ 2. 排列	(2)
§ 3. n 阶行列式的定义	(5)
§ 4. 行列式的主要性质	(8)
§ 5. 行列式按某一行 (列) 展开	(12)
§ 6. 克莱姆法则	(18)
习题一	(21)
第二章 线性方程组	(27)
§ 1. 消元法	(27)
§ 2. 非齐次线性方程组	(37)
§ 3. 齐次线性方程组的非零解	(48)
习题二	(50)
第三章 矩阵代数	(54)
§ 1. 矩阵的运算	(54)
§ 2. 初等矩阵	(64)
§ 3. 逆矩阵	(70)
* § 4. 矩阵的分块	(78)
* § 5. 函数矩阵的微分积分	(86)
习题三	(87)
第四章 二次型	(92)
§ 1. 二次型的矩阵表示	(92)
§ 2. 化二次型为标准形式	(97)
§ 3. 有定二次型	(105)
习题四	(108)
第五章 线性空间	(110)
§ 1. 线性空间的概念	(110)
§ 2. 向量组的线性相关性	(115)
§ 3. 维数与基底	(118)
§ 4. 向量的坐标与坐标变换	(123)

§ 5. 齐次线性方程组的解空间	(127)
习题五	(131)
*第六章 线性变换	(134)
§ 1. 线性变换的概念	(134)
§ 2. 线性变换的矩阵	(138)
§ 3. 特征值与特征向量	(143)
习题六	(150)
附录一 线性方程组的数值解法	(153)
§ 1. 主元素消去法	(153)
§ 2. 简单迭代法和赛德尔迭代法	(157)
附录二 张量代数	(166)
§ 1. 总和记法	(166)
§ 2. 对偶空间	(167)
§ 3. 张量的概念	(172)
§ 4. 张量代数	(175)
§ 5. 度量张量、张量的升标与降标	(179)
附录三 习题答案	(183)

概率论与数理统计

第一章 随机事件及其概率	(193)
§ 1. 随机事件与样本空间的概念	(194)
一、随机试验	(194)
二、随机事件	(194)
三、样本空间	(195)
§ 2. 随机事件的关系与运算	(195)
一、事件的包含与相等	(196)
二、事件的和与积	(196)
三、事件的差	(196)
四、事件的互不相容性	(196)
五、事件的集合及几何图形表示	(197)
§ 3. 频率的概念及其性质	(198)
一、频率	(198)
二、频率的性质	(199)
§ 4. 随机事件的概率及其简单性质	(200)
一、统计概率	(200)
二、等可能概型(古典概型)的概率计算	(200)
三、几何概率	(204)
*四、概率的公理化定义	(205)
§ 5. 条件概率与事件的独立性	(207)

一、条件概率	(207)
二、事件的独立性	(209)
§ 6. 全概率公式与贝叶斯公式	(211)
§ 7. 重复独立试验 (贝努利试验)	(214)
一、 n 次重复独立试验	(215)
二、贝努利试验	(215)
习题一	(216)
第二章 随机变量及其分布	(220)
§ 1. 随机变量与分布函数的概念	(220)
一、随机变量	(220)
二、分布函数的概念	(222)
§ 2. 离散型随机变量的概率分布	(222)
一、分布列	(222)
二、二点分布	(224)
三、二项分布	(225)
四、泊松分布	(226)
§ 3. 连续型随机变量的概率分布	(229)
一、分布密度	(229)
二、均匀分布	(230)
三、正态分布	(231)
*四、威布尔分布	(237)
§ 4. 随机变量函数的分布	(238)
一、离散型	(238)
二、连续型	(239)
习题二	(241)
第三章 二维随机变量及其分布	(244)
§ 1. 二维随机变量及其分布	(244)
一、分布函数的概念	(244)
二、边缘分布	(248)
§ 2. 随机变量的独立性	(252)
§ 3. 两个随机变量的函数的分布	(255)
一、和的分布	(257)
*二、商的分布	(259)
习题三	(261)
第四章 随机变量的数字特征	(265)
§ 1. 数学期望	(265)
一、离散型随机变量的数学期望	(265)
二、连续型随机变量的数学期望	(267)
三、随机变量函数的数学期望	(268)
§ 2. 方差	(270)

一、离散型随机变量的方差	(270)
二、连续型随机变量的方差	(272)
§ 3. 数学期望与方差的主要性质	(274)
§ 4. 几种重要随机变量的数学期望与方差	(276)
一、二点分布	(276)
二、二项分布	(276)
三、泊松分布	(276)
四、均匀分布	(277)
五、指数分布	(277)
六、正态分布	(277)
*七、 F 分布	(278)
*八、威布尔分布	(278)
§ 5. 协方差与相关系数	(280)
一、协方差	(280)
二、相关系数	(283)
* § 6. 矩	(285)
习题四	(287)
第五章 大数定律与中心极限定理	(290)
§ 1. 大数定律	(290)
一、车贝谢夫不等式	(290)
二、车贝谢夫定理	(291)
三、贝努利定理	(294)
§ 2. 中心极限定理	(295)
习题五	(299)
第六章 样本分布与数据整理	(300)
§ 1. 总体、样本与统计量	(300)
一、总体、个体、简单随机样本	(300)
二、经验分布函数 (样本分布函数)	(303)
三、统计量的概念	(306)
§ 2. 抽样分布	(307)
一、样本平均数 $\bar{X}$ 的分布	(307)
二、 χ^2 -分布	(309)
三、 t -分布	(310)
四、 F -分布	(312)
§ 3. 数据整理	(313)
一、频数 (频率) 分布表	(314)
二、频率分布直方图	(316)
三、样本数字特征值的简化计算	(317)
习题六	(322)
第七章 参数估计	(325)

§ 1. 参数估计的一般概念	(325)
§ 2. 估计量的求法	(326)
一、矩法	(326)
二、极大似然法	(329)
§ 3. 估计量的评选标准	(333)
一、无偏性	(333)
二、有效性	(335)
三、一致性	(335)
§ 4. 正态总体数学期望与方差的区间估计	(336)
一、区间估计的一般概念	(336)
二、正态总体 $N(\mu, \sigma)$ 数学期望 μ 的置信区间	(337)
三、正态总体 $N(\mu, \sigma)$ 方差 σ^2 的置信区间	(340)
习题七	(343)
第八章 假设检验	(345)
§ 1. 假设检验的基本思想	(345)
§ 2. 一个正态总体未知参数的假设检验	(347)
一、 σ^2 已知, 检验 $H_0: \mu = \mu_0$	(347)
二、 σ^2 未知, 检验 $H_0: \mu = \mu_0$	(350)
三、 μ 未知, 检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	(352)
*四、 μ 未知, 检验 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	(354)
§ 3. 二个正态总体未知参数的假设检验	(356)
一、 σ_1^2, σ_2^2 已知, 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$	(356)
二、 σ_1^2, σ_2^2 未知, 但已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$	(358)
三、 μ_1, μ_2 未知, 检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	(360)
*四、 μ_1, μ_2 未知, 检验假设 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	(363)
§ 4. 总体分布函数的假设检验	(365)
一、正态概率纸	(365)
*二、 Z^2 -适度准则	(369)
* § 5. 样本容量 n 的确定	(372)
习题八	(375)
第九章 方差分析	(380)
§ 1. 一个因素的方差分析	(380)
一、问题的提出	(380)
二、问题的解法	(381)
三、偏差平方和的计算方法	(384)
四、举例	(386)
五、几点说明	(389)
§ 2. 二个因素的方差分析	(389)
一、二因素方差分析的一些基本概念	(390)

二、没有交互作用的二因素方差分析	(391)
*三、有交互作用的二因素方差分析	(396)
习题九	(403)
第十章 回归分析	(405)
§ 1. 一元线性回归	(406)
一、回归直线的求法	(406)
二、线性关系的显著性检验	(410)
三、利用回归方程进行预测和控制	(415)
四、小结	(417)
§ 2. 一元曲线回归	(419)
一、多项式回归	(419)
二、化曲线回归为线性回归	(422)
三、一些常用的曲线函数与图形	(426)
* § 3. 多元线性回归	(430)
一、二元线性回归	(430)
二、多元线性回归的计算公式	(435)
习题十	(437)
第十一章 正交试验法	(441)
§ 1. 试验方案设计与正交表	(441)
一、试验方案的设计	(441)
二、正交表	(443)
§ 2. 用正交表安排试验与分析试验结果	(445)
一、如何用正交表安排试验方案	(445)
二、正交表的直观分析法	(445)
§ 3. 多指标的试验分析	(448)
一、综合评分法	(448)
二、综合平衡法	(450)
§ 4. 有交互作用的试验分析	(451)
* § 5. 正交表的方差分析	(453)
§ 6. 小结	(460)
一、利用正交表进行试验、分析的一般步骤	(460)
二、几点注意	(461)
习题十一	(462)
第十二章 质量控制	(466)
§ 1. 质量管理概述	(466)
§ 2. 工序控制与质量控制图	(466)
一、工序控制的原理及类型	(466)
二、质量控制图	(468)
§ 3. 计量控制	(470)
一、平均数和极差控制图 ($\bar{X}-R$ 图)	(470)

二、举例	(474)
三、制定 $\bar{X}-R$ 控制图应注意的事项	(476)
§ 4. 计件控制	(477)
一、不合格品率或不合格品数控制图 (p 图或 p_n 图)	(477)
二、举例	(479)
§ 5. 计点控制	(481)
一、缺陷数控制图 (c 图)	(481)
二、举例	(482)
习题十二	(484)
附录一	(486)
一、排列与组合	(486)
二、关于 χ^2 -分布、 t -分布、 F -分布的分布密度公式的推导	(488)
附录二	(494)
1. 泊松分布数值表	(494)
2. 标准正态分布概率积分表	(495)
3. t -分布表	(497)
4. χ^2 -分布表	(498)
5. F -分布表	(501)
6. 相关系数检验表	(509)
7. 正交表	(510)
8. 正态概率纸	(515)
附录三 习题答案	(516)

线性代数

第一章 行列式

行列式是线性代数中最基本的一个内容, 它不仅在数学本身并且在物理、力学、工程与农林科学上都有着广泛的应用。行列式的理论起源于线性方程组的解法。本章将在中学代数关于行列式知识的基础上进一步讨论 n 级行列式, 给出 n 级行列式的定义并研究它的一些基本性质与计算方法, 介绍利用行列式解某类线性方程组的方法。

§ 1. 线性方程组与行列式

在初等代数中已学过, 二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-2)$$

不等于零时, 它有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1-3)$$

同样, 三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-4)$$

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1-6)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1-7)$$

在这一章里,我们想把二元和三元线性方程组解的行列式形式加以推广。这在数学理论上或在实际应用上都有着重大的意义。为了达到这一目的,我们首先需要清楚二阶和三阶行列式的结构规律,然后由此规律推广行列式的概念。下面将利用排列来给出这一规律,为此先对排列的概念作一些讨论。

§ 2. 排列

观察 (1—2) 与 (1—5), 行列式的元素 a_{ij} 带有二个附标, 第一个附标表示元素所在行的序数 (称为行标), 第二个附标表示元素所在列的序数 (称为列标)。我们把每一项元素的第一个附标按从小到大的顺序 (称为自然顺序) 排列后, 把第二个附标依次写下来分别得到

12, 21 (1-8)

$$123, 231, 312, 132, 213, 321 \quad (1-9)$$

在二阶行列式的情况下, (1—8) 式表示两个数码 1, 2 的一切可能的排列, 共有二项。在三阶行列式的情况下, (1—9) 式表示三个数码 1, 2, 3 的一切可能的排列, 共有六项。

一般有

定义 1 由 n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列。

在作 n 个数码的一个排列时, 第一个位置的数码可以取这 n 个数码中的任何一个, 所以有 n 种可能; 当第一个位置取定后, 第二个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 个数码中选取, 所以只有 $n-1$ 种可能。因此第一个和第二个位置的数码一共有 $n(n-1)$ 种不同的选法。同样, 当第一个、第二个位置的数码都已取定, 那么, 第三个位置的数码只能在剩下的 $n-2$ 个数码中选取。于是前三个位置的数码一共有 $n(n-1)(n-2)$ 种不同的选法。如此得 n 个数码的不同排列共有 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ 个, 记 $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$, 读作 n 的阶乘。

值得注意的是式 (1—9) 中, 除 123 是按自然顺序排列的以外, 其余的排列中, 都有较大的数码排在较小的数码前面的情况。例如排列 231 中, 2 比 1 大, 但是 2 排在 1 前面。这样的排列顺序是与自然顺序相反的, 我们称它为逆序。

定义 2 在一个排列中, 如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面, 就称这两个数码构成一个逆序。在一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

例如在排列 231 中有 21 和 31 两个逆序, 所以 231 的逆序数等于 2。又如排列 321 中共有 32, 31, 21 等 3 个逆序, 所以 321 的逆序数等于 3。

如果 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 n 个数码的一个排列, 为简便起见采用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 来表示 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数。并且可以按照以下办法来计算它的逆序数。

$$\begin{aligned} \tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = & (i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数码的个数}) \\ & + (i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数码的个数}) \\ & + \cdots \cdots \\ & + (i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数码的个数}) \end{aligned}$$

例 1 求 $\tau(n \ n-1 \cdots 21)$

解 在排列 $n \ n-1 \cdots 21$ 中, n 与它后面 $n-1$ 个数码都构成逆序; $n-1$ 与它后面 $n-2$ 个数码都构成逆序; $\cdots$; 2 与 1 也构成逆序。所以

$$\begin{aligned} \tau(n \cdots 21) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= 1/2 n(n-1) \end{aligned}$$

定义 3 逆序数为偶数 (零也算作偶数) 的排列称为偶排列; 逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如在前面三个数码 1, 2, 3 的 6 个排列中, 有三个偶排列, 即 123、231 和 312; 三个奇排列, 即 132、213 和 321。偶排列和奇排列各占一半的这种情形并非偶然。一般说来, 在 n 个数码的所有排列中, 偶排列和奇排列各占一半。为证明这一事实, 需要进一步研究排列的奇偶性。

把一个排列中某两个数码交换一下, 而其余的数码不动, 就得到另一个排列, 这样一个变换称为一个对换。例如经过 1, 2 对换, 排列 132 就变成了排列 231。这时, 可以看到

经过一个对换, 奇排列 132 变成了偶排列 231。一般地, 有下列定理

定理 1 每一个对换都改变排列的奇偶性。

证 先看对换相邻两个数码的情形。排列

$$\cdots i j \cdots \quad (1-10)$$

经过 i 与 j 对换变成

$$\cdots j i \cdots \quad (1-11)$$

这里 “...” 表示那些不动的数码。经过这个对换后, 在排列 (1—10), (1—11) 中 i 或 j 与前面和后面的各个数码所构成的逆序数没有改变, 不同的只是 i 与 j 的次序。如果原来 ij 构成逆序, 则经过对换, 整个排列的逆序数减少一个; 如果原来 ij 不构成逆序, 则经过对换, 整个排列的逆序数就增加一个。不论是哪一种情形, 排列的奇偶性皆有改变。

再看一般情形。假定 i 与 j 之间有 s 个数码, 即排列为

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots \quad (1-12)$$

经过 i 与 j 对换, 排列 (1—12) 变成

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots \quad (1-13)$$

这样一个不相邻两数码的对换可以通过若干次相邻的对换来实现。先让 i 向右移动, 依次与 $k_1, \cdots, k_s$ 对换, 经过 s 次相邻的两个数码的对换以后, (1—12) 变为

$$\cdots k_1 k_2 \cdots k_s i j \cdots$$

再让 j 向左移动, 依次与 $i, k_s, \cdots, k_2, k_1$ 对换, 经过 $s+1$ 次相邻两数码的对换以后, 排列便变为 (1—13), 因此 i 与 j 的对换总共通过 $2s+1$ 次相邻的对换来实现。前面已证明, 相邻两个数码的一个对换改变排列的奇偶性, 所以奇数次的相邻对换也要改变排列的奇偶性。 证毕

定理 2 任意一个 n 元排列都可以经过若干个对换变成自然顺序, 并且所作对换的个数与这个 n 元排列有相同的奇偶性。

证 用数学归纳法, 当 $n=2$ 时, 共有两个排列 12, 21。排列 21 经过一个对换便变成 12, 并且对换的个数 1 与 21 这个排列具有相同的奇性, 所以定理 2 在 $n=2$ 时正确。

假设定理的第一结论对于任一 $n-1$ 元排列成立, 现证明它对任一 n 元排列也成立。

设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是一个任意的 n 元排列, 如果 $i_n = n$, 那么, 由归纳法假设, $n-1$ 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ 可以经若干次对换变成 $12 \cdots n-1$, 因此这一系列对换也就同时把 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 变成 $12 \cdots n$ 。如果 $i_n \neq n$, 则对排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 作 i_n 与 n 的对换, 变成 $i_1' \cdots i_{n-1}' n$, 这又归结到上面的情形。因此, 定理的第一结论普遍成立。

因为自然顺序 $12 \cdots n$ 是偶排列, 所以由定理 1, 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为偶排列, 则变成 $12 \cdots n$ 所作对换的次数为偶数; 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列, 则变成 $12 \cdots n$ 所作对换的次数为奇数。本定理完全得到证明。 证毕

最后, 我们来证明一个重要的结论

定理 3 $n \geq 2$ 时, n 个数码的奇排列与偶排列的个数相等, 各有 $1/2 n!$ 个。

证 设 n 元排列中, 有 p 个奇排列, 有 q 个偶排列。则 $p+q=n!$, 下面来证明 $p=q$ 。

任取一个奇排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 则由定理 1, 把它的最前面两个数码 i_1 与 i_2 对调一下, 所得到的排列 $i_2 i_1 \cdots i_n$ 为一个偶排列。用这种方法, 把 p 个奇排列的最前面两个数码都对换一下就得到 p 个偶排列。由于对这 p 个偶排列最前面两个数码对换一下又可以得到原来的 p 个奇排列, 所以这 p 个偶排列各不相同。但偶排列一共有 q 个, 所以 $p \leq q$ 。同样, 把 q 个偶排列的最前面两个数码对换一下, 得到 q 个不同的奇排列。所以 $q \leq p$ 。由此可得 $p=q=\frac{1}{2}n!$ 。证毕

§ 3. n 阶行列式的定义

有了上述排列的预备知识, 我们可以对于二阶和三阶行列式作进一步研究, 得出它们的结构规律。再利用这些规律来定义 n 阶行列式。

从前面的讨论不难看出二阶行列式 (1—2) 和三阶行列式 (1—5) 有如下规律: 它们都是一些乘积的代数和, 且每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素所构成的, 并且展开式恰恰就是由全部这种可能的乘积构成。在 $n=2$ 时, (1—2) 中不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$ 两项, 在 $n=3$ 时, (1—5) 中这样的项共有 $3! = 6$ 项。此外, 每一项乘积都带有正号或负号。这符号确定如下: 在三阶行列式的展开式 (1—5) 中, 项的一般形式可写为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

这里 $j_1 j_2 j_3$ 是数码 1, 2, 3 的某一个排列。当 $\tau(j_1 j_2 j_3)$ 为偶数, 相应的项带有正号, 当 $\tau(j_1 j_2 j_3)$ 为奇数, 相应的项带有负号。二阶行列式的情形也是这样。于是 (1—5) 可缩写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

式中 $j_1 j_2 j_3$ 表示数码 1, 2, 3 的一个排列 $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1, 2, 3 的所有可能的排列求和。

在上式的基础上不难推广到一般的情形。

定义 4 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 排成 n 行 n 列 (a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素), 在它的两边各画一条竖线, 并把它定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-14)$$

此处 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 1, 2, $\cdots, n$ 的所有 n 元排列求和。这样一个数学符号 (1—14) 称为一个 n

阶行列式。它又常写成 $\det|a_{ij}|$ 或 $|a_{ij}|_n$ 。它等于一个共有 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由行列式中每行每列任取一个元素的乘积，且每一项前面的符号确定如下：当该项的因子的行标按自然顺序排列，而相应的列标成偶排列时，符号为正；当相应的列标成奇排列时，符号为负。

由上定义可知， n 阶行列式的展开式是由 $n!$ 项组成，由定理 3，在展开式 (1-14) 中有 $\frac{1}{2}n!$ 项前面带正号，有 $\frac{1}{2}n!$ 项带负号。

一个 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广。特别当 $n=1$ 时，一阶行列式就是数 a 。

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 这是一个 4 阶行列式，它的展开式应该有 24 项，但是由于这个行列式中有很多零，所以有很多项等于零。故只要找出那些不等于零的项，再来决定它们的符号就可以了。项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

在行列式中第 1 行的元素除去 a_{11} 以外全为零，所以只要考虑 $j_1=1$ 的项即可。在第 2 行中，除去 a_{21} 与 a_{22} 外，其余元素全为零，因此 j_2 只有 1, 2 这两种可能，由于 $j_1=1$ ，所以 j_2 就不能等于 1 了，从而 $j_2=2$ 。同理 $j_3=3$ ， $j_4=4$ 。行列式中不为零的项只有

$$a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

这一项。而且

$$\tau(1\ 2\ 3\ 4) = 0$$

于是

$$D = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

同样可推得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (1-15)$$

象这种主对角线（从左上角到右下角的对角线）某一侧的元素全为零的行列式，称为三角形行列式。由此可得出一个计算行列式的有用结论：三角形行列式的值等于主对角线上 n 个元素的乘积。

于是

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n \quad (1-16)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (1-17)$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**。(1—16)说明对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

在行列式的定义中,为了决定每一项的正负号,把 n 个元素的行标排列成自然顺序,再由列标所组成排列的逆序数来决定这项的符号。如果给了一般的不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1-18)$$

这里 $i_1 i_2 \cdots i_n, j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 元排列。能不能由这两个排列的逆序数直接决定这一项前面所带的正负号呢?利用排列的性质,不难证明 (1—18) 的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \quad (1-19)$$

事实上,为了用定义来决定 (1—18) 的符号,就要把 n 个元素重新排列,使得它们的行标成为自然顺序,即排成

$$a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'} \quad (1-20)$$

于是这一项前面的符号就是

$$(-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} \quad (1-21)$$

下面证明 (1—19) 与 (1—21) 是一致的。因为从 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 变到 $a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'}$ 可以经过若干次对换来实现。在两个元素对换时,元素的行标与列标的排列也都同时作一次对换;即两个数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 和 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 都同时改变奇偶性,因此它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不改变。这就是说,对 (1—18) 作一次两因子的调换不改变 (1—19) 的值。在若干次因子的调换以后, (1—18) 变成 (1—20), 同时有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(1 2 \cdots n) + \tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} = (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}$$

所以 (1—19) 与 (1—21) 是一致的。也就证得: n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

前面所带的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$

例如 $a_{23} a_{42} a_{14} a_{31}$ 是四阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 中的一项, 它的行标排列的逆序数 $\tau(2413) = 3$, 列标排列的逆序数 $\tau(3241) = 4$, 于是这项的符号为 $(-1)^{3+4} = -1$ 。如果它的行标成自然排列 $1 2 3 4$ 即 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$, 则对于列标排列有 $\tau(4312) = 5$, 所以它的符号也是 $(-1)^5 = -1$ 。