高等学校试用教材

建筑力学

中册

华南工学院《建筑力学》编写组

人民教育出版社

高等学校试用教材

建筑力学

中册

华南工学院《建筑力学》编写组

人民教育出版社

建筑力学包括理论力学、材料力学和结构力学三门力学的基本内容。本教材体系以建筑构件和结构为线索，按照强度、刚度、稳定等问题，从静力分析到动力分析进行阐述。

本教材分上、中、下、三册出版。中册主要内容为超静定梁和刚架的计算，桁架、排架和拱的计算，以及影响线等。

本教材为高等学校工科工业与民用建筑专业试用教材，也可供建筑、水利类有关专业和有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

建 筑 力 学

中 册

华南工学院《建筑力学》编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/16 印张 24 字数 540,000

1980年1月第1版 1980年7月第1次印刷

印数00,001—10,400

书号 15012·0236 定价 2.00 元

主要符号表

（上册所列符号在本册中仍适用）

符号	意义	常用单位或用在何种计算方法
W	功	N·m
α	线膨胀系数	°C
t	温度变化值	
ω	弯矩图面积	
δ_{ij}	结构在 j 点的单位力作用下沿 i 方向的位移	力法
X_i	超静定结构多余约束未知力	
$[\delta]$	柔度矩阵	
φ	杆端（节点）转角	位移法 弯矩分配法
ψ	$\psi=\dfrac{\Delta}{l}$	
i	单位刚度，等于$\dfrac{EI}{l}$	
i'	调整单位刚度	
K	$K=\dfrac{I}{l}$	
K'	调整的K值	
M^F	固端弯矩	
r_{ij}	结构中约束 j 发生单位位移时在 i 约束处产生的反力	
Z_i	节点转角或线位移未知数	
$[r]$	刚度矩阵	
μ	弯矩分配系数，等于$\dfrac{i}{\Sigma i}$	弯矩分配法
C_{AB}	传递系数	
S_{AB}	杆件转动刚度	

符号	意义	常用单位或用在何种计算方法
S'_{AB}	杆件调整转动刚度	弯矩分配法
M'_{AB}	近端转角弯矩	迭代法
M'_{BA}	远端转角弯矩	
M''_{AB}	位移弯矩	
$\overline{M}_A$	节点上固端弯矩总和	
M_r	楼层力矩	
P_r	楼层剪力	
μ_{AB}	转角分配系数，等于 $-\dfrac{1}{2}\dfrac{K_{AB}}{\sum\limits_{A} K_{AB}}$	
V_{AB}	位移分配系数，等于 $-\dfrac{3}{2}\dfrac{K_{AB}}{\sum\limits_{r} K_{AB}}$	
α_{AB}	简化系数，等于$\dfrac{H_r}{H_{AB}}$	
K_0	抗剪刚度系数	剪力分配法 （排架分析）
λ	$\lambda=\dfrac{H_s}{H}=\dfrac{\text{上柱高度}}{\text{全柱高度}}$	
n	$n=\dfrac{I_s}{I_x}=\dfrac{\text{上柱截面惯性矩}}{\text{下柱截面惯性矩}}$	
η	剪力分配系数	
P_K	临界荷载	影响线
$R_{左}$	临界荷载以左荷载总和	
$R_{右}$	临界荷载以右荷载总和	

目　录

主要符号表……1

第三篇　超静定梁和刚架的计算

第十四章　静定结构的位移计算……2
第一节　功的概念……2
第二节　功的互等定理……6
第三节　虚功原理……10
第四节　用单位力法求梁和刚架的位移……13
第五节　图形相乘法——求位移公式的进一步简化……19
第六节　剪力对位移的影响……26
第七节　梁和刚架由于支座移动的位移计算……29
第八节　梁和刚架由于温度变化所引起位移的计算……31
小结……34
思考题……35
习题……36
第十五章　力法……39
第一节　超静定结构的概念和超静定次数……39
第二节　刚架计算简图……42
第三节　力法的基本概念　一次超静定梁和刚架的计算……43
第四节　二次超静定梁和刚架的计算……48
第五节　力法的典型方程……54
第六节　计算的校核……55
第七节　刚架计算的简化……59
第八节　支座位移的影响……67
第九节　温度变化的影响……70
第十节　超静定结构特性初论……73
小结……74
思考题……75
习题……77
第十六章　位移法……82
第一节　位移法的基本思路　转角位移方程……82
第二节　位移法未知数数目的确定……90
第三节　节点无线位移的刚架计算……92
第四节　节点有线位移的刚架计算……97
第五节　用加约束的方法求解位移未知数……102
第六节　具有斜柱的刚架计算……111

小结 ……116
思考题 ……117
习题 ……118
第十七章 弯矩分配法 ……119
第一节 弯矩分配法的概念及其基本要素 ……119
第二节 弯矩分配法的计算步骤及其物理概念 ……122
第三节 弯矩分配法计算节点有线位移的刚架 ……131
第四节 对称与反对称性的利用 ……134
第五节 变截面杆件的情况 ……143
第六节 支座位移或温度变化情况下的计算 ……152
第七节 连续梁弯矩包络图和最不利荷载的布置 ……155
小结 ……157
思考题 ……160
习题 ……160
第十八章 迭代法 ……164
第一节 迭代法的基本原理 节点无线位移刚架的计算 ……164
第二节 用迭代法计算节点有线位移的刚架 ……168
第三节 不等高柱的情况 ……178
第四节 复式多层刚架的计算 ……181
小结 ……185
思考题 ……187
习题 ……187
第十九章 近似法计算多层多跨刚架 ……188
第一节 刚架计算中采用近似法的意义 ……188
第二节 多层多跨刚架在竖向荷载作用下的近似计算法——分层计算法 ……188
第三节 多层多跨刚架在水平荷载作用下的近似计算法——反弯点法 ……197
小结 ……203
思考题 ……204
习题 ……204

第四篇 桁架、排架与拱的计算

第二十章 屋架(桁架及组合结构)的内力计算 ……208
第一节 桁架的一般概念及其特点 ……208
第二节 桁架几何组成的基本原则及其常用的形式 ……210
第三节 静定桁架内力分析的数解法 ……212
第四节 静定桁架内力分析的图解法 ……224
第五节 非节点荷载情况 ……229
第六节 各种类型桁架受力情况的比较 ……233
第七节 静定桁架的位移计算 ……236
第八节 超静定桁架的计算 ……245
第九节 桁架次应力的计算 ……248

第十节　组合结构的计算……254
第十一节　空间桁架的内力计算……258
小结……262
思考题……263
习题……264
第二十一章　单层工业厂房铰接排架的内力计算……269
第一节　排架的计算简图和荷载……269
第二节　独立变截面柱的位移计算公式……271
第三节　用力法计算单跨铰接排架……276
第四节　不等高铰接排架的计算……280
第五节　柱的抗剪刚度……288
第六节　柱顶铰支点反力的计算公式……290
第七节　剪力分配法计算等高铰接排架……295
小结……303
思考题……304
习题……304
第二十二章　拱的计算……306
第一节　拱的型式及其应用……306
第二节　三铰拱的内力计算……308
第三节　三铰拱的压力线和合理拱轴……314
第四节　两铰拱的内力计算……318
第五节　无铰拱的内力计算……327
小结……335
思考题……336
习题……336

第五篇　影响线

第二十三章　影响线……340
第一节　吊车梁在移动的吊车轮压作用下的受力特点　影响线的概念……340
第二节　用静力法绘制静定梁的内力影响线……342
第三节　用机动法绘制静定梁的内力影响线……346
第四节　移动集中荷载最不利位置的确定……348
第五节　简支梁的绝对最大弯矩……354
第六节　连续梁的内力影响线……358
小结……360
思考题……361
习题……362
附录Ⅰ　矩形截面直线加腋梁的形常数和载常数……364
附录Ⅱ　习题答案……369

第三篇　超静定梁和刚架的计算

刚架是房屋建筑中常用的一种承重结构，在绝大多数情况下做成超静定的形式，这样，不仅使整个结构有良好的整体性，而且可使刚架的各构件受力比较均匀。在承受水平荷载（如风力、地震力）作用时，刚架也显示出它的优越性。超静定梁也是以受弯为主的结构，它的计算方法与刚架可通用，因此本篇将这两种结构合在一起来讨论。

本篇将以较大的篇幅介绍超静定刚架的几种计算方法——力法、位移法、弯矩分配法、迭代法和近似法，为分析超静定结构奠定必要的基础，开始时将先研究结构的位移计算。

力法和位移法是超静定结构内力分析的两种最基本的方法，其重要性则远超出本篇的范围，因为它们提供的分析问题的基本理论和方法对所有结构都是适用的。弯矩分配法、迭代法和近似法是设计刚架或连续梁时常用的几种手算方法，它们有明显的针对性，是根据某些特定的条件提出来的；计算过程简捷是这些方法的优点，但应用时须注意其适用范围。

在第十四章中，先介绍力学中一个重要而具有普遍性的定理——功的互等定理，然后介绍一个适用于所有杆件系统结构的位移计算方法——单位力法。虽然在这一篇中，我们只讨论刚架（梁）的问题，但这种求位移的方法在这以后计算其他结构时也要应用到，所以研究时要理解它的普遍适应性。

本篇的内容在整个超静定结构分析理论中占着很重要的地位，是必须掌握的重点。可以指出，这些方法的基本概念都是与某一些物理现象联系在一起的，都有极其明确的物理概念。在研究这些计算方法时，首先要弄清楚它们解题的基本出发点，并抓住它们解题的关键。另一方面，务必重视具体的计算工作，通过较多的习题演算，达到巩固理论的目的。

第十四章　静定结构的位移计算

从本章开始，以后很多内容都要研究超静定结构的内力计算问题。计算超静定结构的内力，除应用静力平衡条件外，还需考虑变形条件。为此，必须懂得结构位移的计算。对于单一杆件，如拉、压杆，简单梁，受扭等直圆杆等，它们的变形计算问题在上册中已经研究过。但对于由若干杆件组成的结构，如刚架、桁架等，它们的位移计算则比较复杂，需要寻求另外的计算方法。本章将介绍一种适用于任何平面杆件系统结构的位移计算方法。

虽然我们将要研究的是超静定结构，但这里讨论的还是静定结构的位移问题。因为往后便会知道，求解一个超静定结构的内力时，往往是把它变换成一个静定结构来计算的，所以需要的是静定结构的位移。静定结构的位移计算，是超静定结构计算的基础。

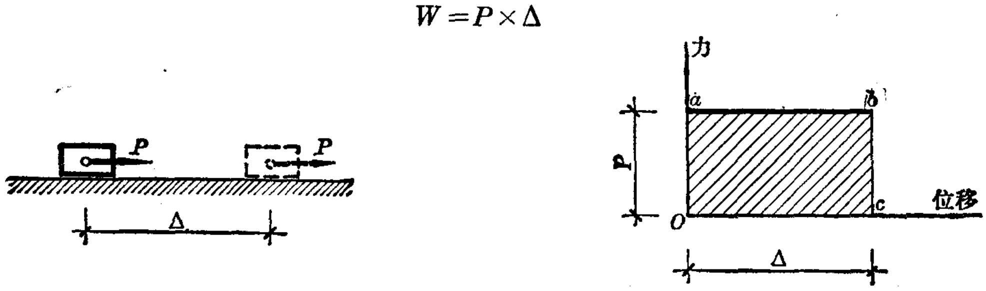
下面将首先讨论有关功的概念以及功的一些基本定理，因为我们是从功的概念出发去推导结构位移计算公式的。

第一节　功的概念

一、恒力的功和变力的功

设一恒力 P(即力的大小 P 在工作过程中是常量)作用于物体，力的作用点有位移 Δ(图 14-1a)，从物理学知道，若要说明该力的工作量的大小，仅用力的大小是不足以表达的，还要看力的作用点移动的距离。于是我们以"力×位移"这个量值来表示，并称为"功"，一般用符号 W 表示。即

$$W=P\times\Delta \tag{a}$$



(a)　　(b)

图 14-1

如果力的方向与力作用点的位移方向不相同，如图 14-2a 所示，则应以力在位移方向上的投影 $P\cdot\cos\alpha$ 乘以位移 Δ，即

$$W=P\cos\alpha\times\Delta \tag{b}$$

或以力 P 乘以位移在力作用方向上的投影 $\Delta\cos\alpha$ 来表示，这一投影就是力 P 的相应位移（图

14-2b)，因此又可写为

$$W=\text{力}\times\text{相应位移}=P\times(\Delta\cos\alpha) \qquad (c)$$

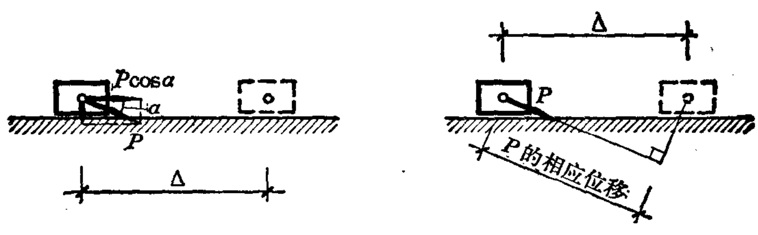


图 14-2

功的量纲是［力］×［长度］，其单位一般取牛·米(N·m)、千牛·米(kN·m)、牛·厘米(N·cm)等。

功是一代数量，当力的指向与相应的位移方向相同时，则功为正值；当力的指向与相应的位移方向相反时，则功为负值。

恒力所作的功也可用图 14-1b 中有阴线的矩形面积来表示。此图表示力与位移之间的关系，当位移由零逐渐增加时，力保持一常量 P(即直线 ab)。矩形 $Oabc$ 的面积 $P\times\Delta$ 就恰好代表了力 P 所作的功。

再来研究另一种情况，如图 14-3a 所示，一简支梁受横向静荷载 P 的作用，当它作用在梁上时，认为是从零逐渐增加至 P 值的。这样，在加荷过程中，梁也逐渐地发生弯曲变形，最后，在力 P 作用点处的挠度为 Δ。现在，我们来讨论一下力 P 作了多少功。这里，有一点与前面所讨论的不同，就是由于力 P 是从零逐渐加至 P 值的，在加荷期间，它不是一个恒力，而是一个变力，所以此时它所作的功与上述恒力所作的功不同，不能用 $P\Delta$ 来表示。为了解决这个问题，首先要知道力 P 在加荷过程中与其作用点位移之间的关系。设梁处在弹性阶段工作，则当力 P 从零逐渐加大至 P 值时，其作用点的位移也从零开始与力成正比地增加至 Δ，两者成直线关系，如图 14-3b 中的直线 Oa 所示。在其中某一微小阶段，若力 P 从 P_1 增加至 P_1+dP，则位移从 Δ_1 增加至 $\Delta_1+d\Delta$。就在这一微小阶段，力 P 的变化很微小，可近似地看作恒力 P_1，它所作的功为

$$dW=P_1\times d\Delta$$

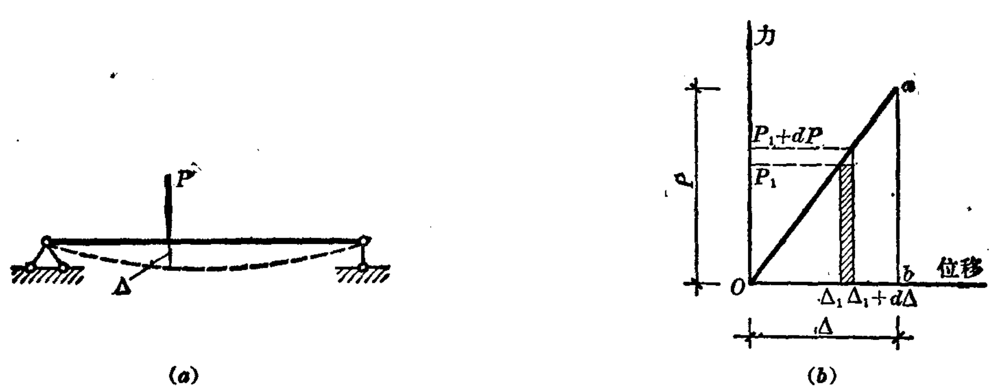


图 14-3

根据虎克定律：力与位移是成正比例的；并以 δ_{11} 表示单位力作用下物体产生的位移，则有

$$d\Delta=\delta_{11}dP_1$$

于是

$$dW=\delta_{11}P_1dP_1$$

所以在整个加荷过程中，力 P 所作的功应为

$$W=\int dW=\int_0^P\delta_{11}P_1\,dP_1=\delta_{11}\cdot\frac{P^2}{2}$$

而 $\delta_{11}P=\Delta$，所以最后功的形式可写为

$$\text{变力的功}\,W=\frac{1}{2}P\Delta \qquad (d)$$

从这里可见，变力所作的功与恒力所作的功不同，应在 $P\Delta$ 前面乘上一系数 $\frac{1}{2}$。

我们还可注意到，此时力 P 所作的功也可用图 14-3b 中的三角形 Oab 的面积表示，因为它也等于 $\frac{1}{2}P\Delta$。

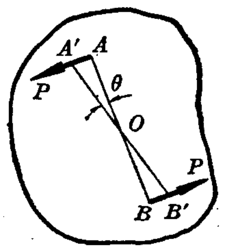
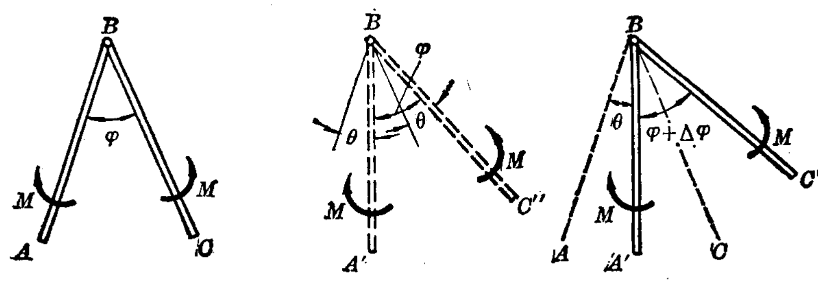


图 14-4



(a)　(b)　(c)

图 14-5

前面讨论了集中力所作的功，下面再讨论力偶所作的功。图 14-4 所示物体受一恒量力偶作用，其中力为 P，力偶臂为 AB。设物体在力偶作用平面内有一微小转角 θ，现计算力偶所作的功。为简单起见，设物体绕 O 点转动，则力偶所作的功首先看成是两个力 P 所作的功，即为

$$\begin{aligned}P\cdot AA'+P\cdot BB'&=P\cdot OA\cdot\theta+P\cdot OB\cdot\theta\\&=P(OA+OB)\theta=P\cdot AB\cdot\theta=M\theta\end{aligned} \qquad (e)$$

其中 $M=P\cdot AB$。力偶所作的功也有正负，当力偶的转向与转角方向相同时，则为正功；当力偶的转向与转角方向相反时，则为负功。而功的量纲不变，同样是[力]×[长度]。若力偶矩 M 是由零逐渐增加的，则如前一样，力偶所作的功应为

$$W=\frac{1}{2}M\theta \qquad (f)$$

又如图 14-5a 所示，设有两个大小相等方向相反的恒量力偶 M 分别作用在两根杆 BA、BC 上，当两杆从图 14-5a 的位置移至 14-5c 的位置时，这一对力偶所作的功可以这样设想，两杆从图 14-5a 状态到图 14-5c 状态是分两步进行的：第一步，杆 BA 与 BC 保持相互的夹角 φ 不变而一起转动一角 θ（即两杆如同一个刚体一样转动），这时 BA 已转到最后位置 BA' 如图 14-5b

所示。在此过程中，两杆的力偶M都作了功，但一正一负，加起来为零。第二步，杆 BA 不动，杆 BC 相对转动一角 $\Delta\varphi$，这时杆 BC 上的力偶M作了功，等于 $M\times\Delta\varphi$。在整个过程中这一对力偶所作的功就为

$$W=M\cdot\Delta\varphi \tag{g}$$

还可注意，在图示力偶作用方向情况下，两杆夹角增大了(即上述情况)，力偶的功为正；若夹角减小，则力偶的功为负。同时，根据"功＝力×相应位移"的定义，可见相应于大小相等方向相反的一对力偶的位移是相对的转角 $\Delta\varphi$。

当这一对力偶在作功过程中均为变量时，则

$$W=\frac{1}{2}M\Delta\varphi \tag{h}$$

二、广义力和广义位移的概念

从上面功的讨论中，总的来说，功就是力与相应位移的乘积。这里所指的"力"包括集中力、力偶或一对力偶等等，也可以推广为一个任何形式的力系，所以可概括地称它为"广义力"。其相应的位移则称为"广义位移"。它们的关系应是：广义力与广义位移乘积的单位是功的单位。从这个关系就可推知一个确定了的广义力相应的广义位移是什么形式。例如前面已讨论过的，一个力偶(广义力)的相应广义位移是转角；一对力偶的相应广义位移是相对转角。又如一对拉力(图 14-6a)作用在一直杆的两端，而杆件伸长了 Δ，则以这一对力 P 为广义力时，广义位移就是 Δ，因 $P\cdot\Delta$ 是这对力对位移所作的总功(这里我们不详细区分力 P 是恒力或变力)。在图 14-6b 中，有三个集中力 P 作用在梁上，而力作用点下的挠度分别是 Δ_1、Δ_2、Δ_3，若将这三个力的共同参变量 P 看作为一个广义力，则相应的位移可导出如下：

$$W=P\Delta_1+P\Delta_2+P\Delta_3=P(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3) \tag{i}$$

即广义位移是 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$。

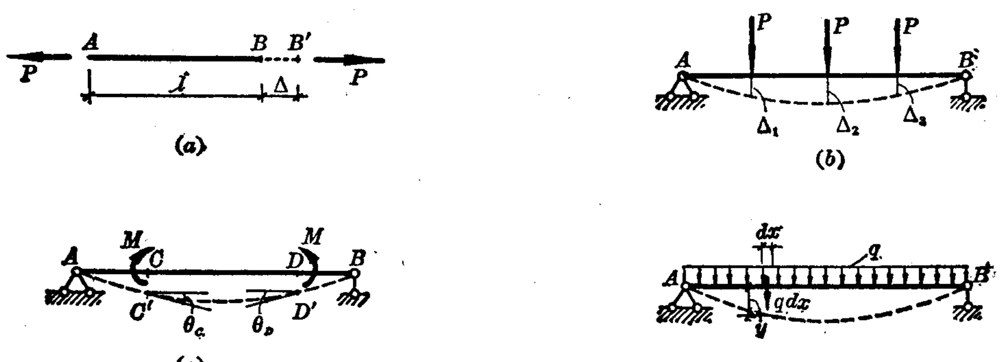


图 14-6

同理，如图 14-6c 所示，若将作用在梁上的一对力偶的量值M作为广义力，则其作用截面 C、D 的相对转角 $\theta_C+\theta_D$ 即是广义位移。

又若将图 14-6d 中梁上的均布荷载集度 q 作为广义力，则其广义位移可导出如下：先将每一微段 dx 上的均布力视作一集中力 qdx，相应的位移是挠度 y。于是整个均布荷载所作的功是

$$W=\int_0^l (qdx)\cdot y=q\int_0^l ydx=q\omega \qquad (j)$$

其中ω是梁挠曲线与原来杆轴直线 AB 所包围的面积。由此可见，以 q 为广义力时，则ω即为广义位移。q 的量纲是[力]/[长度]，ω 的量纲是[长度]^2。

有了广义力和广义位移的概念，可使许多基本定理能用比较简单的方式表达，更重要的是使我们对一些定理的本质有更深入的理解，从而使它的应用范围得到扩大。

第二节　功的互等定理

功的互等定理是说明同一个线性变形体系（结构）在两种不同荷载状态作用下，力与位移的相互关系。

为了说明这个定理适用范围的广泛性，图 14-7 所示为一个任意线性变形体系，它可以是梁、刚架、拱或其他任何形式的结构，只要它们是服从虎克定律即可。图 14-7a 为第一状态，P_1、P_2 代表一任意力系，图 14-7b 为第二状态，P_3、P_4 则代表另一个任意力系。虚线表示该体系在力系作用下的变形。由体系变形而产生的在力作用点 1、2、3、4 沿力作用方向的位移若以Δ表示，则在P_1、P_2 作用下（第一状态）各点的位移分别记为 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4，而在 P_3、P_4 作用下（第二状态）分别记为 Δ_1'、Δ_2'、Δ_3'、Δ_4'。

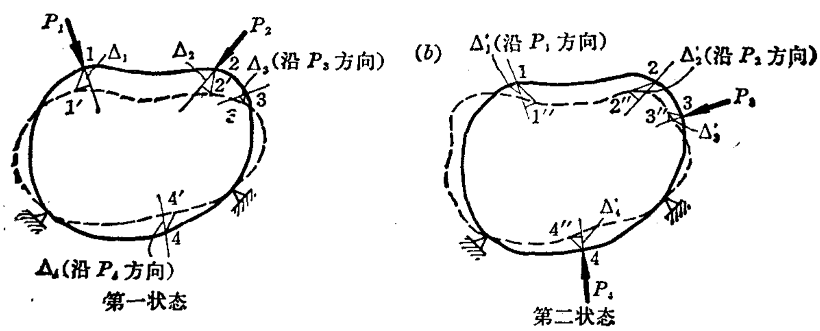


图　14-7

设先有第一状态的外力（P_1、P_2）作用在体系上，则此力系所作的功记作 W_{11}，从上节知，

$$W_{11}=\frac{1}{2}P_1\Delta_1+\frac{1}{2}P_2\Delta_2$$

在第一状态外力作用结束后，保留外力不撤去，再在体系上加上第二状态外力（P_3、P_4）。此时除 P_3、P_4 作功（记作 W_{22}）外，沿 P_1、P_2 的方向又产生新的位移 Δ_1' 和 Δ_2'，所以 P_1、P_2 又作了功，记作 W_{12}（第一个脚标表示功是由什么状态的力完成的，第二个脚标表示功经过的位移是什么状态的力产生的）。显然：

$$W_{22}=\frac{1}{2}P_3\Delta_3'+\frac{1}{2}P_4\Delta_4'$$

$$W_{12}=P_1\Delta_1'+P_2\Delta_2'$$

W_{12} 中各功前面不乘 1/2，因为当由 P_3、P_4 引起位移 Δ_1'、Δ_2' 时，P_1、P_2 是不变的恒力。

于是两种状态外力先后作用在体系上时的总功为

$$W_{11}+W_{22}+W_{12}=\frac{1}{2}P_1\Delta_1+\frac{1}{2}P_2\Delta_2+\frac{1}{2}P_3\Delta_3'+\frac{1}{2}P_4\Delta_4'+$$
$$+P_1\Delta_1'+P_2\Delta_2' \tag{a}$$

再从头开始，先考虑第二状态的外力作用在体系上，则此力系所作的功为

$$W_{22}=\frac{1}{2}P_3\Delta_3'+\frac{1}{2}P_4\Delta_4'$$

然后再加上第一状态的外力，如前一样，可写出此时外力所作的功为

$$W_{11}+W_{21}=\frac{1}{2}P_1\Delta_1+\frac{1}{2}P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4$$

于是前后两种状态外力所作的总功为

$$W_{22}+W_{11}+W_{21}=\frac{1}{2}P_3\Delta_3'+\frac{1}{2}P_4\Delta_4'+\frac{1}{2}P_1\Delta_1$$
$$+\frac{1}{2}P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4 \tag{b}$$

我们知道，由于外力所作的总功与加荷次序无关。上述两个过程，起始状态体系上都没有荷载作用，最后状态体系上同样是承受着两种荷载作用，只是施加荷载的次序不同而已，所以知

$$W_{11}+W_{22}+W_{12}=W_{22}+W_{11}+W_{21}$$

或

$$W_{12}=W_{21} \tag{14-1}$$

这从式(a)、(b)也可以看到，即

$$P_1\Delta_1'+P_2\Delta_2'=P_3\Delta_3+P_4\Delta_4$$

式(14-1)即称为“功的互等定理”。用文字来叙述，则是：“第一状态外力经过由于第二状态的位移所作的功等于第二状态的外力经过由于第一状态的位移所作的功”。

应该特别指出，功的互等定理在全部线性变形体系的理论中占着重要的地位，因为它的应用范围广，不论体系本身如何，也不论这两种状态的荷载和体系变形如何，都被这个定理所包括。

根据这个定理，结合一些个别情况，我们又可推导出下面三个定理：

一、位移互等定理

如图 14-8a、b 所示，设结构的第一状态外力中只有一个力，且 $P_1=1$，第二状态的外力也只有一个，且 $P_2=1$；δ_{21} 是在 $P_1=1$ 作用下点 2 沿 P_2 方向产生的位移，δ_{12} 则是在 $P_2=1$ 作用下点 1 沿 P_1 方向的位移。这样，根据功的互等定理，知

$$P_1\delta_{12}=P_2\delta_{21}$$

即

$$\delta_{12}=\delta_{21} \tag{14-2}$$

式(14-2)称为“位移互等定理”，用文字叙述如下：“第一单位力在第二单位力方向引起的位移等于第二单位力在第一单位力方向引起的位移。”这定理中所述的力和位移也是包括广义力和广义位移的意义的。一个最简单的例子如图 14-9 所示，第二状态的力是个力偶($M_2=1$)，此时相应的 δ_{21} 就是在 $P_1=1$ 作用下截面 2 的转角。在这一情况下也必存在 $\delta_{12}=\delta_{21}$ 的关系。如图

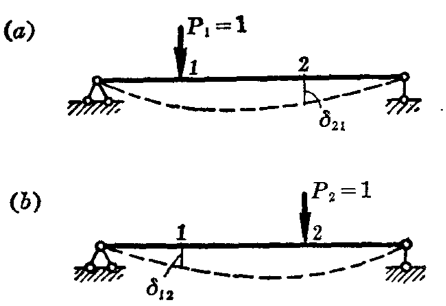


图 14-8

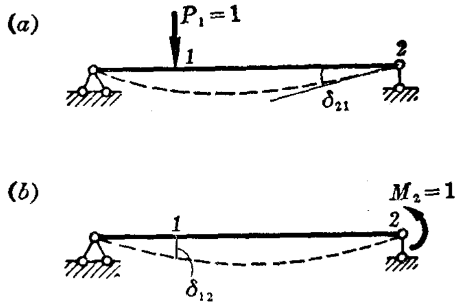


图 14-9

14-10a、b 所示，设 $P_1=1$ 作用在一简支梁中点处，而 $M_2=1$ 作用在右端支座截面上。由上册第九章梁的变形计算知：

$$\delta_{21}=\frac{P_1 l^2}{16EI}=\frac{l^2}{16EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{M_2 l^2}{16EI}=\frac{l^2}{16EI}$$

所以 $\delta_{12}=\delta_{21}$。

位移互等定理不仅说明两相关的位移在数值上相等，而且单位也相同。首先，我们可以注意到，这里所指的位移是由没有量纲的单位力所引起的位移，它与一般的位移的关系是：

$$\Delta_{ij}=\delta_{ij}P_j$$

即

$$\delta_{ij}=\frac{\Delta_{ij}}{P_j}=\frac{\text{广义位移}}{\text{广义力}}$$

其中 Δ_{ij} 和 P_j 是一般的位移和力。因此，这就使 δ_{ij} 有它特殊的量纲或单位，我们特称这种位移为"比位移"。现以图 14-10 所示例子来说明，其中 δ_{12}、δ_{21} 的量纲计算应为：

$$\delta_{12}=\frac{\Delta_{12}}{M_2}=\frac{[\text{长度}]}{[\text{力}]\times[\text{长度}]}=\frac{1}{[\text{力}]}$$

$$\delta_{21}=\frac{\theta_{21}}{P_2}=\frac{[\text{弧度}]}{[\text{力}]}=\frac{1}{[\text{力}]}$$

可见两者单位也必相同。

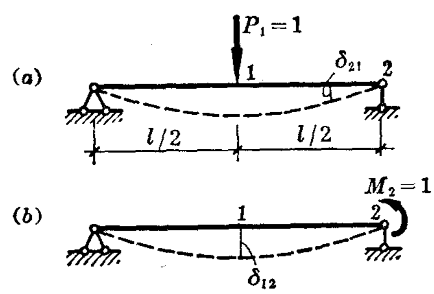


图 14-10

二、反力互等定理

反力互等定理是功的互等定理的另一特殊情况，适用于超静定结构中。如图 14-11a 所示超静定结构——连续梁(也可以是其他类型的结构)，当支座 1 处发生单位位移时，梁内产生内力，支座也产生反力，例如在支座 1 和 2 处分别产生反力 r_{11} 和 r_{21}(r 的第一个脚标表示哪个约束产生反力，第二个脚标表示哪个约束产生位移)。又如图 14-11b 所示，若支座 2 产生单位位移，则支座 1 和 2 处产生反力 r_{12} 和 r_{22}。对于这两种状态，根据功的互等定理知

$$r_{21}\times 1+r_{11}\times 0=r_{22}\times 0+r_{12}\times 1$$

所以得

$$r_{12}=r_{21} \tag{14-3}$$

上式即为反力互等定理，它表明："第一个约束沿基本身方向发生单位位移时，在第二个约束内所产生的反力等于第二个约束沿其本身方向发生单位位移时在第一个约束内所产生的反力。"

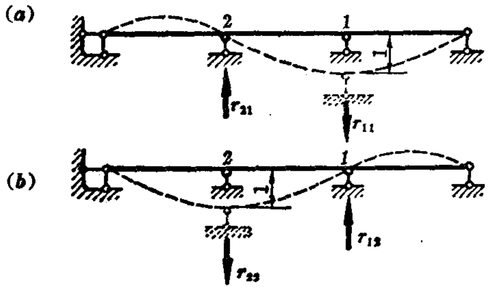


图 14-11

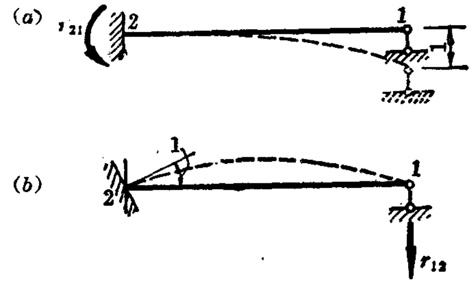


图 14-12

反力互等定理中的位移和反力也应理解为广义位移和广义力。如位移互等定理一样，这里的反力称为"比反力"，即

$$r_{ij}=\frac{R_{ij}}{\Delta_{ij}}=\frac{\text{广义力}}{\text{广义位移}}$$

它们(指 r_{12}、r_{21})不仅是数值相等，且量纲(单位)相同。如图 14-12 所示情况，我们可导出比反力的量纲如下：

$$r_{21}=\frac{M_{21}}{\Delta_1}=\frac{[\text{力}]\times[\text{长度}]}{[\text{长度}]}=[\text{力}]$$

$$r_{12}=\frac{R_{12}}{\theta_2}=\frac{[\text{力}]}{[\text{弧度}]}=[\text{力}]$$

反力互等定理在超静定结构计算中也有很大用处。

三、反力位移互等定理

反力位移互等定理是功的互等定理的第三个特殊情况。如图 14-13a 所示结构，r_{1P} 是由于单位荷载 $P=1$ 所引起的某一约束处的反力，而图 14-13b 中的 δ_{P1} 是由于该约束沿其本身方向发生单位位移时在单位荷载方向引起的位移，从功的互等定理知

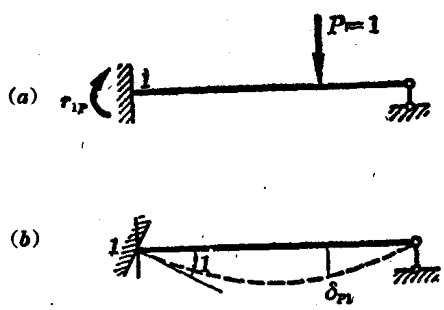


图 14-13

$$r_{1P}\times1+1\times\delta_{P1}=0$$

所以

$$r_{1P}=-\delta_{P1} \tag{14-4}$$

上式即为反力位移互等定理，它表明："单位荷载在体系某一约束中所产生的反力在数值上等于此一约束沿其本身方向有单位位移时在单位荷载方向所产生的位移，但两者的正负号相反。"

如果我们注意到这里是指比反力和比位移(定义与前面的不同)，则对于它们在量纲上也相同便不会感到奇怪。例如在图 14-13 的例子中，

$$r_{1P}=\frac{R_{1P}}{P}=\frac{\text{广义力}}{\text{广义力}}=\frac{[\text{力}]\times[\text{长度}]}{[\text{力}]}=[\text{长度}]$$

$$\delta_{P1}=\frac{\Delta_{P1}}{\theta}=\frac{\text{广义位移}}{\text{广义位移}}=\frac{[\text{长度}]}{[\text{弧度}]}=[\text{长度}]$$

可见两者的量纲相同。

反力位移互等定理除了在超静定结构的计算中应用外，用它绘制超静定结构的内力影响线也是很方便的，这将在第二十三章可以看到。

第三节　虚功原理

一、虚功的概念

什么叫虚功？现先以图 14-14 为例来说明实功与虚功的区别。设先在梁的 i 点上施加一力 P，于是梁轴由原来的直线状态变为图中曲线 I 的状态，i 点下降至 i' 点。此时力 P 作了功 $\frac{1}{2}P\cdot\Delta_i$。由于 i 点的位移 Δ_i 是直接由 P 引起的，此时力 P 所作的功称为“实功”。

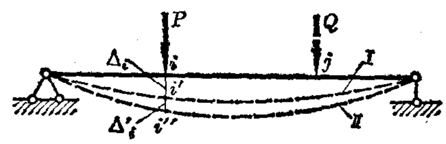


图　14-14

设在此以后，由于其他原因（例如在另一点 j 上再加一力 Q，或其他任何原因），梁由曲线 I 的位置变至曲线 II 的位置，则力 P 继续作功，在从状态 I 到状态 II 的阶段中，力 P 的大小和方向都保持不变，因此它所作的功就等于 $P\cdot\Delta'_i$，注意此时的位移 Δ'_i 不是由力 P 引起的，而是由其他原因引起的，它与力 P 无关，我们称它为“虚位移”，力 P 在虚位移 Δ'_i 上所作的功 $P\cdot\Delta'_i$ 则称为“虚功”。由于在作“虚功”的过程中，P 值保持不变，所以在功的数值中是没有系数 1/2 的。

如上所述，力系在自身引起的位移上所作的功，称为“实功”；力系在虚位移上所作的功，称为“虚功”。而虚位移是指与该力系无关的、任意的（由任何其他因素引起的）位移，但虚位移必须是微小的、实际可能发生的位移，即它必须满足约束条件和变形连续条件。

二、内力的变形虚功——内功

前面所举的例子只谈到外力的虚功，由于我们研究的对象是弹性变形体，一般弹性变形体在发生虚位移时将同时产生虚变形，因此变形体的内力将在虚变形上作功，这就是内力的变形虚功。下面导出梁的变形虚功的表达式。

图 14-15a 所示为一简支梁在外荷载作用下处于平衡，梁中各截面将有内力 M、Q。现在让梁发生图 14-15b 所示的虚变形，然后来讨论内力 M、Q 在虚变形上所作的虚功。

考察梁的微段 dx，其受力状态如图 14-15 c 所示。微段的虚位移则包括刚性位移（即微段的整体移动和转动）和微段自身的变形两部分，而微段自身的变形是由微段两侧面的相对位移来表达的，它包

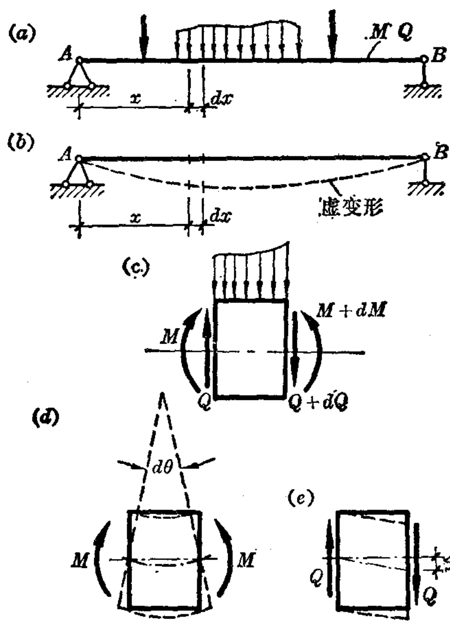


图　14-15