

高等学校试用教材

高等数学

〔日〕横手一郎 著

张卿 赵为礼 于长敏 译

习题课教程

下 册

013-44
C9>

794624

高等学校试用教材

高等数学 习题课教程

(下册)

[日] 横手一郎 著
张卿 赵为礼 于长敏 译



内 容 提 要

该书理论系统,内容丰富,例、习题类型齐全。每节均有(1)内容提要;(2)例题;(3)练习题;(4)练习题解答。在叙述上由浅入深,通俗易懂,能紧密配合理工科院校的高等数学教学大纲,对读者掌握基本概念、基本理论、基本方法和解题的技能技巧均有裨益,是一本较好的习题课教材。

本书分上、下两册装订,上册为一元微积分;下册包括多元函数微积分、无穷级数和常微分方程等内容。

高等数学习题课教程

上 册

〔日〕横 手 一 郎 著

张 卿 赵为礼 于长敏 译

*

86047部队青年印刷厂 印刷

*

787×1092毫米32开本 450,000字

1984年7月 出版 印数: 1—3000

吉林省文化厅(83)294号批准 工本费2.75元

原文序言

本书编写的宗旨与上册序言所述完全相同。

在上册里搜集的是关于一元函数微积分的习题，本册中搜集的是多元函数微积分、无穷级数以及常微分方程部分的例题和习题。

按照最初的想法，想一直编写到空间的曲线积分，但由于篇幅所限，很遗憾只好略去了。

本书的解答并不一定是最优解法，并且，由于本人的经验肤浅，本书一定还有许多不足之处，衷心希望读者给予批评，以便改正。

编写本书时，包括上册在内，参考了下列书籍：

- | | | | |
|----------|---|------------|-------|
| 高木贞治 | 著 | 解析概论 | 岩波书店 |
| 竹内瑞三 | 著 | 高等微分学 | 裳华书房 |
| 未纲，荒又 | 著 | 微分积分学（上、下） | 富山书房 |
| 矢野健太郎 | 著 | 微分积分学 | 裳华书房 |
| 杉村，山村，国枝 | 著 | 积分学题解 | 裳华书房 |
| 黑须康之助 | 著 | 微分学题解 | 森北出版社 |
| 平野幸太郎 | 著 | 积分学题解 | 森北出版社 |
| 矢野，石原 | 著 | 微分学习题选讲 | 裳华书房 |
| 矢野，石原 | 著 | 积分学习题选讲 | 裳华书房 |
| 福田，安岡， | 著 | 微积分学题解Ⅱ | 共立出版社 |
| 铃木黑崎 | | | |

高桥，佐藤
藤泽平岛

著 应用解析学 I 楨书店

除此之外，还有很多人曾给予帮助和指导，在此一一表示感谢

本书在出版和校对时，分别受到森北出版社的柳泽茂八氏、森崎满氏的大力协助，在此深表感谢。

著 者

1978年秋

下 册 目 录

原文序言	1
------------	---

第六章 无穷级数

6.1 无穷级数	311
6.2 正项级数	316
6.3 绝对收敛与条件收敛	327
6.4 函数级数	332
6.5 幂级数	340
6.6 幂级数展开式	352

第七章 多元函数微分法

7.1 平面点集	371
7.2 二元函数的极限与连续性	377
7.3 偏微分与全微分	384
7.4 高阶偏导数	393
7.5 复合函数的偏导数	404
7.6 泰勒定理与中值定理	419

第八章 多元函数微分法的应用

8.1 极值	426
8.2 隐函数	444
8.3 平面曲线	461
8.4 空间曲线与曲面	490

第九章 重积分

9.1	二重积分	499
9.2	变量替换	515
9.3	多重积分	525

第十章 重积分的应用

10.1	体积	542
10.2	曲面面积	556
10.3	重心	568
10.4	转动惯量	583
10.5	平面曲线积分	590

第十一章 微分方程

11.1	微分方程	604
11.2	可分离变量方程	607
11.3	齐次方程	613
11.4	一阶线性微分方程	621
11.5	全微分方程	631
11.6	克莱罗方程和拉格朗日方程	642
11.7	二阶常系数线性微分方程	649

附录 I	极坐标、三角函数公式	658
------	------------	-----

附录 II	球坐标、柱坐标	662
-------	---------	-----

第六章 无穷级数

6.1 无穷级数

提 要

把数列 $\{a_n\}$ 中的各项用“+”号连起来就得下式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

我们称(1)式为**无穷级数**或简称为**级数**，常用符号

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 或简单地用 $\sum a_n$ 来表示(1)式。并把

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

叫做级数(1)的 **n 项和**或(前 n 项的)**部分和**。若当 $n \rightarrow \infty$ 时，数列 $\{A_n\}$ 收敛于 A 则称级数(1)收敛，并把 A 叫做级数(1)的和。这时记

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

若 $\{A_n\}$ 发散，则称级数(1)发散。并且，当 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -\infty$ 时，级数(1)也记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

1. 级数 $\sum a_n$ 去掉或增加有限项, 不改变其敛散性.

2. 设 $\sum a_n, \sum b_n$ 皆收敛, 则

$$(1) \sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n;$$

$$(2) \sum (K a_n) = K \sum a_n \quad (K \text{ 为常数}).$$

3. 设 $\sum a_n$ 收敛, 且其和为 A , 则按 $\sum a_n$ 中的项的顺序, 任意加括号, 如

$$(a_1 + a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6) + \cdots,$$

所得到的新的级数仍收敛, 且其和仍为 A .

〈注〉 命题3的逆命题一般不成立. 例如 $(1-1) + (1-1) + \cdots$ 收敛, 但 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 发散.

4. **Cauchy准则:** $\sum a_n$ 收敛的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得对一切 $n > m > N$, 恒有 $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$, 即 $|A_n - A_m| < \varepsilon$.

5. 若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

例 题

〔例题1〕 判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

解. (1) 当 $a = 1$ 时, $A_n = n$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$;

当 $a = -1$ 时, $A_{2n} = 0, A_{2n-1} = -1$. 所以 $\{A_n\}$ 不收敛;

当 $a \neq 1$ 时,

$$A_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

于是, 当 $|a| < 1$ 时, $a^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 故 $A_n \rightarrow \frac{1}{1-a}$;

当 $|a| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$, 所以 A_n 也不收敛.

故级数 $\sum a^{n-1}$ 只有当 $|a| < 1$ 时收敛, 其和为 $\frac{1}{1-a}$, 当 $|a| \geq 1$ 时发散.

$$\begin{aligned} (2) A_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= 1. \end{aligned}$$

因此, 所论级数收敛, 且其和为 1.

〔例题2〕称 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 为调和级数.

试证调和级数发散.

解. 设 $a_n = \frac{1}{n}$, 有

$$\begin{aligned} \left| a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m} \right| &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots \\ &+ \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 时, 由提要 4 收敛的充要条件知对任何 N , 此级数都是发散的.

练习题二十五

1. 下列级数若有和, 则求这个和.

$$(1) \sum \frac{1}{n^2 + 5n + 4}; \quad (2) \sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1};$$

$$(3) \sum n \sin \frac{1}{n}; \quad (4) \sum \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1};$$

$$(5) \sum \sin na; \quad (6) \sum \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m-1)(n+m)},$$

(m 为整数).

(2. 当 $|a| \neq 1$ 时, 求如下级数的和.)

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} + \frac{a^8}{1-a^{16}} + \cdots$$

3. 利用提要 4 (Cauchy 准则) 证明提要 5.

练习题二十五解答

1. (略解) 所求级数的通项均设为 a_n , 前 n 项和为

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 于由 } A_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+4)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right). \end{aligned}$$

从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{36}$, 即和为 $\frac{13}{36}$.

$$(2) \text{ 因为 } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 所以由提要 5 知级数不收敛.

$$(3) \text{ 因为 } a_n = n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \text{ 故级数}$$

发散.

$$(4) \text{ 因为 } A_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow \frac{2}{3}, \text{ 故其和为 } \frac{2}{3}.$$

(5) 当 m 为整数时, 若 $a = m\pi$, 则 $\sin na = 0$. 显然级数收敛且和为零; 当 $a \neq m\pi$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. 由提要 5 知级数发散.

$$(6) \text{ 因为 } A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} \right\}$$

$$= \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \right\}.$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \text{故其和为 } \frac{1}{m(m!)}.$$

2. (略解) 设前 n 项的部分和为 A_n , 则有

$$A_1 = \frac{a}{1-a^2} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2},$$

$$A_2 = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^4},$$

$$A_3 = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^8},$$

$$A_4 = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^8} + \frac{a^8}{1-a^{16}} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^{16}}.$$

一般地, 有

$$A_n = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^{2^n}}.$$

(用数学归纳法不难验证该问题的正确性)。因此, 当 $|a| > 1$ 时, $A_n \rightarrow 1/(1-a) (n \rightarrow \infty)$; 当 $|a| < 1$ 时, $A_n \rightarrow$

$\frac{1}{(1-a)} - 1 = a/(1-a) (n \rightarrow \infty)$ 。所以, 该级数的和是当

$|a| > 1$ 时为 $\frac{1}{1-a}$; 当 $|a| < 1$ 时为 $\frac{a}{1-a}$ 。

3. (证) 于提要 4 中设 $n = m + 1$, 则有 $|a_{m+1}| < \varepsilon (m > N)$ 。因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

6.2 正项级数

提 要

若 $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则称级数 $\sum a_n$ 为**正项级数**。

若 $b_n = (-1)^{n-1} a_n, a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则称级数 $\sum b_n$ 为**交错级数**。

1. 正项级数收敛的必要条件是: 部分和数列 $\{A_n\}$ 有界。

2. **比较判别法:** 设 Σa_n , Σb_n 皆为正项级数且 $a_n \leq kb_n$ ($n = 1, 2, \dots$; k 为正数), 则

(1) 当 Σa_n 收敛时, Σb_n 也收敛.

(2) 当 Σa_n 发散时, Σb_n 也发散.

3. 设 Σa_n , Σb_n 皆为正项级数. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k < \infty \quad (k \text{ 为正数})$$

则这两个级数同时收敛或同时发散.

4. **d'Alembert (达朗贝尔) 判别法:** 设 Σa_n 为正项级数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,$$

则

(1) 当 $0 \leq r < 1$ 时, Σa_n 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, Σa_n 发散;

5. **Cauchy (柯西) 判别法:** 设 Σa_n 为正项级数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad (r \text{ 为正数})$$

则

(1) 当 $0 \leq r < 1$ 时, Σa_n 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, Σa_n 发散.

6. 设 $f(x)$ 是在 $[m, +\infty)$ (m 为整数) 上单调减少的连续函数, 并且 $f(x) \geq 0$, 则级数

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) = f(m) + f(m+1) + \dots$$

和无穷积分

$$\int_m^{+\infty} f(x) dx$$

同时收敛或同时发散。

7. Leibniz(莱布尼兹)定理: 对于交错级数 $\sum (-1)^{n-1} a_n$, 若

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

则此级数收敛。

8. Raabe(拉贝)判别法: 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = K,$$

则当 $K = 1$ 时, $\sum a_n$ 收敛; 当 $K < 1$ 时, $\sum a_n$ 发散; 当 $K = 1$ 时, $\sum a_n$ 的敛散性需要利用其它更为精确的判别法判别之。

例 题

〔例题1〕判断级数 $\sum \frac{1}{n^k}$ 的敛散性。

解 当 $k \leq 0$ 时, $\frac{1}{n^k} \geq 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \neq 0$. 故级数发散;

当 $k > 0$ 时, 设 $f(x) = \frac{1}{x^k}$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上满足提要

6 的条件, 即

$$\int_1^b \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{1-k} (b^{1-k} - 1) \quad (k \neq 1);$$

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b \quad (k = 1).$$

从而, 广义积分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^k} dx$$

收敛的充要条件是 $k > 1$. 故所求级数当 $k > 1$ 时收敛, 当 $k \leq 1$ 时发散.

〈注〉在应用比较判别法时经常以此级数为比较标准.

〔例题2〕判断下列级数的敛散性.

$$(1) \sum (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}); \quad (2) \sum \frac{a^n}{n^k} (a > 0);$$

$$(3) \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad (4) \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

解. 所有级数 $\sum a_n$ 的通项均设为 a_n ,

$$\begin{aligned} (1) a_n &= \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &> \frac{2}{\sqrt{n^2 + n^2} + \sqrt{n^2 + n^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因为 $\sum \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum a_n$ 也发散.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k a = a.$$

由提要4可知, 当 $a < 1$ 时级数 $\sum a_n$ 收敛; 当 $a > 1$ 时, 级数 $\sum a_n$ 发散; 当 $a = 1$ 时, 由例题1知 $k > 1$ 时, 级数收敛, $k \leq 1$ 时级数发散.

$$\begin{aligned} (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

由提要5可知, 级数 $\sum a_n$ 收敛.

(4) 由提要7易见, $\sum a_n$ 收敛.

练习题二十六

1. 判断下列级数的敛散性.

$$(1) \sum \frac{1+n}{1+n^2}; \quad (2) \sum \frac{n}{n^3+1}; \quad (3) \sum \frac{2^n+1}{3^{n+n}};$$

$$(4) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad (5) \sum \frac{n}{3^n};$$

$$(6) \sum (\sqrt[n]{a}-1) (a \geq 1); \quad (7) \sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}};$$

$$(8) \sum \frac{n!}{n^n}; \quad (9) \sum \frac{1}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right);$$

$$(10) \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}.$$

2. 判断下列级数的敛散性.

$$(1) \sum \frac{1}{a+bn}; \quad (2) \sum \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right);$$

$$(3) \sum (-1)^{n-1} \sin \frac{a}{n}; \quad (4) \sum \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(5) \sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n^k}; \quad (6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k};$$

$$(7) \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)};$$

$$(8) \sum \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)} (a > 0, b > 0).$$

3. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛.

4. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 且 $\{a_n\}$ 单调递减, 则