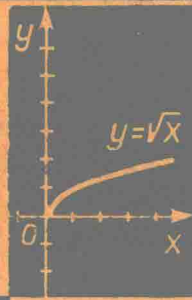
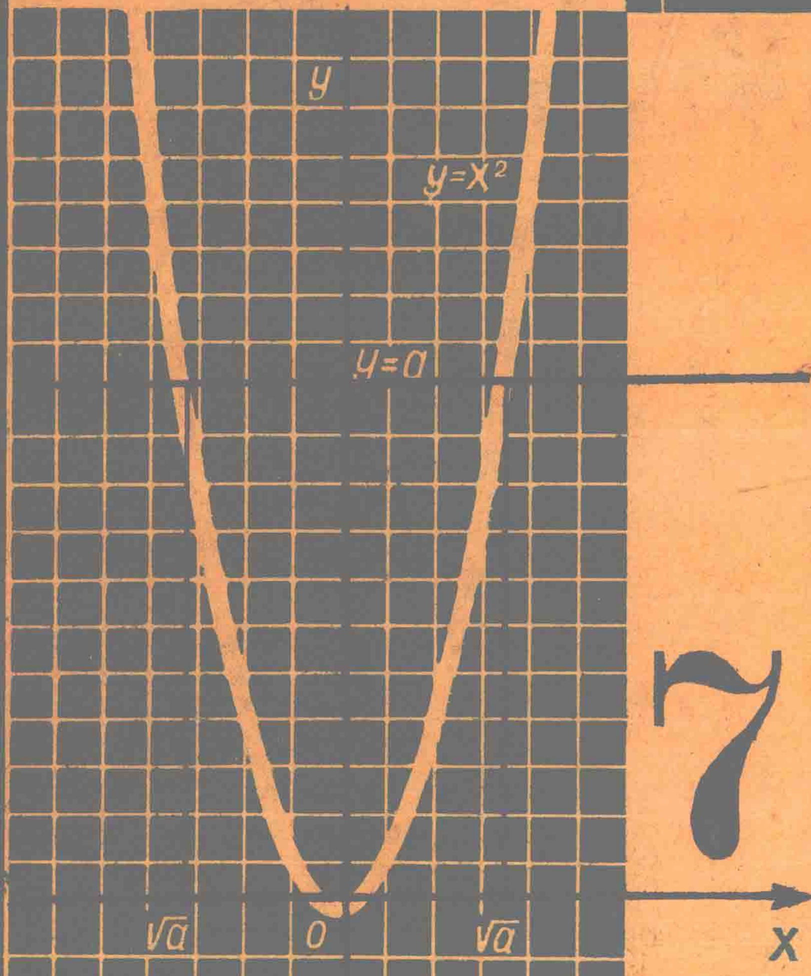
АЛГЕБРА





7

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 7-го КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждено Министерством просвещения СССР

Под редакцией
А. И. МАРКУШЕВИЧА

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

Ю. Н. МАКАРЫЧЕВ, Н. Г. МИНДЮК,
К. С. МУРАВИН, С. Б. СУВОРОВА

$А \frac{60601-396}{103(03)-78}$ инф. письмо

ГЛАВА I

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В предшествующем курсе мы познакомились с выражениями, составленными из чисел и переменных, в которых используются действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Такие выражения называются *рациональными*.

Приведем примеры рациональных выражений:

$$a^2-3a+5;\ \frac{x^2-2xy+y^2}{8};\ a-\frac{7b}{4c};\ 2k-p(k+p);\ \frac{a+b}{a-2b};$$

$$13{,}2x:12;\ \frac{(a+b)^2-2ab}{a^2+b^2}.$$

Среди написанных рациональных выражений есть такие, которые не содержат деления на выражение с переменной:

$$a^2-3a+5;\ \frac{x^2-2xy+y^2}{8};\ 2k-p(k+p)\ \text{и}\ 13{,}2x:12.$$

Рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменной, называется *целым выражением*. Очевидно, что целое выражение имеет смысл при всех значениях входящих в него переменных.

В VI классе мы установили, что любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

Например, целое выражение $(2a-1)(2a+1)-(3a^2+a-1)$ тождественно равно многочлену a^2-a.

Действительно,

$$(2a-1)(2a+1)-(3a^2+a-1)=$$
$$=(4a^2-1)-(3a^2+a-1)=a^2-a.$$

Выражение $\frac{x+1}{5}\cdot\frac{25+5x}{x^2-1}$ есть произведение двух дробей. Это рациональное выражение не является целым, так как в знаменателе одной из дробей содержится переменная.

Пользуясь правилом умножения дробей и основным свойством дроби, мы можем преобразовать это выражение в дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены:

$$\frac{x+1}{5}\cdot\frac{25+5x}{x^2-1}=\frac{(x+1)\,5\,(5+x)}{5\,(x+1)\,(x-1)}=\frac{5+x}{x-1}.$$

Равенство $\frac{x+1}{5}\cdot\frac{25+5x}{x^2-1}=\frac{5+x}{x-1}$ истинно при всех значениях x, при которых его левая и правая части имеют смысл.

В дальнейшем мы увидим, что *любое рациональное выражение можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — многочлены (в частности, одночлены).*

1. Является ли целым выражение:

а) $\frac{a^3}{1,25}$; г) $15,6:6-a$; ж) $\frac{b^2-bc}{b}$;

б) $12(x^2-1)$; д) $15,6:(6-a)$; з) $\frac{8x^2-12y^2}{7}$;

в) $36:x+1$; е) $\frac{y^2-1}{y-1}$; и) $\left(\frac{a}{3}-\frac{b+c}{2}\right)^2$?

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(x^2-x+1)(x-1)-x(x^2-4)$;
б) $y^3(y-4)-(y^2+y-2)(y^2+2)$.

3. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(x+10)(x-10)$; г) $(4-0,5b)(0,5b+4)$; ж) $(-3+q)^2$;
б) $(y-5b)(y+5b)$; д) $(x+7)^2$; з) $(0,2y+0,5x)^2$.
в) $(2a+3)(3-2a)$; е) $(a-2x)^2$;

4. Упростите выражение:

а) $(2p-5)^2+(2p+5)^2$; в) $(6-y)^2-(y+6)(y-6)$;

б) $\left(2a+\frac{1}{4}\right)^2-\left(2a-\frac{1}{4}\right)^2$; г) $(x^2-4)^2-(x+2)(x-2)(x^2+4)$.

5. Разложите на множители:

а) $8ab+12bc$; б) $15ax-20ay$; в) x^2-x; г) $2y^3+y^2$.

6. Пусть $A=x-y$ и $B=y-x$.
а) Докажите, что выражения A и B противоположны, т. е. что их сумма тождественно равна нулю.
б) Докажите, что выражения A^2 и B^2 тождественно равны.
в) Докажите, что выражения A^3 и B^3 противоположны.

7. При каких значениях переменной не имеет смысла дробь:

а) $\frac{2c}{c-14}$; в) $\frac{a^2-9}{3a-1}$; д) $\frac{y+4}{y^2-6y}$;

б) $\frac{3x-1}{20x+10}$; г) $\frac{x+10}{x(x-3)}$; е) $\frac{b^2-1}{25b^2-4}$?

8. Найдите область определения выражения:

а) $x^2 - 8x + 9$; в) $\frac{3x-6}{10}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25}$;

б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^3-8}{4x^2-1}$; е) $\frac{5x-1}{25x^2-5x}$.

9. Сократите дробь*:

а) $\frac{45a^3b^4}{54a^4b^3}$; г) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$; ж) $\frac{p^2-q(2p-q)}{pq-q(2p-q)}$;

б) $\frac{26a^2b^6}{65a^6b^2}$; д) $\frac{7a(a-b)}{14a^2(b-a)}$; з) $\frac{a(a+b)-b(a-b)}{b(a+b)+a(a-b)}$.

в) $\frac{3x+9y}{x^2-9y^2}$; е) $\frac{6x^2-3xy}{6y^2-12xy}$;

10. Упростите выражение:

а) $\frac{5x^2-x}{a^2} \cdot \frac{a}{x^2}$; в) $\frac{a-3}{4b^2} : \frac{4a-12}{b^3}$;

б) $\frac{a^2b^2}{a^2-9b^2} \cdot \frac{a+3b}{2ab}$; г) $\frac{7x^2y}{x^2-3xy} : \frac{21x}{x-3y}$.

11. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(a-2)^2}{a^2-5a} \cdot \frac{2a-10}{4-a^2}$ при $a = -\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1-4x^2}{x^2-4x} : \frac{(2x-1)^2}{x^2-16}$ при $x = -0{,}25$.

2. СУММА ДРОБЕЙ, ИМЕЮЩИХ РАВНЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

Выражение $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ есть сумма двух дробей с равными знаменателями. Покажем, что эту сумму можно представить в виде дроби $\frac{a+b}{c}$.

Если переменные a, b и c принимают натуральные значения, то равенство

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad (1)$$

истинно на основании правила сложения обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, если $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, то $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

Равенство (1) будет истинным не только при натуральных, но и при любых значениях a, b и c, где $c \neq 0$.

---

* Здесь и далее в преобразованиях рациональных выражений, если не сделано специальных оговорок, не требуется указывать множество, на котором исходное и полученное выражения тождественно равны.

Например, если $a = 1,5$, $b = -6$, $c = \frac{1}{3}$, то

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{1,5}{\frac{1}{3}} + \frac{-6}{\frac{1}{3}} = 4,5 - 18 = -13,5,$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1,5-6}{\frac{1}{3}} = \frac{-4,5}{\frac{1}{3}} = -13,5.$$

Докажем, что равенство (1) истинно при любых a, b и c, где $c \neq 0$. Так как $\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}$ и $\frac{b}{c} = b \cdot \frac{1}{c}$, то

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}.$$

Вынесем за скобки общий множитель $\frac{1}{c}$:

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c}(a+b).$$

Но $\frac{1}{c}(a+b) = \frac{a+b}{c}$, значит, равенство $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ истинно при всех значениях переменных a, b и c, где $c \neq 0$.

Разность дробей с равными знаменателями можно заменить суммой и представить в виде дроби:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{-b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Сумму дробей с одинаковыми знаменателями можно представить в виде дроби с тем же знаменателем и в том случае, когда число слагаемых более двух.

Например:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{-c}{d} = \frac{a+b}{d} + \frac{-c}{d} = \frac{a+b-c}{d}.$$

Вообще, при всех значениях переменных, при которых знаменатели отличны от нуля, *сумма дробей с равными знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и числителем, равным сумме числителей данных дробей.*

Преобразование суммы нескольких дробей в дробь иногда называют *сложением дробей*.

Приведем пример преобразования суммы дробей с равными знаменателями:

$$\frac{7a^2b+2}{ab^2} - \frac{5a^2b+6}{ab^2} + \frac{4}{ab^2} = \frac{(7a^2b+2)-(5a^2b+6)+4}{ab^2} =$$

$$= \frac{7a^2b+2-5a^2b-6+4}{ab^2} = \frac{2a^2b}{ab^2} = \frac{2a}{b}.$$

Преобразование в дробь суммы дробей с противоположными знаменателями легко свести к преобразованию суммы дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель одной из дробей на —1.

Например:

$$\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x}{a-2x}=\frac{3a}{2x-a}+\frac{6x\cdot(-1)}{(a-2x)\cdot(-1)}=$$
$$=\frac{3a}{2x-a}+\frac{-6x}{2x-a}=\frac{3a-6x}{2x-a}=\frac{-3(2x-a)}{2x-a}=-3.$$

Поменяв местами в равенстве (1) левую и правую части, получим:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Записанное в таком виде равенство (1) позволяет представлять дробь в виде суммы дробей.

Например:

1) $\frac{3x^2+15x-2}{3x^2}=\frac{3x^2}{3x^2}+\frac{15x}{3x^2}-\frac{2}{3x^2}=1+\frac{5}{x}-\frac{2}{3x^2}$;

2) $\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}$.

12. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$; г) $\frac{5b^2}{8}-\frac{3b^2}{8}$; ж) $\frac{a+b}{6}-\frac{a-2b}{6}$;

б) $\frac{a}{5}-\frac{b}{5}$; д) $\frac{x+y}{9}-\frac{x}{9}$; з) $\frac{x+5}{9}-\frac{x+2}{9}$;

в) $\frac{a}{7}+\frac{2a}{7}$; е) $\frac{m}{12}+\frac{n-m}{12}$; и) $\frac{11x-5}{14}+\frac{3x-2}{14}$.

13. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{x}{y}+\frac{5-x}{y}$; г) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$;

б) $\frac{1+b}{b^2}-\frac{1-b}{b^2}$; д) $\frac{a-2}{8a}+\frac{2a+5}{8a}-\frac{3-a}{8a}$;

в) $\frac{5n+1}{8k}-\frac{5n-7}{8k}$; е) $\frac{7y-5}{12y}-\frac{10y-19}{12y}+\frac{10+15y}{12y}$.

14. Докажите, что при любых a и b, при которых знаменатель отличен от нуля:

а) значение выражения $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ равно 4;

б) значение выражения $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ равно 2.

15. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^2+1}{x-3}-\frac{10}{x-3}$ при $x=97$;

б) $\frac{y+7}{y^2-25}-\frac{2y+2}{y^2-25}$ при $y=-5{,}1$.

16. Упростите выражение:

а) $\frac{x}{y-1}+\frac{5}{1-y}$;

б) $\frac{a}{c-3}-\frac{6}{3-c}$;

в) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$;

г) $\frac{5p}{2q-p}+\frac{10q}{p-2q}$;

д) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8a}{4-a}$;

е) $\frac{x^2+9y^2}{2x-6y}+\frac{6xy}{6y-2x}$.

17. Найдите область определения выражения и докажите, что на всей области определения значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}$;

б) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}$.

18. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}$;

б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3}+\frac{10x}{(5-x)^3}$.

19. Представьте в виде суммы дробей:

а) $\frac{a+b}{x}$;

б) $\frac{2a^2+a}{y}$;

в) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$;

г) $\frac{12a-y^2}{6ay}$.

20. Преобразуйте данную дробь в сумму целого выражения и дроби:

а) $\frac{x+2}{x}$;

б) $\frac{y+z^2}{z}$;

в) $\frac{a^2-2a+4}{a}$;

г) $\frac{b^2+3b-6}{b}$;

д) $\frac{x+y+1}{x+y}$;

е) $\frac{p^2-2p+7}{p-2}$.

21. При каких натуральных n значение выражения является натуральным числом:

а) $\frac{n+6}{n}$;

б) $\frac{5n-12}{n}$?

22. Зная, что $\frac{x}{y}=5$, найдите значение выражения:

а) $\frac{x+y}{y}$;

б) $\frac{x-y}{y}$;

в) $\frac{y}{x}$;

г) $\frac{x+2y}{x}$.

23. Зная, что $\frac{x+y}{y}=3$, найдите значение выражения:

а) $\frac{x}{y}$;

б) $\frac{y}{x+y}$;

в) $\frac{x-y}{y}$;

г) $\frac{y}{x}$.

Упражнения для повторения

24. Разложите на множители:

а) $(a + x)^2 - 2a(a + x)$; в) $my - mx + ny - nx$;
б) $3b(b - y) - (b - y)^2$; г) $ab + 8a + 9b + 72$.

25. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{1}{4}x$; б) $y = -\frac{x}{3}$.

В каких координатных четвертях расположен график функции, заданной формулой $y = kx$, если $k > 0$; $k < 0$?

26. а) Найдите $|a|$, если $a = 10$; $0{,}3$; 0; $-2{,}7$; -9.
б) Найдите a, если $|a| = 6$; $|a| = 3{,}2$; $|a| = 0$.

3. СУММА ДРОБЕЙ, ИМЕЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

Пусть поставлена задача: сумму дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ представить в виде дроби.

Используя основное свойство дроби, мы можем свести данную задачу к рассмотренной в предыдущем пункте задаче сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Для этого умножим числитель и знаменатель первой дроби на d, а числитель и знаменатель второй дроби на b. Получим

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}.$$

Выражение d называют *дополнительным множителем* к числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, выражение b — дополнительным множителем к числителю и знаменателю дроби $\frac{c}{d}$. Мы преобразовали дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ в дроби $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{bc}{bd}$, имеющие равные знаменатели. Говорят, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ *привели к общему знаменателю*.

Теперь сумму дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно представить в виде дроби:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Равенство $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ истинно при всех значениях переменных, при которых его левая и правая части имеют смысл.

Выполняя преобразование суммы дробей в дробь, часто удается найти более простой общий знаменатель дробей-слагаемых, чем произведение их знаменателей. Рассмотрим примеры.

1. Преобразовать в дробь выражение $\frac{b^2}{a^5}+\frac{4}{a^3}$.

Знаменатели дробей являются степенями переменной a. Очевидно, что общим знаменателем этих дробей может служить одночлен a^5, так как $a^5 = a^3 \cdot a^2$. Дополнительные множители к числителю и знаменателю каждой из дробей равны соответственно 1 и a^2.

Имеем:

$$\frac{b^2}{a^5}+\frac{4}{a^3}=\frac{b^2\cdot 1}{a^5\cdot 1}+\frac{4\cdot a^2}{a^3\cdot a^2}=\frac{b^2+4a^2}{a^5}.$$

2. Преобразовать в дробь разность $\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}$.

Для нахождения наиболее простого общего знаменателя разложим знаменатель каждой дроби на множители.

Имеем:

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+3)b-(b-3)a}{ab(a+b)}=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{ab}.$$

27. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$; в) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$; д) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$; ж) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$; и) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$.

б) $\frac{c}{4}-\frac{a}{b}$; г) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$; е) $\frac{a}{5c}+\frac{3a}{4c}$; з) $\frac{7a}{15b}-\frac{3a}{10b}$;

28. Выполните сложение дробей:

а) $\frac{5y-3}{6y}+\frac{y+2}{4y}$; в) $\frac{b+2}{15b}-\frac{3c-5}{45c}$;

б) $\frac{3x+5}{35x}+\frac{x-3}{21x}$; г) $\frac{8b+y}{40b}-\frac{6y+b}{30y}$.

29. Преобразуйте в дробь:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}$; д) $\frac{2a-3b}{a^2b}+\frac{4a-5b}{ab^2}$;

б) $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2x-y}{x^2y}$;

в) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$; ж) $\frac{2-a^3}{a^{10}}+\frac{1}{a^7}$;

г) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$; з) $\frac{1+x^4}{x^{12}}-\frac{1}{x^8}$.

30. Преобразуйте сумму в дробь:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$; в) $\frac{bc-a^2}{ab}+\frac{ac-b^2}{bc}+\frac{ab-c^2}{ac}$;

б) $\frac{b-a}{a^2}+\frac{a-b}{b^2}+\frac{a+b}{ab}$; г) $\frac{2a^2-11ab}{2ab}+\frac{a+2b}{a}-\frac{a-5b}{b}$.

31. Преобразуйте выражение в дробь:

а) $x+\frac{1}{y}$; б) $\frac{1}{a}-a$; в) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$; г) $c-\frac{(b+c)^2}{2b}$.

32. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{c-a}{a}+\frac{b}{b+c}$; в) $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{m+n}$; д) $\frac{3x}{5(x+y)}-\frac{2y}{3(x+y)}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+y}{y}$; г) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$; е) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$.

33. Преобразуйте в дробь:

а) $1-\frac{a+b}{a-b}$; в) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$; д) $x-\frac{9}{x-3}-3$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$; г) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; е) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

34. Найдите область определения выражения и докажите, что при всех значениях переменной из области определения значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\frac{5x+3}{2(x+1)}-\frac{7x+4}{3(x+1)}$; б) $\frac{11y+13}{3y-3}+\frac{15y+17}{4-4y}$.

35. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2}{x(a-x)}+\frac{x}{x-a}$; в) $\frac{b}{2a^2-ab}-\frac{4a}{2ab-b^2}$;

б) $\frac{b^2-4by}{y(2y-b)}-\frac{4y}{b-2y}$; г) $\frac{4y}{3x^2+2xy}-\frac{9x}{3xy+2y^2}$.

36. Найдите область определения выражения и упростите его:

а) $\frac{x-25}{5x-25}+\frac{3x+5}{x^2-5x}$; б) $\frac{12-y}{6y-36}-\frac{6}{y^2-6y}$.

37. Докажите, что если a и b — натуральные числа, то значением данного выражения

а) $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}$; б) $\frac{1}{ab-a^2}-\frac{1}{b^2-ab}$ $(a\neq b)$

является обыкновенная дробь с числителем, равным единице. Приведите числовые примеры.

38. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{x^2-3xy}{(x+y)(x-y)}+\dfrac{y}{x+y}$;

б) $\dfrac{c}{b-c}+\dfrac{b^2-3bc}{b^2-c^2}$;

в) $\dfrac{a-2y}{a+y}-\dfrac{y^2-5ay}{a^2-y^2}$;

г) $\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}$;

д) $\dfrac{b-6}{4-b^2}+\dfrac{2}{2b-b^2}$;

е) $\dfrac{b}{ab-5a^2}-\dfrac{15b-25a}{b^2-25a^2}$;

ж) $\dfrac{x-12a}{x^2-16a^2}-\dfrac{4a}{4ax-x^2}$;

з) $\dfrac{a-30y}{a^2-100y^2}-\dfrac{10y}{10ay-a^2}$.

39. Найдите область определения выражения и докажите, что при любом x из области определения:

а) значение выражения $\dfrac{2}{x^4-1}-\dfrac{1}{x^2-1}$ отрицательно;

б) значение выражения $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^4-x^2}$ больше 1.

40. Упростите выражение и найдите его значение при $x=-1{,}5$:

а) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$;

б) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}-\dfrac{1+x}{x^2-9}$.

41. Представьте в виде дроби и, если возможно, упростите:

а) $\dfrac{4}{y+2}-\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{12}{y^2-4}$;

б) $\dfrac{a}{a-6}-\dfrac{3}{a+6}+\dfrac{a^2}{36-a^2}$;

в) $\dfrac{2a+b}{2a^2-ab}-\dfrac{16a}{4a^2-b^2}+\dfrac{2a-b}{2a^2+ab}$;

г) $\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{x+y}{2x-2y}$;

д) $\dfrac{b}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a+b}{b^2-ab}$;

е) $\dfrac{1}{(a-3)^2}-\dfrac{2}{a^2-9}+\dfrac{1}{(a+3)^2}$.

42. Докажите, что:

а) на множестве всех чисел, отличных от 0 и от 3, тождественно равны выражения

$$\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3} \text{ и } a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a};$$

б) на множестве всех чисел, отличных от 2 и от -2, тождественно равны выражения

$$\frac{a^3}{a^2-4}-\frac{a}{a-2}-\frac{2}{a+2} \text{ и } a-1.$$

43. Выразите x из формулы:

а) $x+\dfrac{a}{b}=1$;

б) $\dfrac{p}{p-q}-x=2$;

в) $2x-\dfrac{m}{n}=-1$;

г) $\dfrac{n-1}{2n+1}+3x=2$;

д) $\dfrac{x}{3a}+\dfrac{x}{5a}=8$;

е) $\dfrac{3x}{4a}-\dfrac{x}{6a}=21$.

44. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, имеющий в стоячей

воде скорость v км/ч. Сколько времени t (в часах) потребуется катеру на путь от A до B и обратно, если известно, что скорость течения реки равна 5 км/ч?
Найдите t при: 1) $s = 50$, $v = 25$; 2) $s = 105$, $v = 40$.

45. Турист проплыл на лодке s км по течению реки за t ч. Зная, что скорость течения реки равна v км/ч, определите, сколько времени понадобится туристу на обратный путь. Обозначив искомое время через T, вычислите значение T (в часах) при $s = 18$, $t = 2\frac{2}{5}$, $v = 1{,}5$.

Упражнения для повторения

46. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства и запишите его в виде числового промежутка:

а) $x < 3$; б) $|x| < 3$; в) $|x| \leqslant 4$.

47. Что представляет собой график уравнения:

а) $x = 2$; б) $y = -3$?

48. Найдите значение выражения $\frac{|x|}{x}$, если $x \in \{-8; -5; -2{,}4; 1; 2\frac{1}{3}; 7\}$. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{|x|}{x}$.

49. Функция f задана формулой $f(x) = \frac{2x - 5}{3}$. Найдите $f(-2)$; $f(10)$; $f(16)$. При каком x значение функции равно 3; 0; -9?

50. Функция задана формулой $y = \frac{1}{2}x - 4$. Постройте ее график. Найдите по графику значение функции, если $x = 6$; 4; -6. При каком x значение функции равно -2; 0?

51. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -2x + 1$; б) $y = 2x - 3$.

Отметьте на чертеже угол наклона графика к оси абсцисс. При каком условии угол наклона к оси абсцисс графика функции, заданной формулой $y = kx + l$, является острым, тупым?

4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Мы убедились, что произведение и частное, сумму и разность дробей всегда можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — многочлены. Следовательно, любое рациональное выражение также можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — многочлены. Если при этом нужно выполнить несколько преобразований, то предварительно следует определить порядок их выполнения.

Приведем пример.

Пусть нужно преобразовать в дробь выражение

$$2x + \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x}.$$

Это выражение представляет собой сумму целого выражения $2x$ и произведения дробей $\frac{1}{x+2}$ и $\frac{x^2-4}{3x}$. Сначала нужно преобразовать в дробь произведение дробей, а затем сумму целого выражения и полученной дроби.

1) $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2) \cdot 3x} = \frac{x-2}{3x}$;

2) $2x + \frac{x-2}{3x} = \frac{6x^2+x-2}{3x}$.

Выражение $2x + \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{3x}$ тождественно равно выражению $\frac{6x^2+x-2}{3x}$ на множестве всех значений переменной, при которых каждое из этих выражений имеет смысл.

52. Определите порядок выполнения преобразований и упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1-x^2}{4x^2-1}$;

б) $\left(\frac{1}{1-y} - y\right) : \frac{y^2-y+1}{y^2-2y+1}$;

в) $\frac{ab+b^2}{3} \cdot \frac{3a}{b^3} + \frac{a+b}{b}$;

г) $\frac{x-y}{4y} \cdot \frac{8y^2}{x^2-xy} - \frac{3}{x^2}$;

д) $1 + \frac{24}{(x-2)^2} \cdot \frac{4x-x^2-4}{3(x+6)}$;

е) $\left(\frac{4a}{2-a} - a\right) : \left(2 + \frac{a^2+4}{a-2}\right)$.

53. Упростите выражение:

а) $\left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right)$;

б) $\left(2x + 1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2x - \frac{4x^2}{2x-1}\right)$;

в) $\left(p - q + \frac{4q^2-p^2}{p+q}\right) : \left(\frac{pq}{p^2-q^2} + \frac{q}{q-p}\right)$;

г) $\left(\frac{6a+1}{a^2-6a} + \frac{6a-1}{a^2+6a}\right) \cdot \frac{a^2-36}{a^2+1}$;

д) $\left(\frac{5x+y}{x^2-5xy} + \frac{5x-y}{x^2+5xy}\right) \cdot \frac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$;

е) $\left(a + b - \frac{2ab}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}\right)$;

ж) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2} : \left(\dfrac{1}{y^2-x^2} + \dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

з) $\left(\dfrac{x+2y}{2y}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x-2y}{x^2+2xy} - \dfrac{1}{x^2-4y^2} \cdot \dfrac{(2y-x)^2}{x+2y}\right)$.

54. Докажите, что при всех значениях переменных, при которых выражение имеет смысл, его значение не зависит от значений переменных:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2} + \dfrac{a-b}{2a+2b}\right) \cdot \dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{b}{b-a}$;

б) $\dfrac{y}{x-y} - \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\dfrac{x}{(x-y)^2} - \dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$;

в) $\left(\dfrac{x}{x^2-36} - \dfrac{x-6}{x^2+6x}\right) : \dfrac{2x-6}{x^2+6x} + \dfrac{x}{6-x}$;

г) $\dfrac{y}{3-y} + \dfrac{y^2+3y}{2y+3} \cdot \left(\dfrac{y+3}{y^2-3y} - \dfrac{y}{y^2-9}\right)$.

55. Представьте в виде дроби:

а) $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$;

б) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2$; г) $\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}\right)^2$.

56. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2-\dfrac{a}{x}}{2+\dfrac{x}{a}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-b}{c}+3}{\dfrac{a+b}{c}-1}$; в) $\dfrac{\dfrac{2x-5}{y}-1}{\dfrac{2x+5}{y}+1}$.

57. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, где $x = \dfrac{ab}{a+b}$; б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, где $x = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Упражнения для повторения

58. Найдите координаты точек пересечения с осью x и осью y графика функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{1}{3}x - 2$; б) $y = -0{,}4x + 2$.

Постройте график этой функции.

59. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку (0; 4) и параллельной прямой $y = 3x$.

60. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой $y = -\dfrac{1}{2}x - 8$.

61. Изобразите схематически график функции, заданной формулой $y = kx + l$, если:

а) $k > 0$, $l > 0$; в) $k < 0$, $l < 0$;
б) $k < 0$, $l > 0$; г) $k = 0$, $l > 0$.

62. Является ли одно из множеств A и B подмножеством другого, если:

а) $A = \{-1; 0; 3\}$, $B = \{-4; -3; -1; 0; 2; 3; 4\}$;
б) A — множество целых чисел, B — множество четных чисел;
в) A — множество дробных чисел, B — множество положительных чисел?

63. а) Найдите множества $X \cup Y$ и $X \cap Y$, если $X = \{a; b; c; d\}$; $Y = \{c; d; f\}$.
б) Найдите множества $A \cap B$, $A \cup B$, если A — множество двузначных чисел, кратных 10, и B — множество двузначных чисел, кратных 15.

64. Покажите на координатной прямой множества $A \cap B$ и $A \cup B$, если:

а) $A = [-8; 3]$ и $B = [-5; 6]$;
б) $A =]-\infty; 10[$ и $B = [6; +\infty[$.

65. На рисунке 1 левый круг изображает множество A, а правый круг — множество B. Вся заштрихованная область изображает объединение множеств A и B, а область, заштрихованная дважды, соответствует пересечению множеств A и B. Покажите область, которая изображает: а) множество элементов A, не принадлежащих B; б) множество элементов B, не принадлежащих A.

66. Используя схему, приведенную на рисунке 1, решите задачу: а) Пусть A — множество учеников VII класса, посещающих секцию гимнастики, а B — множество учеников этого же класса, посещающих лыжную секцию. Сколько учеников занимается одновременно в обеих секциях, если в классе всего 36 человек; только гимнастикой занимается 10 человек, а только лыжами — 14 человек. (Известно, что каждый ученик класса занимается по крайней мере в одной из указанных секций.)

б) Пусть A — множество учеников VII класса, посещающих секцию гимнастики, а B — множество учеников этого же класса, посещающих лыжную секцию, причем известно, что каждый ученик занимается по крайней мере в одной из указанных секций. Сколько учеников в классе, если гимнастикой занимается 20 человек, лыжами — 15, тем и другим видом спорта — 4 человека?

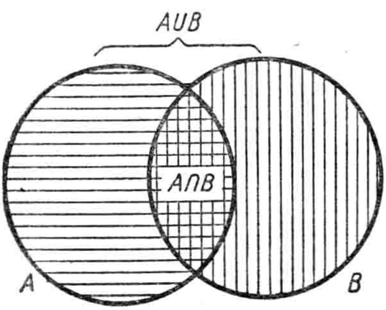


Рис. 1