КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТОМ ВТОРОЙ

ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22. 21
Л 72
УДК 531

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. **Курс теоретической механики:** В 2-х томах. **Т. II. Динамика.**— 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 640 с.

Второй том курса теоретической механики посвящен динамике в объеме программ высших учебных заведений, а также ряду дополнительных вопросов.

Во втором томе, наряду с изложением уравнений динамики материальной точки, общих теорем динамики, динамики несвободной системы и специальных задач динамики (колебания, динамика твердого тела), несколько расширяется предмет курса в сторону сплошных деформируемых сред и, кроме того, приводится изложение элементов релятивистской механики.

Курс предназначен для студентов университетов и втузов, а также аспирантов и преподавателей.

Табл. 12, илл. 258.

Лев Герасимович Лойцянский,
Анатолий Исакович Лурье

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Том второй

ДИНАМИКА

Редактор *Г. М. Ильичева*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12146

Сдано в набор 22.07.82. Подписано к печати 08.07.83. **Формат** $60\times90^{1}/_{16}$. **Бумага** тип. №2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 40. Уч.-изд. л. 39.47. Тираж 34 000 экз. Заказ № 299. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Л $\dfrac{1703020000-118}{053\,(02)-83}$ КБ 21-57-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Отдел третий

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава XIX. **Основные уравнения динамики материальной точки** . . 9

§ 79. Предмет и основные задачи динамики. Пространство и время в классической механике Ньютона 9
§ 80. Первый закон Ньютона 12
§ 81. Второй закон Ньютона 13
§ 82. Независимость действия сил. Третий закон Ньютона 16
§ 83. Различные формы основного уравнения динамики точки 18
§ 84. Две задачи динамики. Простейшие примеры первой задачи . . . 20
§ 85. Специальная постановка первой задачи динамики. Определение закона действия силы по заданному классу движений. Задача Бертрана 24
§ 86. Законы сил 27
§ 87. Вторая задача динамики материальной точки 31
§ 88. Связь между первой и второй задачами динамики материальной точки 38

Глава XX. **Некоторые задачи динамики точки** 39

§ 89. Вертикальное движение тяжелой точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости 39
§ 90. Движение снаряда в сопротивляющейся среде 47
§ 91. Движение снаряда по настильной траектории при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости 50
§ 92. Движение точки под действием центральной силы 52
§ 93. Определение времени в эллиптическом движении 56
§ 94. Эллиптическое движение тела, брошенного с Земли с большой начальной скоростью 58

Глава XXI. **Прямолинейные колебания малой амплитуды** 63

§ 95. Свободные незатухающие колебания точки под действием линейной восстанавливающей силы 63
§ 96. Колебания точки под действием гармонической возмущающей силы 68
§ 97. Колебания точки под действием периодической возмущающей силы 76
§ 98. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на свободные колебания точки 81
§ 99. Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на вынужденные колебания точки 88
§ 100. Свободные колебания точки при наличии кулонова трения . . . 98

Отдел четвертый

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Глава XXII. **Теорема об изменении количества движения системы материальных точек** 104
§ 101. Предварительные замечания об общих теоремах динамики . . . 104
§ 102. Теорема об изменении количества движения системы материальных точек 106
§ 103. Динамика точки переменной массы 110
§ 104. Теорема о движении центра масс системы материальных точек . . 115
§ 105. Уравнения движения центра масс одноступенчатой ракеты . . . 123
§ 106. Теорема импульсов и ее применение в теории удара 131
§ 107. Удар точки о преграду. Коэффициент восстановления 135
§ 108. Прямой удар двух тел 138
§ 109. Косой удар двух тел 141
§ 110. Применение теоремы количества движения к сплошной среде. Теорема Эйлера. Дифференциальные уравнения динамики сплошной среды. Распространение малых возмущений 143

Глава XXIII. **Теорема об изменении момента количеств движения системы материальных точек** 154
§ 111. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки 154
§ 112. Малые колебания математического маятника 157
§ 113. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек. Теорема Резаля 159
§ 114. Главный момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 162
§ 115. Вычисление моментов инерции; моменты инерции относительно параллельных осей 163
§ 116. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси . . 172
§ 117. Малые колебания физического маятника 179
§ 118. Влияние внешних ударов на главный момент количеств движения системы 181
§ 119. Главный момент количеств движения в неподвижной и в движущейся системах отсчета 182
§ 120. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы относительно центра масс 187
§ 121. Теорема о сохранении главного момента количеств движения . . 188
§ 122. Применение теоремы моментов к сплошной среде. Уравнение Эйлера теории турбомашин 191

Глава XXIV. **Теорема об изменении кинетической энергии** 196
§ 123. Работа силы. Мощность 196
§ 124. Вычисление работы в некоторых частных случаях 200
§ 125. Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига 206
§ 126. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела 209
§ 127. Теорема об изменении кинетической энергии 212
§ 128. Потенциальная энергия силового поля 218
§ 129. Потенциалы силовых полей 224
§ 130. Закон сохранения механической энергии 232
§ 131. Механическая энергия при вынужденных колебаниях 234
§ 132. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе. Теорема Карно 237
§ 133. Теорема об изменении кинетической энергии сплошной среды. Теоремы Бернулли и Борда — Карно. Общее дифференциальное уравнение кинетической энергии. Диссипация механической энергии . . 245

Глава XXV. **Динамика плоского движения твердого тела** 257
§ 134. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела 257
§ 135. Качение тяжелого цилиндра по наклонной плоскости и криволинейной поверхности 262
§ 136. Движение самолета в вертикальной плоскости 268
§ 137. Критическая угловая скорость гибкого вала 272
§ 138. Удар в плоском движении твердого тела 276

Глава XXVI. **Тензор инерции твердого тела** 281
§ 139. Тензор инерции и его компоненты. Формула для момента инерции тела относительно произвольной оси 281
§ 140. Главные оси инерции 285
§ 141. Кинетическая энергия и главный момент количеств движения . . . 296

Отдел пятый

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Глава XXVII. **Связи. Статика несвободной системы** 301
§ 142. Классификация связей 301
§ 143. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы . . . 306
§ 144. Принцип освобождаемости. Идеальные связи 314
§ 145. Принцип возможных перемещений 319
§ 146. Применения принципа возможных перемещений 324
§ 147. Устойчивость равновесия системы. Теорема Лагранжа — Дирихле. Понятие о теоремах Ляпунова 336

Глава XXVIII. **Кинетостатика и общее уравнение динамики** 345
§ 148. Принцип Даламбера 345
§ 149. Метод кинетостатики 347
§ 150. Кинетостатика плоского движения твердого тела 347
§ 151. Реакции оси вращающегося тела 354
§ 152. Реакции оси вращающегося тела при ударе. Центр удара . . . 363
§ 153. Метод кинетостатики в приближенной теории гироскопа 367
§ 154. Общее уравнение динамики 376
§ 155. Применение общего уравнения динамики к выводу основных теорем 378
§ 156. Применение общего уравнения динамики в теории удара 380

Глава XXIX. **Уравнения Лагранжа** 385
§ 157. Уравнения Лагранжа первого рода для голономной системы . . 385
§ 158. Движение точки по гладкой поверхности или кривой 387
§ 159. Уравнения Лагранжа второго рода 394
§ 160. Интеграл энергии и циклические интегралы 399
§ 161. Примеры применения уравнений Лагранжа второго рода . . . 403
§ 162. Уравнение движения машины 415
§ 163. Уравнения Лагранжа второго рода с множителями 419

Отдел шестой

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Глава XXX. **Динамика относительного движения** 421
§ 164. Уравнения динамики относительного движения 421
§ 165. Относительное движение системы материальных точек в равномерно вращающейся системе отсчета 428
§ 166. Относительное равновесие точки вблизи поверхности Земли . . 433
§ 167. Влияние вращения Земли на падение тяжелой точки в пустоте . 435
§ 168. Влияние вращения Земли на движение тяжелой точки по горизонтальной плоскости 437
§ 169. Опыты, служащие для доказательства вращения Земли 439

Глава XXXI. **Основы механики специальной теории относительности** . . 443
§ 170. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна 443
§ 171. Преобразование Лоренца. Диаграмма Минковского 448
§ 172. Четырехмерные векторы в пространстве Минковского 459
§ 173. Релятивистское обобщение второго закона Ньютона 462
§ 174. Движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях 469
§ 175. О силовых взаимодействиях в теории относительности. Проблема инерции и переход к общей теории относительности 472

Глава XXXII. **Свободные колебания системы с одной степенью свободы** 479
§ 176. Свободные незатухающие колебания системы с одной степенью свободы 479
§ 177. Движение математического маятника 493
§ 178. Колебания при нелинейной восстанавливающей силе 504
§ 179. Свободные затухающие колебания системы при силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Диссипативная функция Релея 509
§ 180. Колебания системы с одной степенью свободы при наличии кулонова трения 518
§ 181. Колебания системы с одной степенью свободы при наличии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости 520

Глава XXXIII. **Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы** 527
§ 182. Общее решение уравнения вынужденных колебаний 527
§ 183. Верхняя граница отклонения при ограниченной силе 536
§ 184. Периодическое решение уравнения вынужденных колебаний . . . 538

Глава XXXIV. **Колебания системы с двумя степенями свободы** 547
§ 185. Дифференциальные уравнения свободных колебаний 547
§ 186. Интегрирование уравнений свободных колебаний 550
§ 187. Главные координаты 560
§ 188. Применение коэффициентов влияния к составлению дифференциальных уравнений свободных колебаний 571
§ 189. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы . . 584
§ 190. Свободные колебания системы с произвольным конечным числом степеней свободы 591

Глава XXXV. **Некоторые задачи динамики твердого тела** 596
§ 191. Уравнения Эйлера динамики твердого тела 596
§ 192. Вращение симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки 598
§ 193. Регулярная прецессия симметричного тела 600
§ 194. Уравнения движения гироскопа на подвижном основании . . . 605
§ 195. Гироскопы Фуко 617
§ 196. Задача о «спящем волчке» 622
§ 197. Устойчивость вращающегося снаряда 627
§ 198 Гироскопический маятник. Применение уравнений Лагранжа второго рода в динамике твердого тела 630

Предметный указатель 638

ПРЕДИСЛОВИЕ

При работе над новым изданием второго тома, посвященного динамике, особенно остро ощущалась тяжелая утрата безвременно скончавшегося Анатолия Исааковича Лурье, роль которого как автора в создании настоящего тома курса была особенно велика. Положение несколько облегчилось тем, что еще в 1956 г. им был составлен список замечаний по переработке текста второго тома и указаны некоторые сокращения, а незадолго до кончины Анатолия Исааковича представилась возможность совместного обсуждения перечня и характера предполагаемых дополнений и изменений в содержании курса.

В связи с появлением новых задачников по теоретической механике было решено не только не увеличивать число примеров, а даже сократить те из них, сложность которых не оправдывалась их значением для иллюстрации теоретического материала. Было также полностью опущено учение о неголономных связях, представляющее специальный раздел аналитической механики.

Вместе с тем появились и существенные дополнения, среди которых следует отметить написанную К. А. Лурье новую (тридцать первую) главу, содержащую изложение основ специальной теории относительности. В заново написанных параграфах получили освещение вопросы полета ракеты простейшей схемы, теории колебаний систем с произвольным конечным числом степеней свободы, применения общих теорем динамики систем материальных точек к сплошным средам (теоремы Эйлера, Бернулли, Борда), а также к выводу общих дифференциальных уравнений динамики сплошных сред и выражения мощности внутренних сил в сплошной среде. Последнее в случае сред с внутренним трением позволяет глубже судить о важном для механики понятии *потерь* (диссипации) механической энергии при движении среды.

Осуществленное в новом издании расширение предмета механики в сторону модели сплошной среды не может, конечно, заменить изложение тех же вопросов в специальных курсах теории упругости и гидрогазодинамики. Здесь преследуются совершенно другие цели. Главная из них — показать учащемуся широту и мощь охвата теоретической механикой самых различных движений материальных тел, включая сюда и сплошные среды (упругие, жидкие и газообразные). С другой стороны, это дополнение органически связывает курс теоретической механики с непосредственно следующими за ним в учебных планах втузов курсами сопротивления материалов и гидравлики (технической гидродинамики), в которых обычно изложению общих основ механики сплошных сред не уделяется должного внимания.

Чтобы не требовать от читателя обязательно изучать эти дополнительные вопросы, в первом томе они помещены в конце отделов статики и кинематики, а во втором томе в конце глав, содержащих изложение общих теорем динамики. Такая структура курса сохраняет его традиционное построение, приноровленное к действующим программам втузов. То же относится и к разделу «Специальные задачи динамики», начиная с гл. XXXI и до конца курса.

Указанные выше дополнения позволяют рекомендовать настоящее издание курса широкому кругу студентов, аспирантов и инженеров, а также тем читателям, которые будут изучать теоретическую механику в порядке самообразования.

С глубокой благодарностью обращаюсь я к проф. Г. Ю. Степанову, не только взявшему на себя труд рецензирования рукописи настоящего тома, но и сделавшему по ней много существенных критических замечаний, которые мной с признательностью приняты во внимание. Многим я обязан доценту кафедры теоретической механики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина И. Л. Лойцянской, принявшей большое участие в нашей совместной работе над рукописью, а в дальнейшем и в чтении корректур. Я особенно благодарен Г. М. Ильичевой за ее большую высококвалифицированную работу по редактированию рукописи настоящего тома.

Л. Г. Лойцянский

Отдел третий

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава XIX

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 79. Предмет и основные задачи динамики. Пространство и время в классической механике Ньютона

Предметом динамики являются те же модели материальных тел: материальная точка, система дискретных материальных точек, сплошная материальная среда (в том числе и абсолютно твердое тело), что и в предыдущих отделах — статике и кинематике. Однако задачи у них разные.

В статике рассматривались механические силовые взаимодействия материальных тел в равновесных их состояниях. В кинематике были установлены методы изучения происходящих в пространстве и во времени механических движений материальных тел и их систем, но вне связи с механическими взаимодействиями, обусловливающими эти движения. Динамика ставит целью изучение движения материальных тел в связи с механическими взаимодействиями между ними. При этом динамика заимствует у статики законы сложения сил и приведения сложных их совокупностей к простейшему виду и пользуется принятыми в кинематике приемами описания движений. Задачей динамики является установление законов связи действующих сил с кинематическими характеристиками движений и применение этих законов к изучению частных видов движений. Лучше всего это сформулировано самим Ньютоном (1642—1726), создателем классической системы механики. Динамика должна, говорит он, «по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления» *). Эта формулировка точно передает сущность динамики и будет подробно разъяснена в дальнейшем.

Основную роль в динамике играет отсутствовавшая в статике и кинематике количественная материальная характеристика

---

*) Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. — London: 1686. Имеется перевод акад. А. Н. Крылова: Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — Изд. Морской академии. — Петроград, 1916; см. также Собрание трудов акад. А. Н. Крылова. Т. VII. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

тел — их масса, а в случае сплошной среды — плотность распределения массы в теле, короче именуемая просто плотностью.

Основные законы классической механики были сформулированы Ньютоном как законы движения по отношению к некоторой абсолютно неподвижной системе — «абсолютному пространству» — или любой другой «инерциальной» или «галилеевой» системе, движущейся по отношению к «абсолютному пространству» поступательно, прямолинейно и равномерно; за время, в течение которого движение протекает, Ньютон принимал «абсолютное время», не зависящее от движения тел и систем отсчета.

Понятия абсолютных пространства и времени относительны. Лишь в некотором (достаточном для земных применений) приближении можно вводить *статистический*, имеющий смысл лишь «в среднем» образ «универсальной абсолютной системы» *), относительно которой предполагаются покоящимися так называемые неподвижные звезды. При этом следует оговориться, что представление о такого рода «абсолютной» системе зависит от числа принятых во внимание «неподвижных» звезд и что, собственно говоря, нет никаких оснований считать эту систему строго неподвижной в масштабе Вселенной.

«Абсолютное» время рассматривается как *одинаковое* во всех взаимно движущихся системах отсчета, что находится в противоречии с *конечностью* скорости света, а также скорости распространения электромагнитных возмущений и радиосигналов. Вопрос о связи между отсчетами времени в двух взаимно движущихся инерциальных системах отсчета в настоящее время решается просто и наглядно благодаря использованию «радиолокационного» метода **). Об этом будет частично идти речь в гл. XXXI, посвященной основным понятиям специальной теории относительности. Сейчас, подчеркнем это еще раз, в классической механике Ньютона используется «абсолютное время», единое во всех движущихся друг по отношению к другу системах отсчета.

В основу своей системы механики Ньютон положил следующие, приведенные в его «Началах» определения времени и пространства:

«1. Абсолютное, истинное математическое время — само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

---

*) Неванлинна Р. Пространство, время, относительность. — М.: Мир, 1966, с. 136.

**) См., например, Бонди Г., Гипотезы и мифы физической теории. — М.: Мир, 1972, с. 36—51.

2. Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным».

Внешняя форма этих определений, несмотря на наличие в них явных противоречий, вполне соответствует критическому отношению к этим определениям самого Ньютона. «Возможно», говорит Ньютон в своих «Началах», что «не существует такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью», точно так же, как «может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих».

А. Эйнштейн (1879—1955) подверг глубокой критике представления Ньютона о пространстве и времени, но вместе с тем указал на их громадное мировоззренческое значение для того этапа научного прогресса, активным участником которого был Ньютон.

В настоящее время ясно понимается, что «...воистину трудный шаг был в свое время сделан Ньютоном и Галилеем и что трудности, которые пришлось преодолеть Эйнштейну, были значительно меньше... Эйнштейн просто вернул нас к Ньютону», и далее «...в относительности нет ничего более трудного для понимания, чем осознание *ньютоновской* относительности: существует *множество* инерциальных наблюдателей, каждый из которых ничем не лучше и не хуже остальных...» (Г. Бонди, цитированная выше брошюра).

С этой точки зрения стоит привести высказывание самого Эйнштейна: «Ясные и широкие идеи Ньютона сохраняют свое значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления».

Как будет выяснено в гл. XXXI, система механики Ньютона является *частным случаем* релятивистской механики Эйнштейна, примененной к движениям в областях, малых по масштабу по сравнению с масштабами Вселенной, и со скоростями, малыми по сравнению со скоростью распространения света в пустоте. Такое приближение совершенно достаточно для земной практики, включая и современные космические полеты ракетных аппаратов с их пока еще сравнительно малым удалением от Земли и малыми по сравнению со скоростью света скоростями.

Это позволяет нам посвятить весь настоящий курс, за исключением гл. XXXI, в которой излагаются основы специального принципа относительности, изложению классической динамики Ньютона и ее применениям к разнообразным механическим движениям.

§ 80. Первый закон Ньютона

В основе классической механики Ньютона лежат три установленные им и сформулированные в «Началах» закона движения. Подчеркнем, что законы эти предполагают существование «абсолютного времени» и установлены для движений материальной точки по отношению к «абсолютно неподвижной» системе координат, а согласно принципу Галилея (см. начало гл. XXXI) — и по отношению к произвольной инерциальной (галилеевой) системе отсчета.

Первый закон Ньютона — закон инерции — описывает простейшее из возможных механических движений — движение материальной точки в отвлеченных условиях полной ее изолированности от действия других материальных тел. Закон инерции в формулировке Ньютона (перевод А. Н. Крылова) гласит: «*Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку приложенные силы не заставят его изменить это состояние*».

Термин «тело» здесь означает «материальную точку», не имеющую размера, но обладающую массой, которая и обусловливает указанное в формулировке движение материальной точки «по инерции». Как будет показано в следующем параграфе, масса может быть принята за *меру инертности* тела.

Заметим (и в дальнейшем это будет оправдано), что движение изолированного от внешних воздействий тела конечного размера также может быть названо «движением по инерции», но уже не будет столь простым, как движение по инерции материальной точки.

Закон инерции не в столь широкой обобщенной форме, как это сделал Ньютон, был установлен ранее Галилеем (1564—1642)*) для частного случая движения тела по гладкой горизонтальной плоскости. Приведем эту формулировку: «Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления, то движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца».

Чтобы достойным образом оценить заслугу Галилея в открытии закона инерции, стоит вспомнить о борьбе против схоластической науки средневековья, которая выпала на его долю. Следуя Аристотелю, средневековые ученые утверждали, что материя *косна*, естественным ее состоянием является абсолютный покой,

---

*) Galileo Galilei. Discorsi e demonstrazioni mathematiche, intorno à due nuoue scienze attenenti alla meccanica ed i movimenti locali. — Leida: 1638. Имеется перевод: Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки и относящиеся к механике и местному движению. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.

а для поддержания движения тела необходимо постоянное внешнее воздействие. Велика заслуга Галилея, который ввел в механику понятие об ускорении и противопоставил прямолинейному равномерному движению по инерции неравномерное равноускоренное движение точки, свободно падающей в пустоте вблизи поверхности Земли.

Прав был Лагранж (1736—1813), когда, сравнивая достижения Галилея в области астрономии с созданием основ динамики, писал *):

«Открытие спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и др. потребовало лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от изыскания философов».

Открытие Галилеем законов свободного падения тел сыграло основополагающую роль в деле создания ньютоновской динамики и, в частности, второго закона Ньютона.

Заслуга Галилея была высоко оценена Ньютоном, который говорил, что он «далеко видел вперед, так как стоял на плечах у гигантов».

§ 81. Второй закон Ньютона

Основой ньютоновской механики является «второй закон» — фундаментальный закон естествознания.

Второй закон Ньютона устанавливает количественную связь между изменением движения, совершаемого материальной точкой и приложенной к ней силой. Формулировка второго закона (в переводе А. Н. Крылова) гласит:

«*Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит в направлении линии действия этой силы*».

Под «изменением движения» подразумевается отнесенное к единице времени изменение вектора скорости точки, т. е. ее ускорение. Такое понимание термина «изменения движения» можно найти, например, в классическом, относящемся к 1743 г. «Трактате по динамике» Даламбера, который называет «движением» «скорость тела с учетом ее направления», (см. русский перевод этого трактата в серии «Классики естествознания». М.—Л.: Гостехиздат, 1950, с. 108, определение). Ньютон под

---

*) Lagrange J. L. Mécanique analitique. — Paris: 1788. Имеется перевод: Лагранж Ж. Аналитическая механика: В 2-х томах. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950. Приведенная цитата помещена в начале первого отдела раздела «Динамика» т. I.

«движением» понимал то, что мы сейчас называем «количеством движения», т. е. произведение массы на вектор скорости. При ньютоновском представлении о постоянстве массы во все время движения обе трактовки совпадают. Возникающее различие разъясняется в специальном разделе курса «Динамика точки переменной массы» (см. § 103).

Таким образом второй закон утверждает пропорциональность вектора ускорения точки вектору приложенной к ней силы, что можно записать в виде

$$C\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

Коэффициент пропорциональности C представляет собой величину, зависящую не от внешних характеристик движения (приложенной силы и наблюдаемого ускорения), а лишь от собственного материального свойства точки — ее вещественности. Это свойство Ньютон связывает с *количеством вещества* в точке — характеристикой точки, не поддающейся ни строгому определению, ни непосредственному измерению.

Чтобы избежать эту трудность, вводят представление об *инертности*, понимая под ней свойство материальной точки приобретать под действием заданной по величине силы тем большее ускорение, чем меньше характеристика C ее вещественности, и, наоборот, тем меньшее ускорение, чем больше эта характеристика.

Сохраняя за константой C приписываемое ей Ньютоном *качественное* понятие меры «количества вещества» в теле (материальной точке), примем за количественную характеристику вещественности материальной точки ее меру инертности, назовем эту меру *массой* и обозначим ее m. За единицу массы в системе СИ принимают *килограмм* (кг) как такую массу, которая под действием силы в 1 Н приобретает ускорение, равное 1 м/с^2. В качестве более крупной единицы массы принимают *тонну* (т), равную 10^3 кг.

Окончательной формой уравнения (1), в котором можно положить $C=m$, будет основное уравнение динамики материальной точки

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}. \tag{2}$$

Рассмотрим две материальные точки с разными массами m_1 и m_2, движущиеся под действием двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ с одним и тем же ускорением $\boldsymbol{w}$ согласно уравнениям

$$m_1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1, \quad m_2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_2.$$

Не нарушая движения, можем мысленно объединить эти две материальные точки в одну точку массы m. Почленно складывая два предыдущих равенства, получаем

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

откуда следует закон аддитивности масс

$$m = m_1 + m_2.$$

Понятие массы как меры инертности, введенное для материальной точки, применимо и к поступательно движущемуся твердому телу: все частицы такого тела (в общем случае обладающие разными массами) имеют одинаковые ускорения, и поэтому масса тела в силу закона аддитивности масс равна сумме масс его отдельных частиц.

В некоторых руководствах по механике еще можно иногда встретиться с двумя отличными от СИ системами единиц: *физической* и *технической*. Первая из них система CGS (сантиметр — грамм — секунда) отличается от СИ только количественно.

В системе CGS за единицу длины принят *сантиметр*, равный 10^{-2} м, за единицу массы — *грамм*, равный 10^{-3} кг, а единицей силы служит *дина*, определяемая как сила, вызывающая у массы в 1 г ускорение 1 см/с^2. Единица силы в системе СИ *Ньютон* равна

$$1\text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2 = 10^5\ \text{г}\cdot\text{см/с}^2 = 10^5\ \text{дин}.$$

Техническая система единиц отличается от СИ выбором основных единиц. В технической системе основными единицами являются сила, длина и время, причем за единицу силы принят килограмм (силы), за единицу длины — метр, за единицу времени — секунда. Единица массы в технической системе является производной и определяется как *масса* тела, приобретающего под действием силы в один килограмм ускорение 1 м/с^2.

Чтобы установить связь между единицами силы и массы в различных системах единиц, применим формулу (2) к падению точки в пустоте вблизи земной поверхности. Обозначая силу тяжести через G, ускорение свободного падения через g, а массу через m, будем иметь

$$G = mg. \tag{3}$$

Численная величина ускорения g изменяется в зависимости от широты пункта земного шара и его высоты над уровнем моря. Крайние значения g на полюсе и экваторе (на уровне моря) соответственно равны 9,8311 м/с^2 и 9,7810 м/с^2. Значения g для некоторых пунктов Советского Союза даны в табл. 1.

При дальнейшем изложении будем пользоваться общепринятым средним значением

$$g = 9{,}81\ \text{м/с}^2,$$

иногда заменяя его менее точным $g = 9{,}8$ м/с^2.

Таблица 1

Значения ускорения g свободного падения для некоторых пунктов Советского Союза

Название города	g, м/с^2	Название города	g, м/с^2
Тбилиси	9,8032	Москва	9,8152
Одесса	9,8074	Ленинград	9,8193
Киев	9,8108	Архангельск	9,8218

Из формулы (3) следует, что в физической системе единиц массе в 1 г соответствует сила тяжести

$$981\ \text{г} \cdot \text{см/с}^2 = 981\ \text{дин}.$$

Выражая массу в кг, длину в м, время в с, получаем, что вес тела массой в 1 кг составляет 9,81 Н или $9{,}81 \cdot 10^5$ дин.

В дальнейшем используется общепринятая система СИ.

Наряду с понятием о массе как мере инертности — «инертной массе» — в механике приходится иметь дело также с «тяготеющей массой», входящей в формулировку закона всемирного тяготения. Как показали многочисленные опыты и в первую очередь опыты самого Ньютона, численные величины инертной и тяготеющей массы для одного и того же тела равны между собой. Этот *принцип эквивалентности инертной* и *тяготеющей масс* был в дальнейшем обобщен и на область движений, требующих для своего рассмотрения применения специальной теории относительности (см. гл. XXXI).

§ 82. Независимость действия сил. Третий закон Ньютона

Если к материальной точке приложены две или несколько сил, то ускорение, приобретаемое ею под действием равнодействующей этих сил, построенной по правилу параллелограмма, определится как векторная сумма ускорений точки под действием каждой слагаемой силы по отдельности. Это заключение является простым следствием второго закона Ньютона в принятой векторной формулировке (2). При этом используется допущение, что в динамических условиях, так же как и в статических, приложенные к материальной точке силы действуют на нее независимо друг от друга, т. е. наличие одних сил не вызывает изменений в действии других. Это положение составляет содержание *принципа независимости действия сил*, позволяющего применять в динамике правило параллелограмма сил и все те операции над системами сил, которые были установлены в статике.

Ньютон излагает принцип независимости действия сил совместно с правилом параллелограмма, тем самым утверждая векторный характер силы, в первом следствии законов движения; формулировка Ньютона гласит: «*При совместном действии двух сил тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как стороны параллелограмма при отдельном действии сил*».

В разделе статики было установлено, что действие и противодействие (сила и реакция) представляют собой две равные по величине, противоположные по направлению и имеющие общую линию действия силы. Так же как и в статике, из равенства взаимодействий по величине и противоположности их по направлению отнюдь не следует их взаимное уравновешивание, так как действие и противодействие приложены к различным телам. Этот общий механический закон имеет место как в статических, так и в динамических условиях.

Приводим формулировку третьего закона Ньютона: *Действию всегда соответствует равное ему и противоположно направленное противодействие, т. е. действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны.*

В то время как первые два закона Ньютона относятся к одной материальной точке, третий закон рассматривает взаимодействие двух материальных точек и является основой динамики системы материальных точек.

Обозначим массы двух взаимодействующих в случае мгновенного дальнодействия материальных точек через m_1 и m_2, векторы их скорости через $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, а векторы их ускорения через $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$. Тогда, согласно первому и третьему законам, предполагая, что никаких других сил, кроме взаимодействия точек, нет, получим

$$m_1\boldsymbol{w}_1 = -m_2\boldsymbol{w}_2, \tag{4}$$

или, интегрируя,

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{const}. \tag{5}$$

Ньютон определил количество движения материальной точки как произведение ее массы на скорость. Количество движения системы точек равно геометрической сумме количеств движения отдельных точек системы. Согласно (5) количество движения системы двух взаимодействующих материальных точек во время движения сохраняется. Этот закон сохранения количества движения в своем простейшем виде был известен еще до Ньютона и применялся для изучения явления удара шаров.

Дифференцирование равенства (5) по времени приводит к равенству (4), а из последнего, согласно второму закону, вытекает третий закон. Ньютон при установлении третьего закона использовал накопленный к его времени опыт применения