

材料力学教程

题 解

韩耀新 等 编

中央广播电视大学

材料力学教程题解

韩耀新 等编

中央广播电视大学

说 明

本材料的习题，取自北京航空学院材料力学教研室编，单辉祖主编《材料力学教程》一书（国防工业出版社 1981 年出版）。习题系由北京航空学院韩耀新，崔德渝、顾志芬、罗又华等作答。并经潘孝禄、李维伯审校。题解方法不是唯一的，仅供参考。

编者

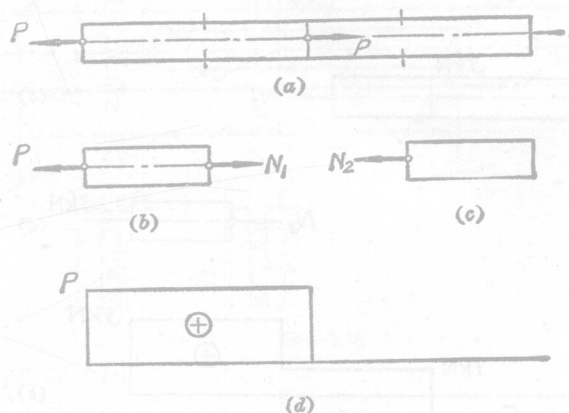
1981 年 10 月

目 录

第二章 转向拉伸与压缩.....	1
题 2-1——题 2-3	
第三章 扭转	27
题 3-1——题 3-24	
第四章 梁的内力.....	42
题 4-1——题 4-9	
第五章 梁的应力.....	59
题 5-1——题 5-27	
第六章 弯曲变形.....	80
题 6-1——题 6-18	
第七章 应力状态理论与强度理论	106
题 7-1——题 7-17	
第八章 组合变形时杆件的强度计算	119
题 8-1——题 8-17	
第九章 压杆稳定问题	136
题 9-1——题 9-16	
第十章 疲劳强度问题	149
题 10-1——题 10-8	
第十二章 能量法	156
题 12-1——题 12-16	

第二章 轴向拉伸与压缩

题 2-1 试计算图示各杆的轴力, 并画轴力图。

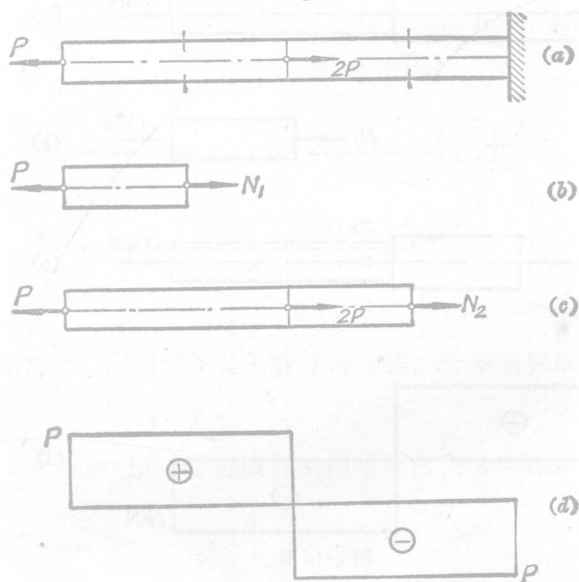


题 2-1a 图

a 解: 分两段计算轴力, 分别如图(b)、(c)所示。得

$$N_1 = P$$

$$N_2 = 0$$



题 2-1b 图

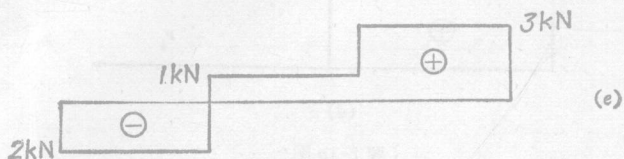
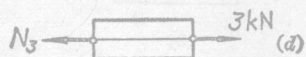
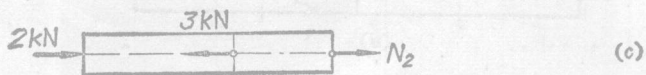
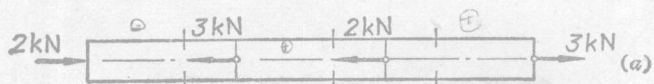
轴力图如图(d)所示。

b 解: 分两段计算轴力, 分别如图(b)、(c)所示。得

$$N_1 = P$$

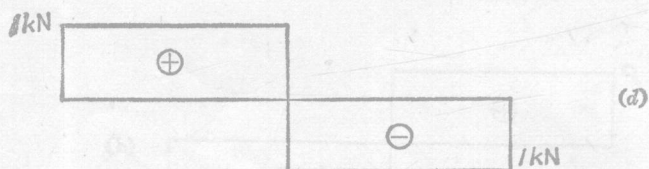
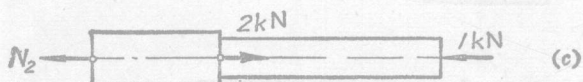
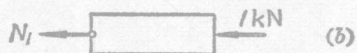
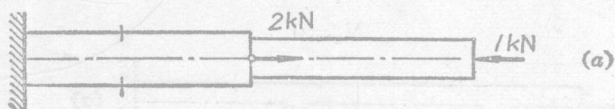
$$N_2 = P - 2P = -P$$

轴力图如图(d)所示。



题 2-1c 图

c 解: 分三段计算轴力, 分别如图(b)、(c)、(d)所示。得



题 2-1d 图

$$N_1 = -2 \text{ kN}$$

$$N_2 = 3 \text{ kN} - 2 \text{ kN} = 1 \text{ kN}$$

$$N_3 = 3 \text{ kN}$$

轴力图如图(e)所示。

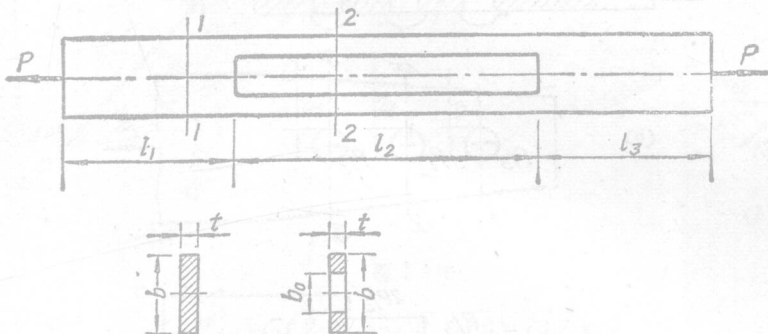
d 解: 分两段计算轴力, 分别如图(b)、(c)所示。得

$$N_1 = -1 \text{ kN}$$

$$N_2 = 2 \text{ kN} - 1 \text{ kN} = 1 \text{ kN}$$

轴力图如图(d)所示。

题 2-2 图示为中段开槽的杆件, 两端受轴向载荷 P 作用, 试计算截面 1-1 和 2-2 上的正应力。已知: $P = 14 \text{ kN}$, $b = 20 \text{ mm}$, $b_0 = 10 \text{ mm}$, $t = 4 \text{ mm}$ 。



题 2-2 图

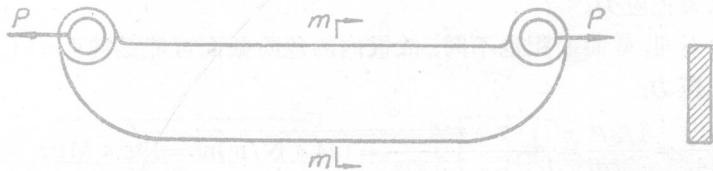
解: 杆件的轴力为 $N = P$

截面 1-1 和 2-2 上的正应力分别为

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{N}{bt} = \frac{14 \times 10^3}{20 \times 4} = 175 \text{ N/mm}^2 = 175 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{N}{(b-b_0)t} = \frac{14 \times 10^3}{(20-10) \times 4} = 350 \text{ N/mm}^2 = 350 \text{ MPa}$$

题 2-3 图示连杆受载荷 $P = 20 \text{ kN}$ 作用, 已知横截面 m-m 的面积 $A = 500 \text{ mm}^2$, 那么截面 m-m 上的正应力为 $\sigma = 20 \times 10^3 / 500 = 40 \text{ MPa}$, 对吗?



题 2-3 图

解: 不对。因外力 P 的作用线不是沿杆件的轴线, 故不是轴向拉伸, 不能用公式 $\sigma = \frac{P}{A}$ 计算。

题 2-4 题 2-1 c 所示拉(压)杆, 若该杆的横截面面积 $A = 50 \text{ mm}^2$, 试计算杆内最大拉压力和最大压应力。

解: (1) 由题 2-1 c 可知

$$N_{\max} = N_3 = 3 \text{ kN}$$

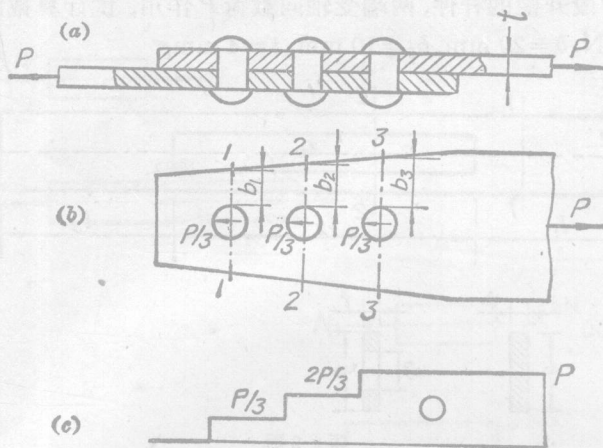
$$N_{\min} = N_1 = -2 \text{ kN}$$

(2) 计算最大拉压力与最大压应力。

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{N_3}{A} = \frac{3 \times 10^3}{50} = 60 \text{ N/mm}^2 = 60 \text{ MPa (拉)}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{N_{\min}}{A} = \frac{N_1}{A} = \frac{-2 \times 10^3}{50} = -40 \text{ N/mm}^2 = -40 \text{ MPa (压)}$$

题 2-5 图(a)所示铆接件,板件的受力情况如图(b)所示。已知: $P=7\text{ kN}$, $t=1.5\text{ mm}$, $b_1=4\text{ mm}$, $b_2=5\text{ mm}$, $b_3=6\text{ mm}$ 。试绘板件的轴力图,并计算板内最大拉应力。



题 2-5 图

解: (1) 计算板内各段轴力。

$$N_1 = P - \frac{P}{3} - \frac{P}{3} = \frac{P}{3}$$

$$N_2 = P - \frac{P}{3} = \frac{2}{3}P$$

$$N_3 = P$$

(2) 画轴力图如图(c)所示。

(3) 计算板内最大正应力。

因板内各段轴力不同,截面面积也不同,故板内的危险截面可能是截面 1-1、2-2 或 3-3。现分别计算它们的正应力:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1/3P}{2tb_1} = \frac{7 \times 10^3}{3 \times 2 \times 1.5 \times 4} = 194.4 \text{ N/mm}^2 = 194.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{2/3P}{2tb_2} = \frac{2 \times 7 \times 10^3}{3 \times 2 \times 1.5 \times 5} = 311 \text{ N/mm}^2 = 311 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{P}{2tb_3} = \frac{7 \times 10^3}{2 \times 1.5 \times 6} = 389 \text{ N/mm}^2 = 389 \text{ MPa}$$

比较而得

$$\sigma_{\max} = \sigma_3 = 389 \text{ MPa}$$

题 2-6 图示桁架中, AB 为圆截面钢杆, AC 为方截面木杆。在节点 A 处受铅垂方向的载荷 P 作用, 试确定钢杆的直径 d 和木杆截面的边宽 b 。已知: $P=50\text{ kN}$, $[\sigma]_{\text{钢}}=160\text{ MPa}$, $[\sigma]_{\text{木}}=10\text{ MPa}$ 。

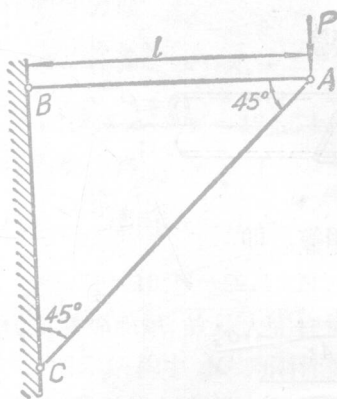
解: (1) 计算各杆轴力。

节点 A 的平衡方程(图 b)为

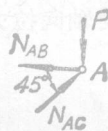
$$\sum X = 0 \quad N_{AB} = N_{AC} \cos 45^\circ \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad N_{AC} \sin 45^\circ = P \quad (2)$$

联解(1)、(2)式得



(a)



(b)

题 2-6 图

$$N_{AC} = \sqrt{2} P = \sqrt{2} \times 50 = 70.7 \text{ kN}$$

$$N_{AB} = P = 50 \text{ kN}$$

(2) 根据强度条件 $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ 确定截面尺寸。

钢杆的直径

$$d = \sqrt{\frac{4N_{AB}}{\pi[\sigma]_{\text{钢}}}} = \sqrt{\frac{4 \times 50 \times 10^3}{\pi \times 160}} = 19.9 \text{ mm}$$

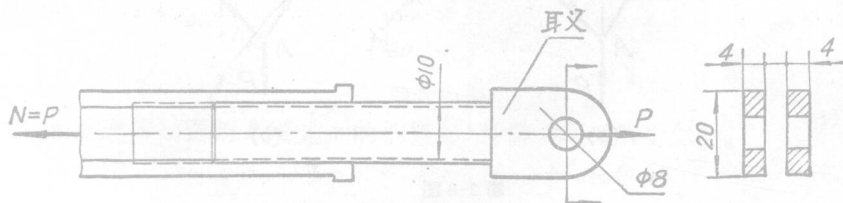
取

$$d = 20 \text{ mm}$$

木杆的边宽

$$b = \sqrt{\frac{N_{AC}}{[\sigma]_{\text{木}}}} = \sqrt{\frac{70.7 \times 10^3}{10}} = 84.1 \text{ mm}$$

题 2-7 图示耳叉受轴向载荷 P 作用, 试校核耳叉的拉伸强度。已知: $P = 14 \text{ kN}$, $[\sigma] = 200 \text{ MPa}$ 。



题 2-7 图

解: 耳叉的轴力为

$$N = P = 14 \text{ kN}$$

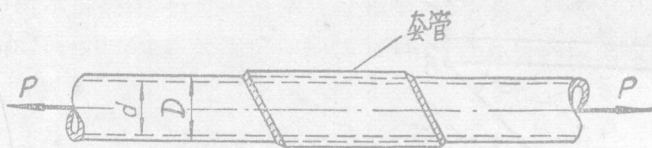
分别校核耳叉上的耳片和螺杆的强度, 即

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{14 \times 10^3}{2 \times 4 \times (20 - 8)} = 145.8 \text{ N/mm}^2 = 145.8 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{4 \times 14 \times 10^3}{\pi \times 10^2} = 178.3 \text{ N/mm}^2 = 178.3 \text{ MPa} < [\sigma]$$

耳叉符合强度要求。

题 2-8 断裂的铬锰硅钢管 $D \times d = 30 \times 27 \text{ mm}$, 需加套管修理。若套管材料为 20 号钢, 求套管的外径 D_0 。已知: 铬锰硅钢的屈服应力 $\sigma_s = 900 \text{ MPa}$, 20 号钢的屈服应力 $\sigma'_s = 250 \text{ MPa}$ 。



题 2-8 图

解: 当受轴向拉力 P 作用时, 钢管与套管的轴力相等。即

$$A_{\text{钢}} \cdot \sigma_s = A_{\text{套}} \cdot \sigma'_s$$

$$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \cdot \sigma_s = \frac{\pi(D_0^2 - D^2)}{4} \cdot \sigma'_s$$

$\therefore$

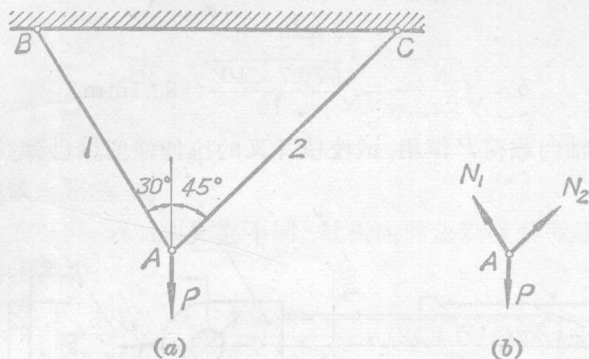
$$D_0 = \sqrt{\frac{\sigma_s}{\sigma'_s}(D^2 - d^2) + D^2}$$

$$= \sqrt{\frac{900}{250} \times (30^2 - 27^2) + 30^2} = \sqrt{1516} = 38.9 \text{ mm}$$

取

$$D_0 = 39 \text{ mm}$$

题 2-9 图示桁架中, 杆 1、2 的横截面均为圆形, 直径分别为 $d_1 = 30 \text{ mm}$ 和 $d_2 = 20 \text{ mm}$, 两杆材料相同, 其许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。该桁架在节点 A 处受铅垂方向的载荷 P 作用, 试确定载荷 P 的最大允许值。



题 2-9 图

解: (1) 求出用 P 所表示的各杆轴力。

由节点 A 的平衡方程(图 b), 得

$$\Sigma X = 0 \quad N_1 \sin 30^\circ = N_2 \sin 45^\circ$$

$$N_1 = \sqrt{2} N_2 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ = P$$

$$\sqrt{3} N_1 + \sqrt{2} N_2 = 2P \quad (2)$$

联解方程式(1)、(2), 得

$$N_1 = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} P$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} P$$

(2) 根据强度条件 $N \leq [\sigma]A$ 确定 P 的最大允许值。

根据 1 杆的受力得

$$P_1 \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} [\sigma] \cdot A_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot [\sigma] \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times 160 \times \pi \times 30^2}{2 \times 4}$$

$$= 1.545 \times 10^5 \text{ N} = 154.5 \text{ kN}$$

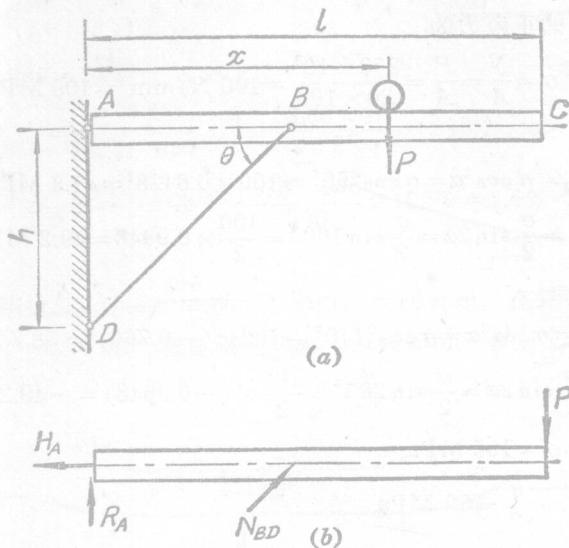
根据 2 杆的受力得

$$P_2 \leq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} [\sigma] \cdot A_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \cdot [\sigma] \cdot \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times 160 \times \pi \times 20^2}{\sqrt{2} \times 4}$$

$$= 9.71 \times 10^4 \text{ N} = 97.1 \text{ kN}$$

为使两杆强度都满足, 故最大允许值 $P = 97.1 \text{ kN}$ 。

题 2-10* 图示结构中 AC 为刚性梁, BD 为斜撑杆, 载荷 P 可沿梁 AC 水平移动。为使斜撑杆重量为最轻, 则斜撑杆与梁之间的夹角 θ 应取何值?



题 2-10 图

解: (1) 载荷 P 移动到距 A 端为 x 的位置时, 计算 BD 杆所受力。

$$\sum M_A(F) = 0 \quad Px - N_{BD} \cdot h \cdot \cos \theta = 0$$

$\therefore$

$$N_{BD} = \frac{x}{h \cos \theta} P$$

显然, 当 $x = l$ 时, N_{BD} 为最大, 其值为

$$N_{BD} = \frac{l}{h \cos \theta} P$$

(2) 确定 θ 角。

欲使 BD 杆重量最轻, 则 BD 杆体积应为最小。设斜撑杆的许用应力为 $[\sigma]$, 则截面面积为

$$A = \frac{N_{BD}}{[\sigma]} = \frac{lP}{[\sigma] h \cos \theta}$$

$$\text{体积 } V = A \cdot l_{BD} = \frac{lP}{[\sigma] h \cos \theta} \cdot \frac{h}{\sin \theta} = \frac{2lP}{[\sigma] \sin 2\theta}$$

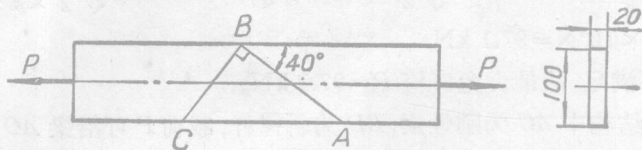
显然, 当 $\sin 2\theta = 1$ 时, V 最小。

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

则

题 2-11 图示板件受轴向载荷 $P=200 \text{ kN}$ 作用, 试计算互垂面 AB 和 BC 上的正应力、剪应力以及板内最大正应力、最大剪应力。



题 2-11 图

解: 板内横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} = \frac{200 \times 10^3}{20 \times 100} = 100 \text{ N/mm}^2 = 100 \text{ MPa}$$

AB 面上的应力为

$$\sigma_{AB} = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 50^\circ = 100 \times 0.6428^2 = 41.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{AB} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 100^\circ = \frac{100}{2} \times 0.9848 = 49.2 \text{ MPa}$$

BC 面上的应力为

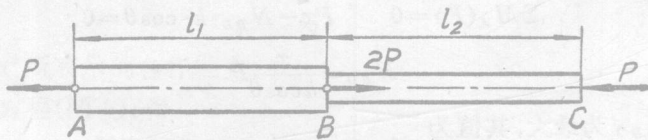
$$\sigma_{BC} = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 140^\circ = 100 \times (-0.766)^2 = 58.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 280^\circ = \frac{100}{2} \times (-0.9848) = -49.2 \text{ MPa}$$

当 $\alpha = 0$ $\sigma_{\max} = \sigma = 100 \text{ MPa}$

当 $\alpha = 45^\circ$ $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = 50 \text{ MPa}$

题 2-12 图示阶梯形杆 AC , $P=10 \text{ kN}$, $l_1=l_2=400 \text{ mm}$, $A_1=2A_2=100 \text{ mm}^2$, $E=200 \text{ GPa}$, 试计算杆 AC 的轴向变形 Δl 。



题 2-12 图

解: 杆中各段轴力为

$$N_{AB} = P \quad N_{BC} = -P$$

杆 AC 的轴向变形为

$$\Delta l_1 = \frac{N_{AB} l_1}{EA_1} = \frac{10 \times 10^3 \times 400}{200 \times 10^3 \times 100} = 0.2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{BC} l_2}{EA_2} = \frac{-10 \times 10^3 \times 400}{200 \times 10^3 \times 50} = -0.4 \text{ mm}$$

总变形 $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.2 - 0.4 = -0.2 \text{ mm}$ (缩短)

题 2-13 图示螺栓在拧紧时产生 $\Delta l = 0.10 \text{ mm}$ 轴向变形, 试求预紧力 P , 并校核螺栓的

强度。已知: $d_1=8\text{ mm}$, $d_2=6.8\text{ mm}$, $d_3=7\text{ mm}$, $l_1=6\text{ mm}$, $l_2=29\text{ mm}$, $l_3=8\text{ mm}$; $E=210\text{ GPa}$, $[\sigma]=500\text{ MPa}$ 。

解: $\because \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$

$$= \frac{Pl_1}{EA_1} + \frac{Pl_2}{EA_2} + \frac{Pl_3}{EA_3}$$

$$= \frac{4P}{\pi E} \left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l_2}{d_2^2} + \frac{l_3}{d_3^2} \right)$$

$$\therefore P = \frac{\Delta l \pi E}{4 \left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l_2}{d_2^2} + \frac{l_3}{d_3^2} \right)}$$

$$= \frac{0.10 \times \pi \times 210 \times 10^3}{4 \left(\frac{6}{8^2} + \frac{29}{6.8^2} + \frac{8}{7^2} \right)}$$

$$= 1.866 \times 10^4 \text{ N} = 18.66 \text{ kN}$$

又

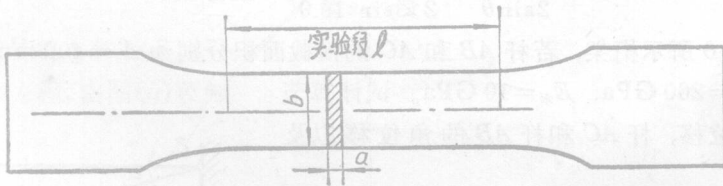
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A_{\min}} = \frac{4P}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 18.66 \times 10^3}{\pi \times 6.8^2} = 513 \text{ N/mm}^2 = 513 \text{ MPa}$$

$\therefore$

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \times 100\% = \frac{513 - 500}{500} \times 100\% = 2.6\% < 5\%$$

$\therefore$ 符合强度要求。

题 2-14 图示硬铝试件, $a=2\text{ mm}$, $b=20\text{ mm}$, $l=70\text{ mm}$, 在轴向拉力 $P=6\text{ kN}$ 的作用下, 测得实验段伸长 $\Delta l=0.15\text{ mm}$, 板宽缩短 $\Delta b=0.014\text{ mm}$, 试计算硬铝的弹性模量 E 和泊松比 μ 。



题 2-14 图

解: $E = \frac{Pl}{\Delta l A} = \frac{Pl}{\Delta l ab} = \frac{6 \times 10^3 \times 70}{0.15 \times 2 \times 20} = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 = 70 \text{ GPa}$

$$\mu = \left| -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| = \frac{\Delta b/b}{\Delta l/l} = \frac{0.014 \times 70}{20 \times 0.15} = 0.327$$

题 2-15 图示桁架中, 杆 1、2 的横截面面积和材料均相同, 在节点 A 处受载荷 P 作用。从试验中测得杆 1、2 的纵向应变分别为 $\epsilon_1=4.0 \times 10^{-4}$, $\epsilon_2=2.0 \times 10^{-4}$, 试确定载荷 P 及其方位角 θ 的大小。已知: $A_1=A_2=200\text{ mm}^2$, $E_1=E_2=200\text{ GPa}$ 。

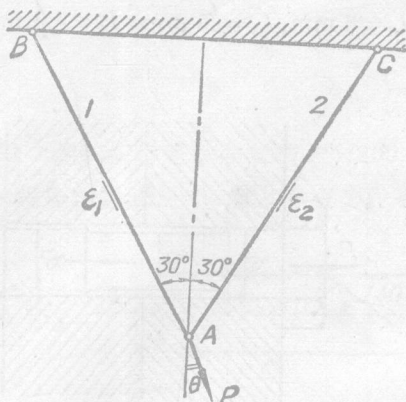
解: (1) 计算各杆轴力。

$$N_1 = E_1 \epsilon_1 A_1 = 200 \times 10^3 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 200 = 16 \times 10^3 \text{ N} = 16 \text{ kN}$$

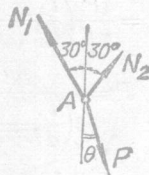
$$N_2 = E_2 \epsilon_2 A_2 = 200 \times 10^3 \times 2.0 \times 10^{-4} \times 200 = 8 \times 10^3 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

(2) 计算载荷 P 及方位角 θ 。

由图(b)可知



(a)



(b)

题 2-15 图

$$\sum X = 0 \quad N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = P \sin \theta$$

$$N_1 - N_2 = 2P \sin \theta$$

(1)

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \sin 60^\circ + N_2 \sin 60^\circ = P \cos \theta$$

$$\sqrt{3} N_1 + \sqrt{3} N_2 = 2P \cos \theta$$

(2)

联解方程式(1)、(2), 得

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{3} N_1 + \sqrt{3} N_2} = \frac{16 - 8}{\sqrt{3} (16 + 8)} = 0.1925$$

$$\theta = 10.9^\circ$$

$$P = \frac{N_1 - N_2}{2 \sin \theta} = \frac{16 - 8}{2 \times \sin 10.9^\circ} = 21.2 \text{ kN}$$

题 2-16 题 2-6 所示桁架, 若杆 AB 和 AC 的横截面积分别为 $A_1 = 400 \text{ mm}^2$, $A_2 = 8000 \text{ mm}^2$, $l = 1.5 \text{ m}$, $E_{\text{钢}} = 200 \text{ GPa}$, $E_{\text{木}} = 10 \text{ GPa}$ 。试计算节点 A 的水平 and 垂直位移, 杆 AC 和杆 AB 的角位移以及 $\angle BAC$ 的改变量。

解: 由题 2-6 可知

$$N_{AB} = 50 \text{ kN} \quad N_{AC} = 70.7 \text{ kN}$$

为计算 A 点的位移, 先算各杆的变形, 即

$$\Delta l_1 = \frac{N_{AB} l_{AB}}{E_{\text{钢}} A_1} = \frac{50 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 400} = 0.938 \text{ mm (伸长)}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{AC} l_{AC}}{E_{\text{木}} A_2} = \frac{70.7 \times 10^3 \times \sqrt{2} \times 1.5 \times 10^3}{10 \times 10^3 \times 8000}$$

$$= 1.87 \text{ mm (缩短)}$$

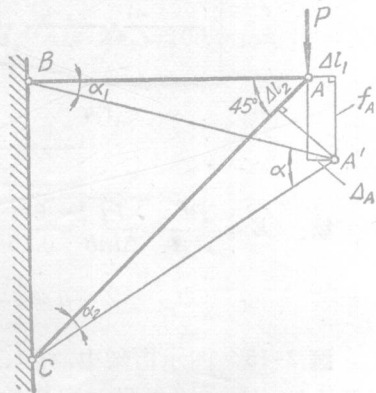
由图可知, A 点的水平位移和垂直位移分别为

$$\Delta_A = \Delta l_1 = 0.938 \text{ mm (} \rightarrow \text{)}$$

$$f_A = \sqrt{2} \Delta l_2 + \Delta l_1 = \sqrt{2} \times 1.87 + 0.938 = 3.58 \text{ mm (} \downarrow \text{)}$$

AB 杆的角位移为

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{f_A}{l} = \frac{3.58}{1.5 \times 10^3} = 2.39 \times 10^{-3}$$



题 2-16 图

$$\therefore \alpha_1 = 0.133^\circ (\text{顺时针})$$

AC 杆的角位移为

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sqrt{2} \Delta l_1 + \Delta l_2}{\sqrt{2} l} = \frac{\sqrt{2} \times 0.938 + 1.87}{\sqrt{2} \times 1.5 \times 10^3} = 1.507 \times 10^{-3}$$

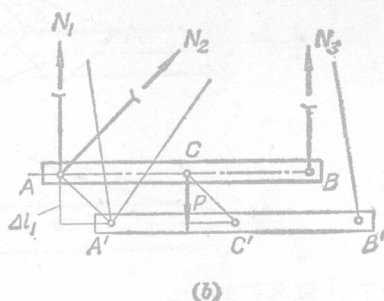
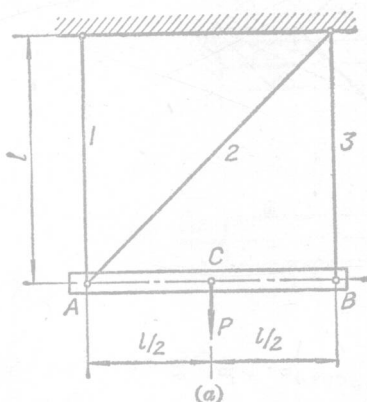
$$\therefore \alpha_2 = 0.0833^\circ (\text{顺时针})$$

$\angle BAC$ 的改变量为

$$\alpha = 45^\circ + \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\therefore \Delta \alpha = \alpha - 45^\circ = \alpha_1 - \alpha_2 = 0.0497^\circ (\text{增大})$$

题 2-17 图示结构中 AB 为刚性梁, 杆 1、2、3 的材料和横截面面积相同, 在梁 AB 的中点 C 承受铅垂方向的载荷 P, 试计算 C 的水平位移和垂直位移。已知: $P=20 \text{ kN}$, 截面积 $A_1=A_2=A_3=100 \text{ mm}^2$, $l=1000 \text{ mm}$, $E=200 \text{ GPa}$ 。



题 2-17 图

解: (1) 计算各杆轴力。

根据平衡方程, 由图(b)可知

$$N_1 = \frac{P}{2} = 10 \text{ kN}$$

$$N_2 = 0$$

$$N_3 = \frac{P}{2} = 10 \text{ kN}$$

(2) 计算各杆伸长。

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{10 \times 10^3 \times 1000}{200 \times 10^9 \times 100} = 0.5 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = 0$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_1 = 0.5 \text{ mm}$$

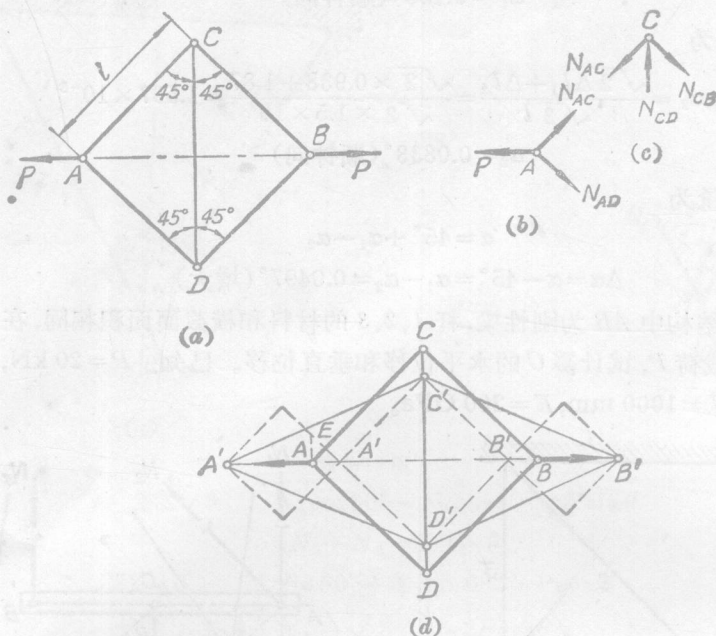
(3) 计算 Δ_c 、 f_c 。

由图(b)可知

$$\Delta_c = \Delta l_1 = 0.5 \text{ mm} (\rightarrow)$$

$$f_c = \Delta l_1 = 0.5 \text{ mm} (\downarrow)$$

题 2-18 图示桁架中各杆的横截面面积均为 A, 材料的弹性模量为 E, 当载荷 P 作用时, 试计算节点 A、B 间的相对位移 Δ_{AB} 。



题 2-18 图

解: (1) 计算各杆轴力。

由图(b)可知

$$\sum X=0 \quad N_{AC} \cos 45^\circ + N_{AD} \cos 45^\circ = P$$

$$N_{AC} + N_{AD} = \sqrt{2} P$$

$$\sum Y=0 \quad N_{AC} \sin 45^\circ = N_{AD} \sin 45^\circ$$

$$N_{AC} = N_{AD}$$

$\therefore$

$$N_{AC} = N_{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

由图(c)可知

$$\sum X=0 \quad N_{AC} \sin 45^\circ = N_{CB} \sin 45^\circ$$

$$N_{AC} = N_{CB}$$

$$\sum Y=0 \quad N_{AC} \cos 45^\circ + N_{CB} \cos 45^\circ = N_{CD}$$

$$N_{AC} + N_{CB} = \sqrt{2} N_{CD}$$

$\therefore$

$$N_{AC} = N_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$N_{CD} = P$$

(2) 计算杆 CD、AC、AD 的变形。

根据虎克定律

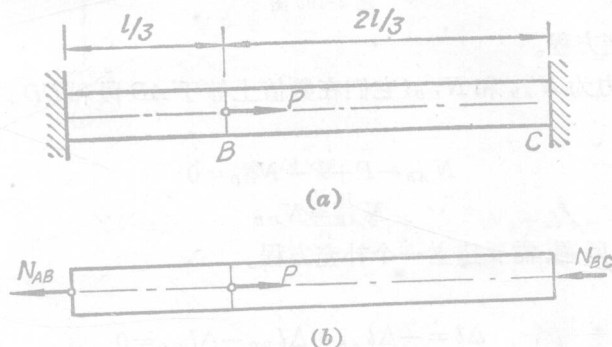
$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA} = \frac{\sqrt{2} Pl}{EA} \quad (\text{缩短})$$

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{\sqrt{2} Pl}{2EA} \quad (\text{伸长})$$

(3) 计算节点 A 、 B 的相对位移 Δ_{AB} 。

$$\begin{aligned}\overline{AA'} &= \overline{CC'} = \frac{\Delta l_{CD}}{2} = \frac{\sqrt{2} Pl}{2EA} \\ \overline{AA'} &= \overline{A'A''} - \overline{AA''} = \sqrt{2} (\Delta l_{AD} + \overline{A'E}) - \overline{AA''} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} Pl}{2EA} + \frac{\sqrt{2} Pl}{2EA} \times \sqrt{2} \right) - \frac{\sqrt{2} Pl}{2EA} = \frac{Pl}{EA} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \Delta_{AB} &= 2 \times \overline{AA'} = \frac{Pl}{EA} (2 + \sqrt{2}) (\longleftrightarrow)\end{aligned}$$

题 2-19 图示两端固定的等截面直杆, 其横截面积为 A , 该杆受轴向载荷 P 作用, 试计算杆的最大拉应力和最大压应力。



题 2-19a 图

α 解: (1) 列平衡方程。

设固定端支反力为 N_{AB} 和 N_{BC} (它们在数值上等于 AB 段和 BC 段的轴向力), 方向如图 (b) 所示。即

$$N_{AC} + N_{BC} = P \quad (1)$$

显然, 这是一度静不定问题, 需要建立一个补充方程。

(2) 列补充方程。

$$\Delta l = \Delta l_{AB} - \Delta l_{BC} = 0$$

根据虎克定律

$$\begin{aligned}\Delta l_{AB} &= \frac{N_{AB} l_{AB}}{EA} = \frac{N_{AB} l}{3EA} \\ \Delta l_{BC} &= \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA} = \frac{2N_{BC} l}{3EA}\end{aligned}$$

代入 Δl 式中得

$$N_{AB} - 2N_{BC} = 0 \quad (2)$$

联解方程式 (1)、(2), 得

$$N_{AB} = \frac{2}{3}P \quad N_{BC} = \frac{P}{3}$$

∴

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^+ &= \frac{N_{AB}}{A} = \frac{2P}{3A} \\ \sigma_{\max}^- &= -\frac{N_{BC}}{A} = -\frac{P}{3A}\end{aligned}$$