

—

激光原理

# 激 光 原 理

清 华 大 学 周炳琨 高以智 陈家骅  
成 都 电 讯 工 程 学 院 陈 倜 嵘 编

國 防 工 業 出 版 社

## 前 言

本书系高等学校工科电子类激光专业统编教材之一，主要讲授激光器的基本原理和理论分析方法。教材分为两大部分，第一部分（一到六章）讲授激光振荡和放大理论，第二部分（七到十二章）讲授光谐振腔理论。

光和物质的相互作用是激光振荡和放大的物理基础。因此，教材一到六章的重点放在阐明光和物质相互作用的基本物理过程和主要理论分析方法。在激光器的各种理论分析方法中，本书主要介绍速率方程理论，并在此基础上分析激光器的工作特性（第二、三、四章）。激光器的半经典理论能够更深入地揭示激光振荡的各种物理现象，我们在第五章对它的基本分析方法也作了比较详细的介绍。此外，在第二章中还简要介绍了光和物质相互作用的经典理论和量子理论的基本概念。最后，在第六章分析激光器自发辐射噪声问题时，介绍了激光器的等效振荡回路分析方法。

教材第二部分重点讲授光谐振腔模式的波动（衍射）理论。在七到十章中介绍了平行平面腔、对称共焦腔以及一般稳定球面腔的模式特征，并在此基础上介绍了高斯光束的传输规律。在分析非稳腔模的第十一章中，仅介绍了光谐振腔的几何理论分析方法。最后，考虑到近年来波导型光谐振腔在激光器件中的广泛应用，在第十二章中对此做了简要介绍。

本教材采用米-千克-秒（MKS）国际单位制。每章末附有少量习题，供学生练习选用。

具有原子物理学、电磁场理论、量子力学和统计物理学的基础知识的读者，可以循序渐进地阅读本书。

本教材大约可用 120 学时讲完。建议一到六章使用 70 学时，七到十二章使用 50 学时。实验课应单独开设，教材中未涉及这方面的内容。教材中有些章节打了 \* 号，这部分内容在学时不够时可以删去不讲或作为学生的自学内容。当然，在使用这本教材时，无论是讲授次序和学时安排，还是内容的选择，教师都可以根据自己的意见变动和取舍。

教材一到六章由清华大学（主编单位）周炳琨、高以智和陈家骅编写，七到十二章由成都电讯工程学院陈倜嵘编写。全书由华中工学院姜平主审，天津大学、北京工业学院、西北电讯工程学院、哈尔滨工业大学等院校的同志对初稿提出了宝贵意见，在此谨向他们表示谢意。

本书取材是否适当，编排是否符合学生学习规律，以及书中错误和不妥之处，希望读者指正。

编 者

# 目 录

|                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 第一章 激光的基本原理..... 1                   | § 4.2 脉冲激光器的工作特性.....121    |
| § 1.1 相干性基本概念 ..... 1                | § 4.3 Q调制激光器的工作特性.....132   |
| § 1.2 相干性的光子描述 ..... 5               | § 4.4 脉冲激光放大器的工作特性.....138  |
| § 1.3 光的受激辐射基本概念 ..... 9             | § 4.5 锁模激光器原理.....148       |
| § 1.4 光的受激辐射放大 .....13               | 第五章 激光振荡的半经典理论 .....156     |
| § 1.5 光的自激振荡 .....17                 | § 5.1 引言.....156            |
| § 1.6 光谐振腔简述 .....18                 | § 5.2 光波波动方程.....157        |
| § 1.7 激光器举例 .....23                  | § 5.3 原子系统的电偶极矩.....162     |
| § 1.8 激光的特性 .....27                  | § 5.4 密度矩阵.....165          |
| 第二章 电磁场和物质相互作用 .....32               | § 5.5 静止原子激光器理论.....171     |
| § 2.1 引言 .....32                     | § 5.6 运动原子激光器理论.....188     |
| § 2.2 谱线加宽和线型函数 .....33              | § 5.7* 环形激光器 .....196       |
| § 2.3 自然加宽和碰撞加宽 (均匀加宽).....36        | 第六章 激光的相干性和噪声 .....203      |
| § 2.4 气体工作物质的多普勒加宽<br>(非均匀加宽).....41 | § 6.1 相干性的经典描述方法.....203    |
| § 2.5 综合加宽 .....45                   | § 6.2 激光器的噪声.....212        |
| § 2.6 激光器速率方程 .....48                | § 6.3 激光振荡器噪声的频谱特性.....216  |
| § 2.7 光和物质相互作用的<br>经典理论简介 .....51    | 第七章 腔模理论的一般问题 .....223      |
| § 2.8 光和物质相互作用的<br>量子理论简介 .....57    | § 7.1 腔与模.....223           |
| 第三章 连续激光器的增益<br>与工作特性.....70         | § 7.2 光腔中的驻波 纵模概念.....226   |
| § 3.1 小信号稳态增益 .....70                | § 7.3 闭腔的振荡模式.....231       |
| § 3.2 增益饱和 .....73                   | § 7.4 开腔模的物理概念.....243      |
| § 3.3 烧孔效应 .....80                   | § 7.5 开腔模式积分本征值问题.....247   |
| § 3.4* 增益系数的测量.....82                | § 7.6 开腔模式问题的分析方法.....255   |
| § 3.5 连续激光器稳态工作特性 .....84            | § 7.7 共轴球面腔的稳定性条件.....256   |
| § 3.6 连续激光器的输出功率<br>与最佳透射率 .....87   | § 7.8* 折叠腔 .....266         |
| § 3.7 单模激光器的线宽极限 .....97             | § 7.9* 环形腔 .....268         |
| § 3.8 激光器的频率牵引 .....99               | § 7.10 光腔的损耗 .....272       |
| § 3.9* 激光器的稳频 .....102               | 第八章 平行平面腔 .....282          |
| § 3.10 连续激光放大器的净增益 .....109          | § 8.1 用迭代法求解平面腔模.....282    |
| § 3.11 超辐射 .....111                  | § 8.2 平行平面腔模的基本特征.....284   |
| 第四章 脉冲激光器的工作特性 .....118              | § 8.3* 腔的不平行性 .....293      |
| § 4.1 多模振荡的速率方程.....118              | § 8.4 平行平面腔中的横模选择.....295   |
|                                      | § 8.5* 平面开腔模的近似解析解 .....298 |
|                                      | 第九章 稳定球面腔 .....307          |
|                                      | § 9.1 方形镜共焦腔的自再现模.....307   |
|                                      | § 9.2 方形镜共焦腔的行波场.....317    |
|                                      | § 9.3 圆形镜共焦腔.....321        |

|                                       |     |                                           |     |
|---------------------------------------|-----|-------------------------------------------|-----|
| § 9.4 一般稳定球面腔与共<br>焦腔的等价性 .....       | 327 | § 11.4 各类非稳腔的共轭像点的位置<br>及几何自再现波型的特征 ..... | 380 |
| § 9.5 一般稳定球面腔模的特征 .....               | 329 | § 11.5 非稳腔的几何放大率及自再<br>现波型的能量损耗 .....     | 384 |
| § 9.6 对称稳定球面腔 .....                   | 332 | § 11.6 非稳腔的输出耦合 .....                     | 391 |
| § 9.7 平-凹稳定腔 .....                    | 336 | § 11.7 非稳腔的输出近、远场图 .....                  | 396 |
| § 9.8* 球面腔的调整要求 .....                 | 343 | <b>第十二章 波导激光谐振腔</b> .....                 | 399 |
| § 9.9 稳定腔中的横模选择 .....                 | 344 | § 12.1 波导激光谐振腔的构成和特征 .....                | 399 |
| <b>第十章 高斯光束</b> .....                 | 348 | § 12.2 空心圆柱波导管中的本征模 .....                 | 400 |
| § 10.1 高斯光束的基本性质 .....                | 348 | § 12.3 圆波导本征模的传输常数<br>和损耗特性 .....         | 405 |
| § 10.2 高斯光束通过薄透镜的传输 .....             | 353 | § 12.4 空心矩形介质波导中的本征模 .....                | 411 |
| § 10.3 高斯光束的聚焦 .....                  | 357 | § 12.5* 空心介质平板波导中<br>的本征模 .....           | 414 |
| § 10.4 高斯光束的准直 .....                  | 359 | § 12.6 波导激光器的反馈方法<br>及耦合损耗 .....          | 415 |
| § 10.5 高斯模的匹配 .....                   | 362 | § 12.7 无限大反射镜对 $EH_{11}$ 模的<br>耦合损耗 ..... | 417 |
| § 10.6* 高斯光束的自再现变换<br>与稳定球面腔 .....    | 363 | <b>附录一 等离子体色散函数<br/>及其性质</b> .....        | 424 |
| § 10.7 利用 $q$ 参数讨论高斯光束<br>的传输问题 ..... | 365 | <b>附录二 多模振荡的迭代解法</b> .....                | 426 |
| <b>第十一章 非稳腔</b> .....                 | 371 |                                           |     |
| § 11.1 稳定腔的缺点和非稳腔的引入 .....            | 371 |                                           |     |
| § 11.2 非稳腔的定义和构成 .....                | 373 |                                           |     |
| § 11.3 非稳腔的基本几何属性 .....               | 376 |                                           |     |

# 第一章 激光的基本原理

本章概述激光器基本原理。重点是光的相干性和光波模式的联系、光的受激辐射以及光放大和振荡的基本概念。

## § 1.1 相干性基本概念

激光器和普通光源的重要区别，在于它是强相干光源。为了理解激光器这一本质特点，我们先讨论光的相干性概念。

光的相干性的描述是一个比较复杂的问题，可以用经典波动光学的方法，也可以用光的量子论方法（光子统计）。本节只是给出相干性经典描述的初步概念。

### （一）相干性概念

在一般情况下，光的相干性理解为：在不同的空间点上、在不同的时刻的光波场的某些特性（例如光波场的相位）的相关性。我们用图 1-1-1 说明这个概念。在光源  $A$  的前面放置具有小孔  $S_1$  和  $S_2$  的光阑，并讨论从  $S_1$ 、 $S_2$  发出的光波到达屏上  $c$  点后的干涉特性。令点  $S_1$  处的光波场为  $E_1(t)$ ，点  $S_2$  处的为  $E_2(t)$ ，点  $c$  处的为  $E(t)$ ，用  $t_1$  和  $t_2$  分别表示光波通过距离  $r_1$  和  $r_2$  所需的时间，则可得  $c$  点的叠加光场为

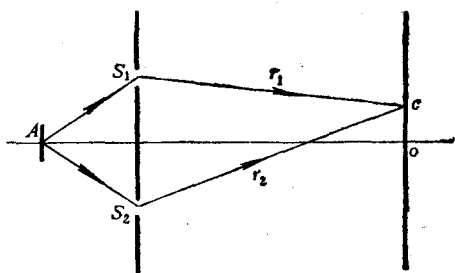


图 1-1-1 光的相干性示意图

$$E(t) = K_1 E_1(t - t_1) + K_2 E_2(t - t_2) \quad (1-1-1)$$

式中  $K_1$ 、 $K_2$  是由传播引起光场振幅变化的几何因子。 $c$  点的光强  $I$  应表示为

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) E^*(t) dt = \langle E(t) E^*(t) \rangle \quad (1-1-2)$$

式中  $T$  表示光接收器的观察时间（或响应时间）。这里对  $T$  求时间平均值，是因为光的频率  $\nu \approx 10^{14}$  赫，一般接收器所能反应的只是光强在  $T \gg 1/\nu$  的观察时间内的平均值。

现在讨论一种理想情况。设  $E_1(t)$ 、 $E_2(t)$  是振幅、频率和偏振都相同，但其相位分别为  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  的单色光波场

$$\left. \begin{aligned} E_1(t) &= E_0 e^{i2\pi\nu t + i\phi_1} \\ E_2(t) &= E_0 e^{i2\pi\nu t + i\phi_2} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-3)$$

为简化问题，设  $c$  点位于  $r_1 \approx r_2$  的对称点  $o$  附近，因此可近似认为  $K_1 = K_2$ ，于是  $c$  点光强  $I$  可写为

$$I = \langle E(t) E^*(t) \rangle = 2E_0^2 [1 + \langle \cos(\Delta\phi + \Delta\Phi) \rangle] \quad (1-1-4)$$

式中

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

如果相位差  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  在足够长的观察时间  $T$  内维持不变, 则上式变为

$$I = 2E_0^2 [1 + \cos(\Delta\phi + \Delta\Phi)] \quad (1-1-5)$$

于是屏上各点光强随  $\Delta\Phi$  的变化而在  $I_{\min} = 0$  和  $I_{\max} = 4E_0^2$  之间变化, 形成干涉条纹。在这种情况下, 我们把位于  $S_1$ 、 $S_2$  两点的光场  $E_1(t)$  和  $E_2(t)$  称为完全相干光, 或者说  $E_1(t)$  和  $E_2(t)$  具有相位相关性。相反, 如果  $\Delta\phi$  在观察时间  $T$  内随机变化, 则  $\langle \cos(\Delta\Phi + \Delta\phi) \rangle = 0$ , C 点光强  $I$  变为

$$I = 2E_0^2 = \text{常数} \quad (1-1-6)$$

屏上不出现干涉条纹, 这就是完全非相干光的情况。

(1-1-5) 式所表示的完全相干性只是一种理想情况。它只有在点光源发出单色光的情况下才能实现。而任何实际的光源既非单色的, 也不可能是真正的点光源, 因而只能是部分相干的。因此, 为了描述实际光源的相干性, 有必要对光的相干性概念作进一步的讨论。

## (二) 相干体积、时间相干性和空间相干性

在相干性的经典理论中, 对于光的相干性程度有比较严格的定量描述方法, 这将在第六章中讨论。但是, 作为相干性的一种粗略描述, 常常使用相干体积的概念。如果在空间体积  $V$  内各点的光波场都具有明显的相干性, 则  $V_0$  称为相干体积。 $V_0$  又可表示为垂直于光传播方向的截面上的相干面积  $A_0$  和沿传播方向的相干长度  $L_0$  的乘积

$$V_0 = A_0 L_0 \quad (1-1-7)$$

(1-1-7) 式也可表示为另一形式:

$$V_0 = A_0 \tau_0 c \quad (1-1-8)$$

式中  $c$  为光速,  $\tau_0 = L_0/c$  是光沿传播方向通过相干长度  $L_0$  所需的时间, 称为相干时间。

根据 (1-1-8) 式, 可以将光的相干性概念分为时间相干性和空间相干性。时间相干性是指在同一空间点上, 两个不同时刻  $t_1$  和  $t_2$  的光波场之间的相干性。因为相干时间  $\tau_0$  的物理意义是, 在空间同一点上, 时间间隔处于区间  $|t_2 - t_1| < \tau_0$  之内的光波场都是明显相干的, 所以时间相干性正是由相干时间  $\tau_0$  来定量描述的。空间相干性是指在同一时刻, 两个不同空间点上的光波场之间的相干性。后面将要指出, 空间相干性可以由相干面积  $A_0$  描述。

此外, 具有相干性的光波场的强度 (相干光强) 在相干光的技术应用中, 也是一个重要的参量, 它通常用光子简并度描述, 我们将在下节中讲述。一个好的相干光源, 意味着上述三个参量都应具有尽可能高的数值。

## (三) 普通光源的相干体积

普通光源发光, 是大量独立振子 (例如发光原子) 的自发辐射。振子的自发辐射光波场不是单色的, 而且不同振子发出的光波的相位是随机变化的, 因此普通光源的相干体积与光源的单色性及空间线度有关。下面通过两个典型干涉实验, 求出普通光源的相干体积。

光源的相干时间, 可以通过分析迈克尔逊干涉实验求得。在图 1-1-2 中, 从光源发出的稳定光束  $E$  经镜  $M$  分为两束  $E(1)$  和  $E(2)$ 。两束光分别由镜  $M_1$  和可动镜  $M_2$  反

射, 并经过不同的光程(或时间)先后到达  $P$  点重新会合, 产生干涉。光程差  $\Delta L = 2|M_2M - M_1M| = 2m\lambda/2$  时,  $P$  点最亮;  $\Delta L = (2m + 1)\lambda/2$  时,  $P$  点最暗。如果光源是纯单色的, 则对任意长的光程差  $\Delta L$ , 上述干涉效应都是存在的。但实际光源并不是理想的单色光源, 这就使上述干涉效应只能在有限的光程差范围内明显出现, 当  $\Delta L$  大于某一数值  $L_c$  时, 干涉效应消失。显然,  $L_c$  就是光源的相干长度。下面分析  $L_c$  与光源单色性的关系。

普通光源的振子发光过程, 都是在一定的时间间隔内进行的, 每个原子发出的光波是由持续一段时间  $\Delta t$  或在空间占有长度  $c\Delta t$  的波列所组成, 如图 1-1-3 所示。对于原子谱线来说,  $\Delta t$  即为原子的激发态寿命 ( $\Delta t \approx 10^{-8}$  秒)。对波列进行频谱分析, 就得到它的频带宽度

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t}$$

$\Delta\nu$  就是光源单色性的量度。

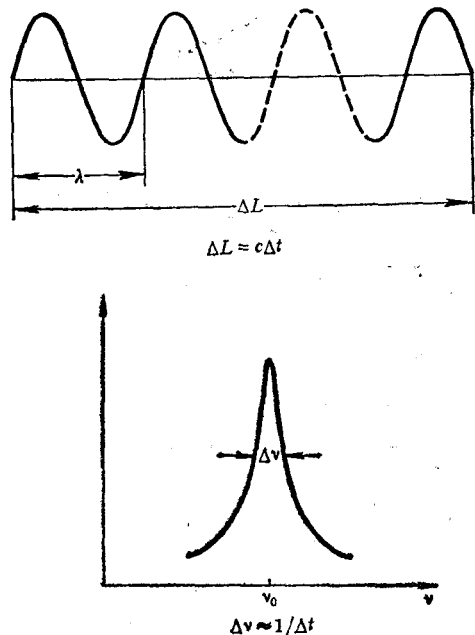


图1-1-3 单个原子发出的光波列及其频谱

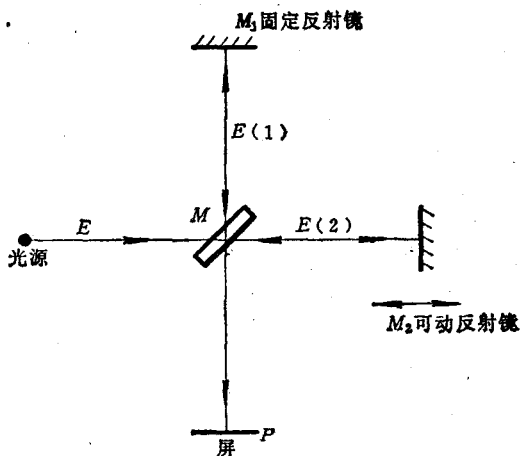


图1-1-2 迈克尔逊干涉实验示意图

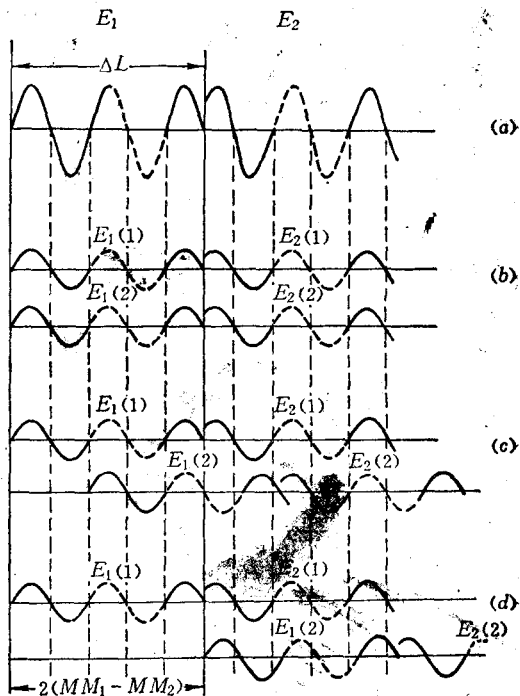


图1-1-4 相干长度示意图

大量振子自发辐射的特点是波列的相位完全随机变化, 不同波列之间没有任何相位相关性, 即不同波列不能相干。于是, 进入迈克尔逊干涉仪的实际上是一连串相位无关的波列  $E_1, E_2, \dots$ , 它们又被分为子波列  $E_1(1), E_1(2), E_2(1), E_2(2), \dots$  如图 1-1-4 (a)



所示。当光程差  $\Delta L$  很小时,基本上是一波列的子波列在  $P$  点会合,即  $E_1(1)$  和  $E_1(2)$  会合,  $E_2(1)$  和  $E_2(2)$  会合,等等。因为同一波列的子波列是相干的,所以这时出现明显的干涉,见图 1-1-4(b)。当  $\Delta L$  逐渐增加时,不同波列的子波列就出现部分重叠,干涉效应开始减弱,见图 1-1-4(c)。最后,当  $\Delta L > c\Delta t$ ,即光程差大于波列长度时,在  $P$  点完全是不同波列的子波列会合。由于不同波列是非相干的,所以干涉效应消失,这种情况示于图 1-1-4(d)。从上述分析可以认为,光波的相干长度就是它所发出的光波的波列长度:

$$L_c = c\Delta t = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (1-1-9)$$

于是,相干时间  $\tau_c$  与光源频带宽度  $\Delta\nu$  的关系为

$$\tau_c = \Delta t = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (1-1-10)$$

上式说明,光源单色性越好,则相干时间越长。

现在利用杨氏双缝干涉实验(图 1-1-5)讨论光源的空间相干性。我们分析由光源  $A$  发出在  $S_1$  和  $S_2$  两点的光波场在与  $S_1$  和  $S_2$  距离相等的对称点  $O$  重新会合时形成的干涉。这就是在同一时刻空间两点  $S_1$  和  $S_2$  光波场的相干性,即空间相干性。

$S_1$  和  $S_2$  是由具有线度  $\Delta x$  的光源照明的,

而光源是大量独立振子的集合,每个振子都向  $S_1$  和  $S_2$  发出相位无关的自发辐射光波。因此,某个振子在  $S_1$  处贡献的光波场与另一振子在  $S_2$  处贡献的光波场是不相干的。但是,同一振子在  $S_1$  处和  $S_2$  处贡献的场却是相干的。因此,大量振子的光波场各自通过  $S_1$ 、 $S_2$  而在屏上形成自己的干涉条纹。如果这些干涉条纹不因相互重叠而完全抹平,则在屏上仍然可以观察到明显的干涉条纹。这就表明,  $S_1$  和  $S_2$  处的场具有明显的相干性。下面讨论出现这种情况的条件。

对于一个处于光源中心位置的振子  $P$ ,它在屏上形成一组干涉条纹。由于光程差  $\Delta L_P = |PS_1O - PS_2O| = 0$ ,所以  $O$  点处为明区。如果再在光源的边缘上选取一个振子  $P_1$ ,它的光程差  $\Delta L_{P_1} = |P_1S_1O - P_1S_2O| = |P_1S_1 - P_1S_2|$ 。由于

$$(P_1S_1)^2 = R^2 + \frac{1}{4}(L_x - \Delta x)^2$$

$$(P_1S_2)^2 = R^2 + \frac{1}{4}(L_x + \Delta x)^2$$

所以

$$\Delta L_{P_1} \approx \frac{\Delta x L_x}{2R}$$

如果  $\Delta L_{P_1} = \lambda/2$ ,则  $O$  点处为暗区。于是振子  $P$  的干涉条纹和振子  $P_1$  的干涉条纹严重抹平。可以认为,这时  $S_1$  和  $S_2$  的相干性就不存在了。因此,可以把  $S_1$  和  $S_2$  具有明显空间相干性的条件规定为

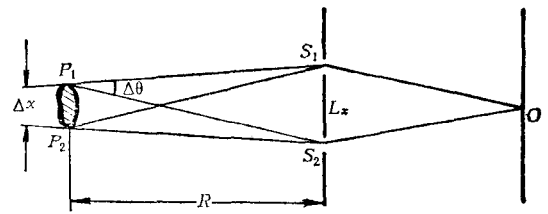


图 1-1-5 杨氏双缝干涉

$$\Delta L_{P_1} - \Delta L_P \leq \frac{\lambda}{2}$$

即

$$\frac{\Delta x L_x}{R} \leq \lambda \quad (1-1-11)$$

因此, 距离光源  $R$  处的相干面积  $A_c$  可表示为

$$A_c = L_x^2 = \left( \frac{R\lambda}{\Delta x} \right)^2 \quad (1-1-12)$$

如果用  $\Delta\theta$  表示两缝间距对光源的张角, 则 (1-1-11) 式也可写为

$$\Delta x \Delta\theta \leq \lambda \quad (1-1-13)$$

或

$$(\Delta x)^2 \leq \left( \frac{\lambda}{\Delta\theta} \right)^2 \quad (1-1-14)$$

上式表明, 光源的面积越小, 则具有空间相干性的张角  $\Delta\theta$  越大。

由 (1-1-10) 和 (1-1-12) 式可得普通光源的相干体积  $V_c$  为

$$V_c = \frac{c}{\Delta\nu} \left( \frac{R\lambda}{\Delta x} \right)^2 \quad (1-1-15)$$

应该再次指出, 由上式所确定的相干体积只是相干性的一种粗略描述。从导出上式的过程可以看出, 实际上从完全相干到完全不相干是逐渐过渡的。从上式还可看出, 对普通光源来说, 增大相干体积和增大相干光强是矛盾的。为增大  $V_c$ , 可以采用光学滤波来减小  $\Delta\nu$ , 缩小光源线度或加光阑以减小  $\Delta x$  以及远离光源等办法。但这一切都将导致相干光强的减小。这正是普通光源给相干光学技术的发展带来的限制。例如光全息技术, 它的原理早在 1948 年就被提出, 但在激光出现之前一直没有实际应用, 其原因就在于此。而激光器却是一种把光强和相干性两者统一起来的强相干光源。我们在后面将对此加以说明。

## § 1.2 相干性的光子描述

### (一) 光子的基本性质

光的量子学说 (光子说) 认为, 光是一种以光速  $c$  运动的光子流。光子 (电磁场量子) 和其它基本粒子一样, 具有能量、动量和质量等。它的粒子属性 (能量、动量、质量等) 和波动属性 (频率、波矢、偏振等) 密切联系, 并可归纳如下:

1. 光子的能量  $\varepsilon$  与光波频率  $\nu$  对应

$$\varepsilon = h\nu \quad (1-2-1)$$

式中  $h = 6.624 \times 10^{-34}$  焦耳·秒, 称为普朗克常数。

2. 光子具有运动质量  $m$ , 并可表示为

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (1-2-2)$$

光子的静止质量为零。

3. 光子的动量  $P$  与单色平面光波的波矢  $k$  对应

$$P = mc n_0 = \frac{h\nu}{c} n_0 = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} n_0 = \hbar k \quad (1-2-3)$$

式中

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}_0$$

$\mathbf{n}_0$ 为光子运动方向（平面光波传播方向）上的单位矢量。

4. 光子具有两种可能的独立偏振状态，对应于光波场的两个独立偏振方向。

5. 光子具有自旋，并且自旋量子数为整数。因此大量光子的集合，服从玻色-爱因斯坦统计规律。处于同一状态的光子数目是没有限制的，这是光子与其它服从费米统计分布的粒子（电子、质子、中子等）的重要区别。

上述基本关系 (1-2-1) 和 (1-2-3)，后来为康普顿 (Arthur Compton) 散射实验所证实 (1923年)，并在现代量子电动力学中得到理论解释。量子电动力学从理论上把光的电磁 (波动) 理论和光子 (微粒) 理论在电磁场的量子化描述的基础上统一起来，从而在理论上阐明了光的波粒二象性 (见 § 2.8)。在这种描述中，任意电磁场可看作是一系列单色平面电磁波 (它们以波矢  $\mathbf{k}_i$  为标志) 的线性迭加，或一系列电磁波的本征模式 (或本征状态) 的迭加。但每个本征模式所具有的能量是量子化的，即可表为基元能量  $\hbar\nu_i$  的整数倍。本征模式的动量也可表为基元动量  $\hbar\mathbf{k}_i$  的整数倍。这种具有基元能量  $\hbar\nu_i$  和基元动量  $\hbar\mathbf{k}_i$  的物质单元就称为属于第  $i$  个本征模式 (或状态) 的光子。具有相同能量和动量的光子彼此间不可区分，因而处于同一模式 (或状态)。每个模式内的光子数目是没有限制的。

## (二) 光波模式和光子状态 相格

从上面的叙述已经可以看出，按照量子电动力学概念，光波的模式和光子的状态是等效的概念。下面将对这一点进行深入一步的讨论。

由于光的波粒二象性，我们可以用波动和粒子两种观点来描述它。

在激光理论中，光波模式是一个重要概念。按照经典电磁理论，光电磁波的运动规律由麦克斯韦 (C. Maxwell) 方程决定。单色平面波是麦克斯韦方程的一种特解，它表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i2\pi\nu t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1-2-4)$$

式中， $\mathbf{E}_0$  为光波电场的振幅矢量， $\nu$  为单色平面波的频率， $\mathbf{r}$  为空间位置坐标矢量， $\mathbf{k}$  为波矢。而麦克斯韦方程的通解可表为一系列单色平面波的线性迭加。

在自由空间，具有任意波矢  $\mathbf{k}$  的单色平面波都可以存在。但在一个有边界条件限制的空间  $V$  (例如谐振腔) 内，只能存在一系列独立的具有特定波矢  $\mathbf{k}$  的平面单色驻波。这种能够存在于腔内的驻波 (以某一波矢  $\mathbf{k}$  为标志) 称为电磁波的模式或光波模。一种模式是电磁波运动的一种类型，不同模式以不同的  $\mathbf{k}$  区分。同时，考虑到电磁波的两种独立的偏振，同一波矢  $\mathbf{k}$  对应着两个具有不同偏振方向的模。

下面求解空腔  $V$  内的模式数目。设空腔为  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$  的立方体，则沿三个坐标轴方向传播的波分别应满足的驻波条件为

$$\Delta x = m \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta y = n \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta z = q \frac{\lambda}{2}$$

式中  $m$ 、 $n$ 、 $q$  为正整数。而波矢  $k$  的三个分量应满足条件

$$k_x = \frac{\pi}{\Delta x} m, \quad k_y = \frac{\pi}{\Delta y} n, \quad k_z = \frac{\pi}{\Delta z} q \quad (1-2-5)$$

每一组正整数  $m$ 、 $n$ 、 $q$  对应腔内一种模式 (包含两个偏振)。

如果在以  $k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_z$  为轴的直角坐标系中, 即在波矢空间中表示光波模, 则每个模对应波矢空间的一点 (如图 1-2-1 所示)。每一模式在三个坐标轴方向与相邻模的间隔为

$$\Delta k_x = \frac{\pi}{\Delta x}, \quad \Delta k_y = \frac{\pi}{\Delta y}, \quad \Delta k_z = \frac{\pi}{\Delta z} \quad (1-2-6)$$

因此, 每个模式在波矢空间占有一个体积元

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\pi^3}{V} \quad (1-2-7)$$

在  $k$  空间内, 波矢绝对值处于  $|k| \sim |k| + d|k|$  区间的体积为  $(1/8) 4\pi |k|^2 d|k|$ , 故在此体积内的模式数为

$(1/8) 4\pi |k|^2 d|k| V / \pi^3$ 。又因  $|k| = 2\pi / \lambda = 2\pi \nu / c$ ;  $d|k| = \frac{2\pi}{c} d\nu$ , 代入上式则得频率在  $\nu \sim \nu + d\nu$  区间内的模式数为  $(1/8) 4\pi (2\pi / c)^2 \nu^2 (2\pi / c) d\nu V / \pi^3$ 。再考虑到对应同一  $k$  有两种不同的偏振, 上述模式数应乘 2, 于是, 在体积为  $V$  的空腔内, 处在频率  $\nu$  附近频带  $d\nu$  内的模式数为

$$P = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} V d\nu \quad (1-2-8)$$

现在再从粒子的观点阐明光子状态的概念, 并且证明, 光子态和光波模是等效的概念。

在经典力学中, 质点运动状态完全由其坐标  $(x, y, z)$  和动量  $(P_x, P_y, P_z)$  确定。我们可以用广义笛卡儿 (Cartesian) 坐标  $x, y, z, P_x, P_y, P_z$  所支撑的六维空间来描述质点的运动状态。这种六维空间称为相空间, 相空间内的一点表示质点的一个运动状态。当宏观质点沿某一方向 (例如  $x$  轴) 运动时, 它的状态变化对应于二维相空间  $(x, P_x)$  的一条连续曲线, 如图 1-2-2 所示。但是, 光子的运动状态和经典宏观质点有着本质的区别, 它受量子力学测不准关系的制约。测不准关系表明: 微观粒子的坐标和动量不能同时准确测定, 位置测得越准确, 动量就越测不准。对于一维运动情况, 测不准关系表示为

$$\Delta x \Delta P_x \approx h \quad (1-2-9)$$

上式意味着处于二维相空间面积元  $\Delta x \Delta P_x \approx h$  之内的粒子运动状态在物理上是不可区分的, 因而它们应属于同一种状态。

在三维运动情况下, 测不准关系为

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z \approx h^3 \quad (1-2-10)$$

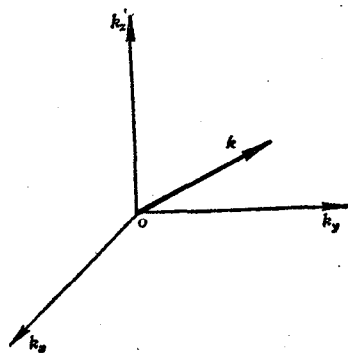


图1-2-1 波矢空间

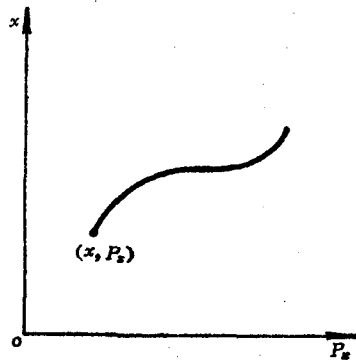


图1-2-2 经典质点运动

故在六维相空间中, 一个光子态对应(或占有)的相空间体积元为

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z \approx h^3$$

上述相空间体积元称为相格。相格是相空间中用任何实验所能分辨的最小尺度。光子的某一运动状态只能定域在一个相格中, 但不能确定它在相格内部的对对应位置。于是我们看到, 微观粒子和宏观质点不同, 它的运动状态在相空间中不是对应一点而是对应一个相格。这表明微观粒子运动的不连续性。仅当所考虑的运动粒子的能量和动量远远大于由普朗克常数  $h$  所标志的量  $h\nu$  和  $h\mathbf{k}$ , 以致量子化效应可以忽略不计时, 量子力学运动才过渡到经典力学运动。

从(1-2-11)式还可得出, 一个相格所占有的坐标空间体积(或称相格空间体积)为

$$\Delta x \Delta y \Delta z \approx \frac{h^3}{\Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z} \quad (1-2-11)$$

现在证明, 光波模等效于光子态。为此将光波模的波矢空间体积元表示式(1-2-7)改写为在相空间中的形式。考虑到一个光波模是由两列沿相反方向传播的行波组成的驻波, 因此它的动量和波矢的关系应为

$$P_x = 2\hbar k_x, \quad P_y = 2\hbar k_y, \quad P_z = 2\hbar k_z \quad (1-2-12)$$

或

$$\Delta P_x = 2\hbar \Delta k_x, \quad \Delta P_y = 2\hbar \Delta k_y, \quad \Delta P_z = 2\hbar \Delta k_z \quad (1-2-13)$$

于是, (1-2-7)式在相空间中可改写为

$$\Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z \Delta x \Delta y \Delta z = h^3 \quad (1-2-14)$$

可见, 一个光波模在相空间也占有一个相格。因此, 一个光波模等效于一个光子态。一个光波模或一个光子态在坐标空间都占有由(1-2-11)式表示的空间体积。

### (三) 光子的相干性

下面再回到光的相干性的讨论, 并把光子态和光子的相干性两个概念联系起来。为此, 重新写出 § 1.1 中的(1-1-14)式

$$(\Delta x)^2 \leq \left( \frac{\lambda}{\Delta\theta} \right)^2$$

上式的物理意义是: 如果要求传播方向(或波矢  $\mathbf{k}$ )限于立体角  $\Delta\theta$  之内的光波是相干的, 则光源的面积必须小于  $(\lambda/\Delta\theta)^2$ 。因此,  $(\lambda/\Delta\theta)^2$  就是光源的相干面积, 或者说, 只有从面积小于  $(\lambda/\Delta\theta)^2$  的光源面上发出的光波才能保证张角在  $\Delta\theta$  之内的双缝具有相干性(见图 1-2-3)。根据相干体积定义, 可得光源的相干

体积为

$$V_{cs} = \left( \frac{\lambda}{\Delta\theta} \right)^2 \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c^3}{\nu^2 \Delta\nu (\Delta\theta)^2} \quad (1-2-15)$$

此式可同样理解为: 如要求传播方向限于  $\Delta\theta$  之内并具有频带宽度  $\Delta\nu$  的光波相干, 则光源应局限在空间体积  $V_{cs}$  之内。

现在再从光子观点分析图 1-2-3。由面积为

$(\Delta x)^2$  的光源发出动量  $P$  限于立体角  $\Delta\theta$  内的光子, 因此光子具有动量测不准量, 其各分量为(在  $\Delta\theta$  很小的情况下)

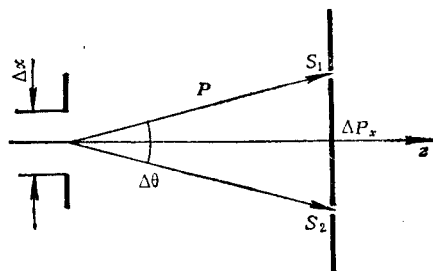


图 1-2-3 双缝的相干性

$$\Delta P_x = \Delta P_y \approx |P| \Delta \theta = \frac{h\nu}{c} \Delta \theta \quad (1-2-16)$$

因为  $\Delta \theta$  很小, 故有

$$P_x \approx |P|$$

$$\Delta P_x \approx \Delta |P| = \frac{h}{c} \Delta \nu \quad (1-2-17)$$

如果具有上述动量测不准量的光子处于同一相格之内, 即处于一个光子态, 则光子占有的相格空间体积 (即光子的坐标测不准量) 可根据 (1-2-11)、(1-2-16) 及 (1-2-17) 式求得

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{h^3}{\Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z} = \frac{c^3}{\nu^2 \Delta \nu (\Delta \theta)^2} = V_{\theta} \quad (1-2-18)$$

上式表明, 相格的空间体积和相干体积相等。如果光子属于同一光子态, 则它们应该包含在相干体积之内。也就是说, 属于同一光子态的光子是相干的。

综上所述, 可得下述关于相干性的重要结论:

1. 相格空间体积以及一个光波模或光子态占有的空间体积都等于相干体积;
2. 属于同一状态的光子或同一模式的光波是相干的。不同状态的光子或不同模式的光波是不相干的。

#### (四) 光子简并度

在 § 1.1 中已经指出, 相干光强是描述光的相干性的参量之一。从相干性的光子描述出发, 相干光强决定于具有相干性的光子的数目或同态光子的数目。这种处于同一光子态的光子数称为光子简并度  $\bar{n}$ 。显然, 光子简并度具有以下几种相同的涵义: 同态光子数、同一模式内的光子数、处于相干体积内的光子数、处于同一相格内的光子数。

### § 1.3 光的受激辐射基本概念

光与物质的共振相互作用, 特别是这种相互作用中的受激辐射过程是激光器的物理基础。我们将在第二章和第五章中较详细地讨论这种相互作用的理论处理方法。本节先给出基本物理概念。

受激辐射概念是爱因斯坦首先提出的 (1917年)。在普朗克 (Max Planck) 于 1905 年用辐射量子化假设成功地解释了黑体辐射分布规律, 以及波尔 (Niels Bohr) 在 1913 年提出原子中电子运动状态量子化假设的基础上, 爱因斯坦从光量子概念出发, 重新推导了黑体辐射的普朗克公式, 并在推导中提出了两个极为重要的概念: 受激辐射和自发辐射。四十年后, 受激辐射概念在激光技术中得到了应用。

#### (一) 黑体辐射的普朗克公式

我们知道, 处于某一温度  $T$  的物体能够发出和吸收电磁辐射。如果某一物体能够完全吸收任何波长的电磁辐射, 则称此物体为绝对黑体, 简称黑体。如图 1-3-1 所示的空腔辐射体就是一个比较理想的绝对黑体, 因为从外界射入小孔的任何波长的电磁辐射都将在腔内来回反射而不再逸出腔外。物体除吸收电磁辐射外, 还会发出电磁辐射, 这种电磁辐射称为热辐射或温度辐射。§ 1.1 中提到的普通光源就可以是一种热辐射光源。

如果图 1-3-1 所示的黑体处于某一温度  $T$  的热平衡情况下, 则它所吸收的辐射能量应等于发出的辐射能量, 即黑体与辐射场之间应处于能量(热)平衡状态。显然, 这种平衡必然导致空腔内存在完全确定的辐射场。这种辐射场称为黑体辐射或平衡辐射。

黑体辐射是黑体温度  $T$  和辐射场频率  $\nu$  的函数, 并用单色能量密度  $\rho_\nu$  描述。 $\rho_\nu$  定义为: 在单位体积内, 频率处于  $\nu$  附近的单位频率间隔中的电磁辐射能量。其量纲为 [焦耳·米<sup>-3</sup>·秒]。

为了从理论上解释实验测得的黑体辐射  $\rho_\nu$  随  $(T, \nu)$  的分布规律, 人们从经典物理学出发所作的一切努力都归于失败。后来, 普朗克提出了与经典概念完全不相容的辐射能量量子化假设, 并在此基础上成功地得到了与实验相符的黑体辐射普朗克公式。这一公式可表述为: 在温度  $T$  的热平衡情况下, 黑体辐射平均地分配到腔内所有模式上, 且每个模的能量为<sup>①</sup>

$$E = \frac{h\nu}{e^{K T} - 1} \quad (1-3-1)$$

为了求得腔内模式数目, 可利用 § 1.2 中的 (1-2-8) 式。显然, 腔内单位体积中频率处于  $\nu$  附近单位频率间隔内的光波模式数  $n_\nu$  为

$$n_\nu = \frac{P}{V d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

于是, 黑体辐射普朗克公式为

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{K T}} - 1} \quad (1-3-2)$$

式中  $K$  为玻尔兹曼常数, 其数值为

$$K = 1.38062 \times 10^{-23} \text{焦耳/度}$$

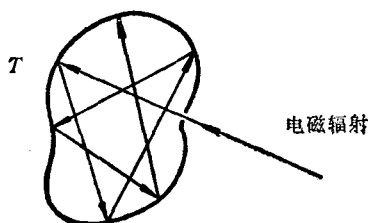


图1-3-1 绝对黑体示意图

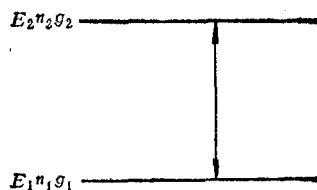


图1-3-2 二能级原子能级图

## (二) 受激辐射和自发辐射概念

(1-3-2) 式表示的黑体辐射, 实质上是辐射场  $\rho_\nu$  和构成黑体的物质原子相互作用的结果。为简化问题, 我们只考虑原子的两个能级  $E_2$  和  $E_1$ , 并有

$$E_2 - E_1 = h\nu \quad (1-3-3)$$

单位体积内处于两能级的原子数分别用  $n_2$  和  $n_1$  表示, 如图 (1-3-2) 所示。

① 参阅 M. 伽本尼, 《光学物理》, P. 45., 科学出版社。

爱因斯坦从辐射与原子相互作用的量子论观点出发提出, 相互作用应包含原子的自发辐射跃迁、受激辐射跃迁和受激吸收跃迁三种过程。

1. 自发辐射[图 1-3-3(a)]。处于高能级 $E_2$ 的一个原子自发地向 $E_1$ 跃迁, 并发射一个能量为 $h\nu$ 的光子, 这种过程称为自发跃迁。由原子自发跃迁发出的光子称为自发辐射。自发跃迁过程用自发跃迁几率 $A_{21}$ 描述。 $A_{21}$ 定义为单位时间内 $n_2$ 个高能态原子中发生自发跃迁的原子数与 $n_2$ 的比值:

$$A_{21} = \left( \frac{dn_{21}}{dt} \right)_{sp} \frac{1}{n_2} \quad (1-3-4)$$

式中,  $(dn_{21})_{sp}$  表示由于自发跃迁引起的由 $E_2$ 向 $E_1$ 跃迁的原子数。

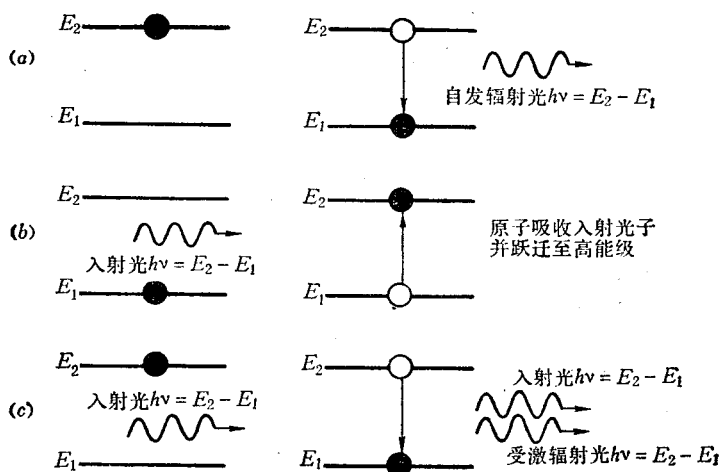


图1-3-3 原子的自发辐射、受激辐射和受激吸收示意图

应该指出, 自发跃迁是一种只与原子本身性质有关而与辐射场 $\rho_\nu$ 无关的自发过程。因此,  $A_{21}$ 只决定于原子本身的性质。由(1-3-4)式容易证明,  $A_{21}$ 就是原子在能级 $E_2$ 的平均寿命 $\tau$ 的倒数。因为在单位时间内能级 $E_2$ 所减少的粒子数为

$$\frac{dn_2}{dt} = - \left( \frac{dn_{21}}{dt} \right)_{sp}$$

将(1-3-4)式代入则得

$$\frac{dn_2}{dt} = -A_{21}n_2$$

由此式可得

$$n_2(t) = n_{20} e^{-A_{21}t} = n_{20} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中

$$A_{21} = \frac{1}{\tau} \quad (1-3-5)$$

$A_{21}$ 也称为自发跃迁爱因斯坦系数。

2. 受激吸收[图 1-3-3(b)]。显然, 如果黑体物质原子和辐射场相互作用只包含上述自发跃迁过程, 是不能维持由(1-3-2)式所表示的腔内辐射场的稳定值的。因此, 爱因



斯坦认为, 必然还存在一种原子在辐射场作用下的受激跃迁过程, 从而第一次从理论上预言了受激辐射的存在。

处于低能态  $E_1$  的一个原子, 在频率为  $\nu$  的辐射场作用(激励)下, 受激地向  $E_2$  能态跃迁并吸收一个能量为  $h\nu$  的光子, 这种过程称为受激吸收跃迁, 并用受激吸收跃迁几率  $W_{12}$  描述:

$$W_{12} = \left( \frac{dn_{12}}{dt} \right)_{st} \frac{1}{n_1} \quad (1-3-6)$$

式中,  $(dn_{12})_{st}$  表示由于受激跃迁引起的由  $E_1$  向  $E_2$  跃迁的原子数。

应该强调, 受激跃迁和自发跃迁是本质不同的物理过程, 反映在跃迁几率上就是:  $A_{21}$  只与原子本身性质有关; 而  $W_{12}$  不仅与原子性质有关, 还与辐射场的  $\rho_\nu$  成正比。我们可将这种关系唯象地表示为

$$W_{12} = B_{12} \rho_\nu \quad (1-3-7)$$

式中, 比例系数  $B_{12}$  称为受激吸收跃迁爱因斯坦系数, 它只与原子性质有关。

3. 受激辐射[图 1-3-3(c)]。受激吸收跃迁的反过程就是受激辐射跃迁。并有相似的关系式

$$W_{21} = \left( \frac{dn_{21}}{dt} \right)_{st} \frac{1}{n_2} \quad (1-3-8)$$

$$W_{21} = B_{21} \rho_\nu \quad (1-3-9)$$

由原子受激辐射跃迁发出的光子称为受激辐射。

### (三) $A_{21}$ 、 $B_{21}$ 、 $B_{12}$ 的相互关系

现在根据上述相互作用物理模型分析空腔黑体的热平衡过程, 从而导出爱因斯坦三系数之间的关系。如前所述, 正是由于腔内黑体辐射场  $\rho_\nu$  与物质原子相互作用的结果应该维持黑体处于温度为  $T$  的热平衡状态。这种热平衡状态的标志是:

1. 腔内存在着由 (1-3-2) 式表示的热平衡黑体辐射。

2. 腔内物质原子数按能级分布应服从热平衡状态下的玻尔兹曼 (Ludwig Boltzman) 分布

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{KT}} \quad (1-3-10)$$

式中,  $g_2$  和  $g_1$  分别为能级  $E_2$  和  $E_1$  的统计权重。

3. 在热平衡状态下,  $n_2$  (或  $n_1$ ) 应保持不变, 于是有

$$\left( \frac{dn_{21}}{dt} \right)_{sp} + \left( \frac{dn_{21}}{dt} \right)_{st} = \left( \frac{dn_{12}}{dt} \right)_{st} \quad (1-3-11)$$

或

$$n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \rho_\nu = n_1 B_{12} \rho_\nu \quad (1-3-12)$$

联立式 (1-3-2)、(1-3-10) 和 (1-3-12) 可得

$$\frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right) = \frac{B_{21}}{A_{21}} \left( \frac{B_{12} g_1}{B_{21} g_2} e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right) \quad (1-3-13)$$

上式当  $T \rightarrow \infty$  时也应成立, 所以有

$$B_{12} g_1 = B_{21} g_2 \quad (1-3-14)$$