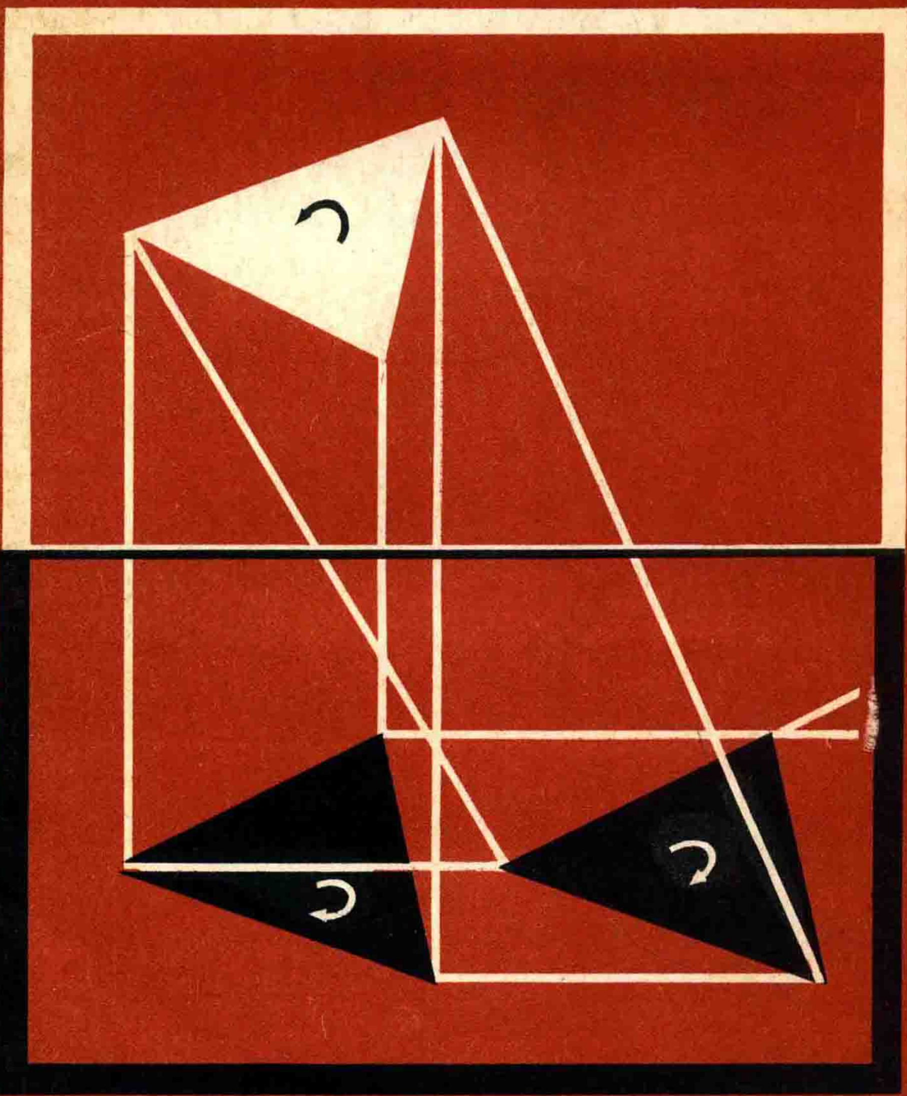
Л. Р. Хахамов

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ



Л. Р. ХАХАМОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

74.262.7
Х27

Хахамов Л. Р.

Х27 Преобразования плоскости. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1979. — 95 с.

В книге дается систематическое изложение преобразований плоскости, являющихся одним из основных понятий в новом школьном курсе математики. В пособии сообщаются известные читателю факты и новые, но все это дается с общей теоретико-групповой точки зрения.

$Х\,\frac{60501-219}{103(03)-79}\,157-79$

74.262.7
513

Светлой памяти отца —
Р. Д. Хахамова —
посвящает эту книгу

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой изложения геометрии по новым школьным программам служат геометрические преобразования. Изложение элементарной геометрии как теории преобразований высвобождает геометрию от искусственных приемов, логических противоречий. Геометрия становится логически более стройной. Вокруг отдельных видов перемещений удачно группируются разделы геометрии. Так, например, параллельный перенос есть вектор, а с помощью векторной алгебры легко доказываются многие теоремы и решаются различные геометрические задачи. Ранее отдельно изучаемые свойства серединного перпендикуляра к отрезку, биссектрисы угла и все свойства, связанные с наличием у фигуры осевой симметрии, также приобретают единую логическую основу. Это же самое можно сказать и относительно других видов перемещений.

Однако, учитывая возрастные особенности учащихся, в частности отсутствие у них геометрического опыта, в школьном курсе геометрии последовательная полная теория геометрических преобразований не дается. Там изложение проведено на разном уровне. В V классе геометрические преобразования даны на оперативном уровне, где учащиеся фактически отображают геометрические фигуры в том или другом виде перемещений. В VI—VIII классах по мере надобности определяются те или иные виды перемещений, дается общее определение перемещения плоскости. И полное представление о каждом виде перемещения окончательно оформляется в течение всего курса. В подтверждение этой методики изложения смотрите, например, понятие поворота в действующих учебниках и учебных пособиях для V—VIII классов.

Предлагаемая вниманию читателя книга «Преобразования плоскости» является пособием по повышению научной и педагогической квалификации учителя математики средней школы и ставит своей целью углубленное изучение перемещения и подобия. Поэтому здесь принята другая структура изложения материала. Исходя из общего понятия множества и отображения выделены взаимно-однозначные отображения множества на множество. Исходные понятия заканчиваются определением преобразования множества и его группы.

Указывая применения отображений в различных разделах математики, выделяем те отображения, которые обычно называются геометрическими. Геометрическое преобразование определено для всей плоскости или пространства, а отдельные фигуры при этом отображаются друг на друга. Только после этого переходим к понятию перемещения и в качестве приложения даем определение конгруэнтности с установлением связи между перемещением и конгруэнтностью. Изложение конкретных видов перемещений проведено в последовательности: поворот, параллельный перенос, осевая и скользящая симметрии. Везде особое внимание уделено композициям перемещений, отдельным подгруппам и приложениям с набором задач. В этом же плане изложены гомотетия и преобразование подобия. В изложении всего материала использованы общематематические понятия из элементарной теории множеств и логические символы из математической логики.

В основу изложения поставлена система аксиом, предложенная академиком А. Н. Колмогоровым для школьного курса геометрии. Система обозначений полностью соответствует принятой в новых учебниках школьной геометрии.

Данное пособие сложилось из цикла лекций, прочитанных автором в течение ряда лет в институтах усовершенствования учителей, пединститутах и университетах Самарканда и Ташкента. Поэтому содержание книги может служить и руководством для студентов.

Считаю своим долгом выразить благодарность рецензенту — доктору физико-математических наук, профессору З. А. Скопецу. Я также признателен рецензентам — кандидату физико-математических наук И. Г. Лушицкой, кандидату педагогических наук В. А. Гусеву и методисту Ф. М. Барчуновой за ряд полезных замечаний и советов.

Л. Хахамов

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Отображение

Пусть $A = \{X\}$ и $B = \{Y\}$ — два непустых множества, где X и Y их произвольные элементы.

Определение. **Если между элементами множеств A и B установлено отношение F, при котором каждому элементу $X \in A$ соответствует не более одного элемента $Y \in B$, то такое отношение называется функцией.**

В этом определении «...соответствует не более одного...» означает: «один» или «ни одного». Во втором случае не все элементы множества A будут иметь соответствующие элементы в множестве B.

Множество $A_1 \subset A$, все элементы которого имеют соответствующие элементы в множестве B, называется областью определения функции. Если множество $A_1 = A$, то функция называется всюду определенной.

Определение. **Всюду определенная функция называется также отображением множества A в множество B.**

Для задания отображения множества A в множество B необходимо указать:

1) множество A, элементы которого отображаются. Это множество обычно называют множеством отправления или областью определения отображения, а его элементы — прообразами;

2) множество B, в которое производится отображение. Это множество часто называют множеством прибытия. Именно из этого множества берутся элементы $Y \in B$, соответствующие элементам $X \in A$. Те элементы $Y \in B$, которые соответствуют элементам $X \in A$, называются образами. Образы всех элементов множества A обозначают $F(A)$ и называют областью значений отображения. Заметим, что, вообще говоря, $F(A) \subset B$ и только, в частности, $F(A) = B$;

3) наконец, соответствие (закон, правило) F, по которому элементу множества A ставится в соответствие элемент множества B.

Для отображения применяют различные записи: $F : A \to B$ или подробнее: $F : X \in A \to Y \in B$, а для элементов множеств: $F : X \to Y$ или $Y = F(X)$. Записывают и так: $X \in A \xrightarrow{F} Y \in B$.

Множество отправления (область определения) A и множество значений $F(A) \subset B$, участвующие в отображении, могут быть конечными и бесконечными.

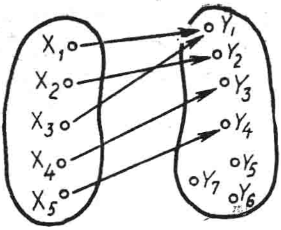


Рис. 1

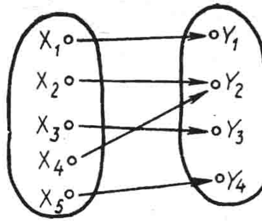


Рис. 2

Проиллюстрируем отображение на примере конечных множеств.

Пусть задано множество $A = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ и множество $B = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7,\}$, а отображение условно обозначим стрелкой.

На рис. 1 установлено соответствие: $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $X_3 \to \to Y_1$, $X_4 \to Y_3$, $X_5 \to Y_4$.

Здесь каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B. То, что двум элементам $X_1 \in A$ и $X_3 \in A$ поставлен в соответствие один и тот же элемент $Y_1 \in B$, не противоречит понятию отображения, ибо элементу $X_1 \in A$ соответствует только один элемент $Y_1 \in B$ и элементу $X_3 \in A$ также соответствует только один элемент $Y_1 \in B$. В этом примере элементы Y_5, Y_6 и Y_7 не являются образами элементов из множества A, и это не противоречит понятию отображения и только указывает на факт строгого включения $F(A) \subset B$. В этом случае имеем отображение множества A в множество B.

Отображения подразделяются на три вида:

1. Пусть $A = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, а $B = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ и соответствие указано стрелками (рис. 2): $X_1 \to Y_1$, $X_2 \to Y_2$, $X_3 \to Y_3$, $X_4 \to Y_2$, $X_5 \to Y_4$. Здесь, как видно, все элементы множества B являются образами элементов множества A, т. е. $F(A) = B$. В этом случае говорят: множество A отображено **на** множество B. Такое отображение иногда называют сюръективным (сюръекцией).

2. Очень важен такой вид отображения, когда каждый элемент из множества $F(A)$ является образом только одного элемента $X \in A$, причем безразлично $F(A) \subset B$ или $F(A) = B$ (рис. 3 и 4). Такие отображения называются взаимно-однозначными или инъективными отображениями (инъекцией).

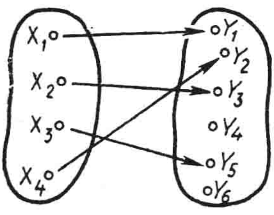


Рис. 3

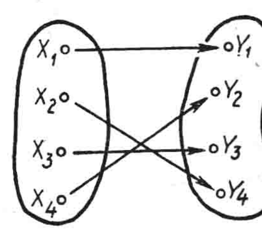


Рис. 4

3. Если же взаимно-однозначное отображение множества A произведено на множество B, т. е. $F(A)=B$ (рис. 4), то говорят о взаимно-однозначном отображении множества A на множество B. Другими словами, это последнее отображение и сюръективно и инъективно. Такое отображение принято называть биективным отображением (биекцией).

В рассмотренных выше отображениях фигурировали два множества: A — множество отправления (область определения) и B — множество прибытия отображения. Очень часто эти множества совпадают, и отображение множества производится **в** или **на** это же множество, которое называется областью действия отображения.

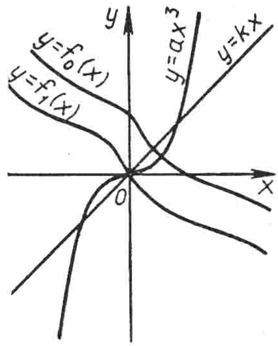


Рис. 5

Если каждому элементу $X \in A$ поставлен в соответствие элемент $X_1 \in A$, причем $F(A) \subset A$, то имеем отображение множества A в себя. Если же каждому элементу $X \in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $X_1 \in A$ и $F(A)=A$, имеем взаимно-однозначное отображение множества A на себя.

О п р е д е л е н и е. **Взаимно-однозначное отображение множества на себя называется преобразованием множества.**

Примерами взаимно-однозначных отображений множества на себя могут служить функции $y=x^{2k-1}$ $(k \in \boldsymbol{N})$ или любая строго монотонная функция $y=f(x)$, определенная на $\boldsymbol{R}$ и имеющая множество значений тоже $\boldsymbol{R}$. В этих функциях множество действительных чисел отображается на себя: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ (рис. 5).

Говоря об отображении одного множества в другое или на другое множество, а также о преобразовании множества, мы в общих рассуждениях не уточняли природу элементов рассматриваемых множеств. В современной математике часто рассматриваются отображения элементов множеств различной природы — действительных чисел, векторов, комплексных чисел, прямых, окружностей, точек и т. д. При этом не обязательно, чтобы множество отправления A и множество прибытия B были элементами одной и той же природы.

Рассмотрим примеры отображений:

1. В математическом анализе действительного переменного обычно рассматривают отображение некоторого множества $X \subseteq \boldsymbol{R}$* на множество $Y \subseteq \boldsymbol{R}$. Здесь это отображение принято называть функцией. В матанализе отображение — функция также обозначают

---

* Запись $X \subseteq R$ означает: множество X включается в множество R (является подмножеством множества R) или равно множеству R. Иногда так же говорят о «нестрогом включении», в отличие от знака $\subset$ строгого включения. Сравните также со знаками $\leqslant$ (меньше или равно) и $<$ (меньше, строго меньше).

буквой, например f, и пишут $y = f(x)$ с указанием X — области определения из $\boldsymbol{R}$ и Y — множества ее значений также из $\boldsymbol{R}$.

2. В векторном исчислении очень часто множеством отправления является система k-векторов из некоторой области определения, а множеством значений — действительные числа. Так, в частности, можно истолковать скалярный квадрат вектора.

3. При первоначальном изучении тригонометрических функций за множество значений аргумента (область определения функции) берут углы или дуги (функция угла или дуги), а множество значения функции — множество действительных чисел (для тангенса и котангенса) или некоторые подмножества действительных чисел (для других тригонометрических функций).

2. Понятие группы

Напомним одно из основных понятий современной алгебры — понятие группы.

Пусть $G = \{a, b, c, d, \ldots\}$ — некоторое множество, безразлично, конечное или бесконечное. Бинарной операцией в множестве G называется сопоставление двум произвольным элементам a, b множества G некоторого третьего элемента c этого же множества. Бинарную операцию элементов a и b иначе называют композицией элементов a и b. Бинарная операция, или композиция, обозначается $\circ$ (кружочком) или $*$ (звездочкой), поставленной между элементами: $a \circ b$ или $a * b$, а сопоставление этой композиции элементу c этого множества есть не что иное, как принадлежность композиции $a \circ b$ тому же множеству. Поэтому между $a \circ b$ и элементом c ставят знак равенства и записывают $a \circ b = c$ или $a * b = c$.

Если бинарным операциям $a \circ b$ и $b \circ a$ ставят в соответствие один и тот же элемент c из G, т. е. $a \circ b = c$ и $b \circ a = c$, то $a \circ b = b \circ a$ и операцию называют коммутативной. Если же $a \circ b \neq b \circ a$, то операцию называют некоммутативной.

С другой стороны, $a \circ b = c$ как элемент того же множества G может участвовать в дальнейших операциях, и появляются выражения вида: $(a \circ b) \circ c$, $(a \circ b) \circ (c \circ d)$, $a \circ (b \circ c)$, ... все эти выражения также являются элементами данного множества G.

Если последовательные операции над тремя элементами удовлетворяют равенству $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, то операция называется ассоциативной.

Определение. **Множество $G = \{a, b, c, \ldots\}$ относительно заданной операции называется группой, если элементы множества G и операция удовлетворяют следующим свойствам — аксиомам.**

Аксиома 1 (существования и единственности операции):

$$\forall a, b\, \exists!\, c \mid c = a \circ b^*.$$

---

* Знак $\exists!$ означает: «существует ровно один». Мы здесь приняли более сильные аксиомы 3 и 4, включающие и единственность. В подробных курсах алгебры единственность доказывается, а аксиоматизируется только существование.

А к с и о м а 2 (ассоциативности операции для трех элементов):

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

А к с и о м а 3 (существования и единственности нейтрального элемента):

$$\exists!\ e \in G |\ e \circ a = a \circ e = a.$$

А к с и о м а 4 (существования и единственности симметричного элемента a' для любого элемента a множества):

$$\exists!\ a' | a' \circ a = a \circ a' = e.$$

Группа называется коммутативной или абелевой, если дополнительно к аксиомам 1, 2, 3 и 4 выполняется аксиома 5.

А к с и о м а 5 (коммутативности операции):

$$a \circ b = b \circ a^*.$$

Групповую операцию очень часто называют умножением, а записи $a \circ b$ или $a * b$ называют произведением элементов и пишут просто ab; нейтральный элемент в этих случаях называют единичным и обозначают просто знаком 1, а симметричный элемент называют обратным и для каждого элемента a обозначают a^{-1}. Такая терминология и символика называется мультипликативной. Употребительна и так называемая аддитивная символика и терминология: операция — сложение, $a + b$ — сумма элементов. Нейтральный элемент — нулевой элемент 0, а противоположный элемент для элемента a обозначается $-a$.

Подгруппой группы G называется такое подмножество множества G, которое также образует группу относительно операции, введенной в группе G.

Группа G называется конечной, если множество G конечно.

Рассмотрим некоторые примеры групп на материале школьного курса математики:

1. Множество $\boldsymbol{Z}_2$ — всех четных чисел (положительных, отрицательных и нуля) относительно операции сложения этих чисел образует коммутативную группу. Проверьте.

2. Множество $\boldsymbol{Q}^+$ всех положительных рациональных чисел образует группу относительно операции умножения этих чисел. Проверьте справедливость этого высказывания; укажите нейтральный и обратный элементы этой группы. Коммутативна ли эта группа?

3. Множество V векторов плоскости или пространства образует группу относительно операции сложения векторов. Проверьте.

4. Образуют ли группу нижеперечисленные множества:

---

* Иногда определение группы проводят последовательно: а) группоид — множество с однозначной бинарной операцией (только аксиома 1); б) полугруппа — группоид с ассоциативным свойством операции (аксиомы 1, 2); в) группа — полугруппа с нейтральным элементом и симметричными элементами для каждого элемента (аксиомы 1, 2, 3, 4); г) коммутативная группа — группа с коммутативностью операции (аксиомы 1, 2, 3, 4, 5).

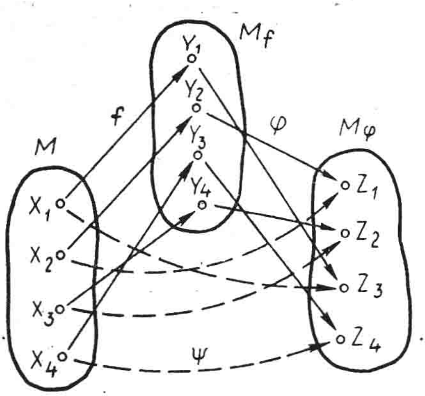


Рис. 6

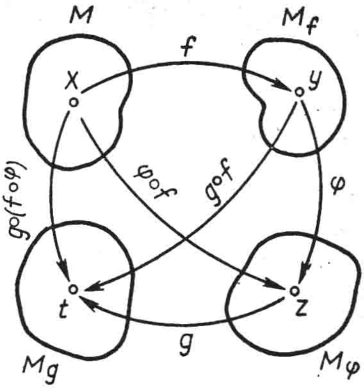


Рис. 7

а) $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел относительно их сложения;
б) $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел относительно их умножения;
в) $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел относительно их сложения;
г) M — множество многочленов относительно их сложения, относительно их умножения (укажите нейтральный и симметричный элементы тех множеств, которые образуют группу);
д) $\boldsymbol{Q}^{+-}$ — множество отличных от нуля (только положительных и отрицательных) рациональных чисел относительно их умножения?

3. Группа преобразований

В математике, в частности в геометрии, рассматриваются преобразования одного и того же множества. Пусть $f, \varphi, \psi, g, \dots$ — различные преобразования одного и того же множества, и $f: M \to M_f$, $\varphi: M_f \to M_\varphi$, $\psi: M \to M_f$, $g: M_\varphi \to M_g$, ..., где M_f, M_φ, M_ψ, M_g, ... то же самое множество M после некоторого преобразования. Множество $\boldsymbol{P} = \{f, \varphi, \psi, g, \dots\}$ называется множеством преобразований множества M.

Определение. **Пусть даны два преобразования из $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_f$ и $\varphi: \boldsymbol{M}_f \to \boldsymbol{M}_\varphi$. Преобразование $\psi: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_\varphi$ называется композицией преобразования $\boldsymbol{f}$ и φ.**

Композиция преобразований f и φ обозначается $\varphi \circ f$ (справа обозначение отображения, которое производится первым). На рис. 6 M, M_f, M_φ надо считать изображениями одного и того же множества M, а преобразования f, φ, ψ обозначены стрелками.

Теорема. ***Последовательная композиция трех преобразований множества ассоциативна.***

Короче: если даны $f: M \to M_f$; $\varphi: M_f \to M_\varphi$ и $g: M_\varphi \to M_g$, то $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$ (рис. 7).

В самом деле, для любого элемента $x \in M$ и соответствующих в преобразованиях элементов $y \in M_f$, $z \in M_\varphi$ и $t \in M_g$ по определению композиции имеем:

а) с одной стороны, $f : M \to M_f$ $(x \to y)$ и $\varphi : M_f \to M_\varphi$ $(y \to z)$ дают $(\varphi \circ f) : M \to M_\varphi$ $(x \to z)$, что в композиции с g:

$$M_\varphi \to M_g \ (z \to t) \text{ дает } (g \circ (\varphi \circ f)) : M \to M_g \ (x \to t);$$

б) с другой стороны, композиция $\varphi : M_f \to M_\varphi$ $(y \to z)$ и $g : M_\varphi : M_g$ $(z \to t)$ дает $(g \circ \varphi)$: $M_f \to M_g$ $(y \to t)$, а композиция $f : M \to M_f$ $(x \to y)$ с полученной композицией дает отображение $((g \circ \varphi) \circ f) : M \to M_g$ $(x \to t)$. Теорема доказана полностью.

Определение. **Множество $P = \{f, \varphi, \psi, g, \ldots\}$, элементами которого являются преобразования множества M, называется группой преобразований множества M, если на этом множестве выполняются следующие условия:**

1. Композиция двух преобразований из P содержится в P:

$$\forall (f \in P, \varphi \in P) \exists! (\psi \in P) (\psi = \varphi \circ f).$$

2. В множестве P существует единственный нейтральный элемент:

$$\exists! (e \in P) \ \forall (f \in P) (e \circ f = f \circ e = f).$$

3. Для каждого элемента f из P в P существует элемент f^{-1}, называемый обратным элементом:

$$\forall (f \in P) \ \exists ! (f^{-1} \in P) (f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e).$$

В определении группы преобразования множества, как видно, сформулированы только три требования, а в общем определении группы их было 4. Объясняется это тем, что композиция трех преобразований, как доказано выше, всегда ассоциативна.

Теорема. ***Множество всех преобразований P множества M образует группу преобразований.***

Доказательство. Проверим выполнение требований, приведенных в определении группы преобразований. Рассуждение проведем в тех же обозначениях.

1. По определению композиции преобразований из $f : M \to M_f$ и $\varphi : M_f \to M_\varphi$ получим: $(\varphi \circ f) : M \to M_\varphi$, но это преобразование ψ, следовательно, $\varphi \circ f = \psi, \psi \in P$ (рис. 6).

2. Для любого $X \in M$ преобразование $X \in M \to X \in M$ будем называть тождественным и обозначать e. Так как e — преобразование, то $e \in P$ и $e \circ f = f \circ e = f$.

3. Преобразование множества является взаимно-однозначным отображением множества на себя, поэтому для каждого f существует обратное преобразование, «возвращающее» элемент в «первоначальное положение».

Обозначая обратное преобразование f^{-1}, имеем:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e.$$

Если композиция преобразований коммутативна $\varphi \circ f = f \circ \varphi$, то группа преобразований называется коммутативной.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4. Геометрические отображения

В геометрии рассматриваются отображения точечных множеств, т. е. отображение одной фигуры **в** другую фигуру или **на** другую фигуру и, в частности, **в** или **на** себя.

О п р е д е л е н и е. **Если каждой точке A фигуры Φ соответствует точка A_1 фигуры Φ_1, то такое отношение называется отображением фигуры Φ в фигуру Φ_1. При этом точку A_1 называют образом точки A, а саму точку A — прообразом точки A_1.**

Рассмотрим примеры:

1. В качестве множества отправления, т. е. фигуры Φ, берем плоскость, обозначаем ее α. В качестве множества прибытия фигуры Φ_1 — некоторую прямую этой плоскости, обозначим ее a. Зададим отображение $\varphi : M \in \alpha \to M_1 \in a$ отношением $(MM_1) \perp a$ (рис. 8). В этом геометрическом отображении вся плоскость отобразится на прямую a. При этом если прямая $l_1 \perp a$, то ее образ $\varphi\ (l_1) = M_1$ — только одна точка прямой a; если l_2 — не перпендикулярна прямой a, то ее образ $\varphi\ (l_2) = a$ совпадает со всей прямой a; точно так же совпадает с прямой a и образ некоторой кривой, например синусоиды S, изображенной на рис. 8; образами окружности (круга) или треугольника являются соответственно отрезки P_1Q_1 и A_1C_1. Очевидно, в общем случае рассматриваемое геометрическое отображение не взаимно-однозначно: при $l \perp a$ бесконечному множеству точек прямой l ставится в соответствие одна точка прямой a. Это отображение сюръективно и называется ортогональной проекцией плоскости α на прямую a и иногда применяется как один из методов изображения.

2. Рассмотрим сферу S радиуса R как множество отправления и боковую поверхность L прямого кругового цилиндра радиуса основания R и высоты $2R$, касающуюся этой сферы (рис. 9), как множество прибытия. При таком расположении сферы и цилиндра, очевидно, ось цилиндра совпадает с одним из диаметров сферы. Зададим отображение P множества S в множество L. Для этого проводим сечения сферы и цилиндра параллельными плоскостями,

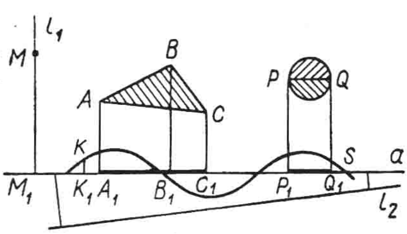


Рис. 8

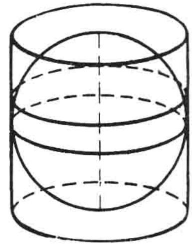


Рис. 9

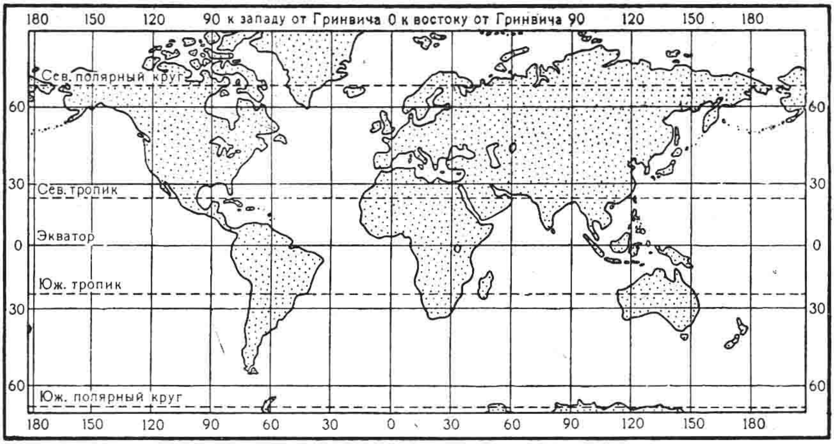


Рис. 10

перпендикулярными оси цилиндра. Тогда поверхность сферы (кроме двух полюсов) полностью и однозначно отобразится на поверхность цилиндра. Рассмотренное отображение с некоторыми изменениями часто применяется в картографии под названием цилиндрической проекции (рис. 10)*.

3. В стереометрии для изображения фигур на плоскости чертежа очень часто пользуются отображением, называемым параллельной проекцией. Первоначальные сведения о параллельной проекции фигуры изложены в «Геометрии-9—10»**. Там же даны правила параллельного проектирования и рассмотрены задачи.

5. Преобразования плоскости

Определение. **Взаимно-однозначное отображение фигуры (точечного множества) на себя называется геометрическим преобразованием фигуры.**

Для примера рассмотрим фигуру — квадрат $ABCD$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, а $[MN]$ — средняя линия противоположных сторон AB и CD (сделайте чертеж). Квадрат можно

---

* Карты вообще составляются по тем или иным правилам отображения поверхности Земли на какую-нибудь плоскость. Выбирая различные расположения этой плоскости относительно поверхности Земли (глобуса), получают различные отображения, называемые проекциями. Существуют различные проекции, и каждая из них более или менее точно изображает ту или иную часть земной поверхности. Подробности можно найти в учебниках по картографии.

**Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия-9—10. М., Просвещение, 1977, § 12, 13 и задачи к ним на с. 26—35.

различными способами отобразить на себя. Примерами этих отображений являются:

$$g_1 : A \to B,\ B \to C,\ C \to D,\ D \to A,\ O \to O;$$
$$g_2 : A \to B,\ B \to A,\ C \to D,\ D \to C,\ [MN] \to [MN].$$

Таким образом, g_1 и g_2 — геометрические преобразования квадрата $ABCD$. Обычно слово «геометрическое» опускают и говорят просто о преобразовании фигуры (квадрата). В рассмотренных преобразованиях квадрата областью действия преобразования является квадрат.

Однако в геометрии очень часто в качестве области действия геометрического преобразования берут плоскость (в планиметрии) и пространство (в стереометрии) и говорят о преобразовании плоскости или преобразовании пространства. В преобразовании g плоскости отображение точек и фигур записывают, как обычно: $g(A) = A_1, \ldots, g(\Phi) = \Phi_1$ или соответственно $g : A \to A_1, \ldots$ $\ldots, \Phi \to \Phi_1$ и т. д.

Приведем примеры преобразования плоскости. Пусть плоскость α — область действия преобразования. Пусть далее a — некоторая прямая этой плоскости. Каждой точке $A \in \alpha$ поставим в соответствие точку $A_1 \in \alpha$ так, чтобы выполнились следующие условия: 1) точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой a; 2) $(AA_1) \perp a$; 3) $|OA| : |OA_1| = k$, где $O = (AA_1) \cap a$ и k — фиксированное положительное число. В частности, если $A \in a$, то будем считать $A_1 = A$.

Рассмотренное преобразование называется сжатием к прямой. При этом прямую называют осью сжатия. На рис. 11, *а* коэффициент сжатия $k = 0{,}5 < 1$. При $k > 1$ уместно было бы преобразование назвать растяжением.

Если коэффициент k считать произвольным действительным числом, исключая $k = 0$, то этот общий случай включает и сжатие и растяжение. При $k < 0$ точки A и A_1 лежат по разные стороны от прямой a. Так, например, любая фигура плоскости, расположенная в одной полуплоскости, отобразится в сжатую и «перевернуто» расположенную фигуру на другой полуплоскости (рис. 11, *б*) при $-1 < k < 0$.

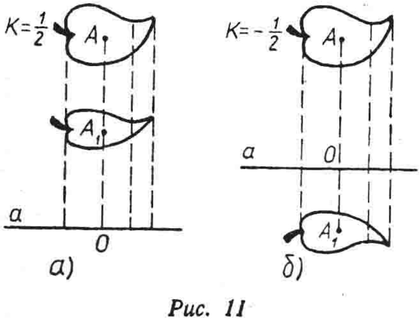


Рис. 11

Рассмотрим некоторые свойства преобразования плоскости.

Т е о р е м а. ***При преобразовании плоскости сохраняются пересечение и объединение фигур.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай пересечения фигур $F \cap \Phi$. Пусть при преобразовании $g : F \to F_1,\ \Phi \to \Phi_1$,