

数 学 分 析

上 册

复旦大学数学系 主編

陈傳璋 金福临 胡家贛 朱学炎 欧阳光中 編

上海科学技术出版社

数 学 分 析 (上册)

复旦大学数学系主编

陈传璋 金福临 胡家赣 朱学炎 欧阳光中 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.375 字数 245,000

1962年12月第2版 1979年7月第6次印刷

书号: 13119·355 定价: 1.15元

序

本书是在复旦大学数学系 1960 年編著的“数学分析(一)”試用本的基础上重新編写的。其目的是作为綜合大学数学系数学分析基础課的教材或参考书。在这次改編工作中,根据基础課的教学要求及原书在复旦大学数学系試教的实际情况,并吸取了各方面意見,基本上仍旧保持原书所采用的系統結構,进一步注意到加强基础理論、基础知識和基本訓練,从而对內容作了比較多的补充,也作了适当的改动。此外,并附录适量的习题。

本书分上下两册計四篇。上册:第一篇极限論,包括变量与函数、数列极限、函数极限、函数連續性等;第二篇微分学,包括一元函数微分学及其应用、多元函数微分学及其应用。下册:第三篇积分学,包括不定积分和定积分及其应用、各种积分的概念及計算和它們之間的联系、場論;第四篇无穷級数和广义积分,包括无穷級数、广义积分、富里埃級数等。

我們对很多兄弟学校及有关單位同志們曾对本书試用本提出不少宝贵意見和积极建議,并对曹志浩、張乃玲、陈开明、秦曾复、廖有为等同志对本书編写工作所进行的协助,以及上海科学技术出版社对本书出版工作所給予的支持,表示衷心感謝。

由于我們水平有限,編写時間也比較匆促,一定还存在不少缺点,我們除了进一步通过教学实践来修改,充实,提高外,殷切期望同志們、讀者們随时給予批評指教。

目 录

(上 册)

序

緒論..... 1

第一篇 极 限 論

第一章 变量与函数..... 9

 习题..... 28

第二章 极限..... 33

 §1 极限的概念..... 33

 §2 数列极限的性质和运算..... 48

 §3 关于数列的几个基本定理..... 60

 §4 函数极限..... 76

 §5 連續函数..... 96

 §6 閉区間連續函数的性质..... 108

 §7 多元(二元)函数的极限与連續..... 119

 §8 无穷小量、无穷大量的阶的比較..... 130

 习题..... 132

附录 实数的理論..... 146

第二篇 微 分 学

第一章 导数与微分..... 160

 §1 导数的引进与定义..... 160

 §2 简单函数的导数..... 164

 §3 求导法則..... 166

§ 4 不可导的函数举例	175
§ 5 微分	178
§ 6 高阶导数与高阶微分	182
习题	188
第二章 微分学的基本定理	196
§ 1 中值定理	196
§ 2 洛必达法则	202
§ 3 泰勒公式	210
习题	214
第三章 导数的应用, 函数作图	218
§ 1 函数的上升、下降与极值	218
§ 2. 一元函数作图法	228
习题	242
第四章 多元函数的微分学	245
§ 1 偏导数与全微分	245
§ 2 二元函数的泰勒公式	263
§ 3 二元函数的极值	265
习题	271
第五章 隐函数存在定理, 函数相关	276
习题	297
第六章 限制极值(条件极值)	302
习题	311
第七章 微分学在几何上的一些应用	313
§ 1 平面曲线的切线和法线	313
§ 2 平面曲线的弧长微分、曲率和曲率半径	314
§ 3 空间曲线的切线和法平面	317
§ 4 曲面的切平面与法线	320
习题	323

目 录

(下 册)

第三篇 积 分 学

第一章 不定积分	326
§ 1 不定积分与它的简单计算方法	326
§ 2 不定积分的计算	330
习题	353
第二章 定积分概念	358
§ 1 定积分问题的提出及定积分的定义	358
§ 2 积分存在的充分必要条件	362
§ 3 可积函数类	370
§ 4 可积函数的性质	373
§ 5 定积分的计算	378
§ 6 椭圆积分	388
习题	392
第三章 定积分的应用和定积分的近似计算	396
§ 1 曲线的弧长	396
§ 2 平面图形的面积	404
§ 3 体积	411
§ 4 旋转体的侧面积	415
§ 5 重心	418
§ 6 定积分的近似计算	422
习题	427
第四章 含参变量的积分	431
习题	437

第五章 各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分)的定义及性质	439
§1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念	439
§2 积分存在的充要条件	444
§3 各种积分的性质	447
习题	449
第六章 各种积分的计算及应用	451
§1 二重积分的计算	451
§2 三重积分的计算	475
§3 第一类曲线积分的计算	490
§4 第一类曲面积分的计算	493
§5 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分在物理上的应用	500
§6 第二类曲线积分及第二类曲面积分	507
习题	538
第七章 各种积分间的联系和场论	545
§1 格林公式	545
§2 奥斯特洛格拉德斯基公式	549
§3 斯托克司公式	553
§4 曲线积分和道路的无关性	557
§5 场论	564
习题	578

第四篇 无穷级数和广义积分

第一章 数项级数	584
§1 预备知识 上限和下限	584
§2 级数的收敛性及其基本性质	588
§3 正项级数	594
§4 任意项级数的收敛判别法	602

§ 5 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质	611
§ 6 无穷乘积	619
习题	625
第二章 函数项级数	629
§ 1 函数序列和函数项级数的收敛和一致收敛	629
§ 2 一致收敛级数的性质	638
§ 3 一致收敛级数的判别法	643
习题	649
第三章 幂级数	652
§ 1 幂级数的收敛半径和它的性质	652
§ 2 函数的幂级数展开式	657
§ 3 幂级数在近似计算中的应用	664
习题	666
第四章 广义积分	669
§ 1 无穷限的积分	669
§ 2 无穷限积分的收敛性判别法	675
§ 3 无界函数的积分	681
§ 4 广义重积分	687
习题	692
第五章 含参变量的广义积分	696
§ 1 含参变量广义积分的一致收敛性	696
§ 2 一致收敛积分的性质	701
§ 3 例题	707
§ 4 欧拉积分[Beta 函数 $B(p, q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(s)$]	711
习题	718
第六章 富里埃级数	721
§ 1 三角级数和富里埃级数	721
§ 2 一般正交函数系	727
§ 3 狄利克来积分和黎曼引理	733
§ 4 富里埃级数的收敛性定理(狄尼判别法及其推论)	739

§ 5 狄利克来引理、狄利克来-約当判别法	742
§ 6 函数 $f(x)$ 的富里埃級数展开	746
§ 7 富里埃級数的逐项积分与逐项微分	753
§ 8 平方平均迫近	757
§ 9 算术平均求和概念与費埃尔定理	761
§ 10 三角函数系的封閉性	767
§ 11 富里埃积分	769
习题	780

第五章 各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分)的定义及性质

§1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念

我们先来考虑一个富有启发性的问题，它说明了我們应当研究什么形式的和式的极限。我们的问题是求一个不均匀物体的质量，设该物体的密度函数 $f(M)$ 是点 M 的连续函数。由于被考虑的物体的几何形状不同，我们分下面五种情形分别讨论之。

1. 这个物体为一根直线段(细线)，也就是质量分布在一根直线段 AB 上。在本篇第二章定积分的概念和计算中，读者已经知道，要计算出直线段 AB 的质量，只要计算一个定积分就可以了，而这个定积分的被积函数为 $f(M)$ 。

2 质量分布在一个平面图形 (σ) 上，设这个图形是有确定的面积的，它的密度函数为 $f(M) = f(x, y)$ ，我们把图形 (σ) 划分成可求面积的 n 个小块 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ ，并把这些小块的面积仍记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ 。在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$ ，那么每一块 $\Delta\sigma_i$ 的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，因而图形 (σ) 的总质量也就近似地等于下面的和数

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

再令 d 为这 n 个小块 $\Delta\sigma_i$ 的最大直径， $d = \max_{i=1, 2, \dots, n} \{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}$

(所谓几何体 Ω^* 的直径是指：在 Ω^* 内任意两点间总有一个距离，

当这两点在 Ω^* 内变动时, 所得到的距离当然随着而有所变化, 这些距离中的上确界就称为几何体 Ω^* 的直径。例如平面上矩形的直径就是对角线的长度, 圆的直径就是它本身的直径等等), 很自然地, 我们会想到当 $d \rightarrow 0$ 时, 上面所给出的和数将会越来越精确地表示出图形 (σ) 的总质量, 也就是说这个总质量 m 应为

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i. \end{aligned}$$

注意, 这个和式的极限是和定积分中黎曼和的极限十分相象!

3. 质量分布在一块体积 (V) 上, 密度函数为 $f(M) = f(x, y, z)$, 我们把这块体积划分成 n 块小体积 $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, 并在每一块小体积上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 那么每一个小体积 ΔV_i 的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)。因此体积 (V) 的总质量将近似地等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

再令 d 表示 n 块体积 ΔV_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的直径中最大的一个(直径的意义同上), 于是就自然地会想到, 体积 (V) 的总质量应当是下面的和式的极限

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \end{aligned}$$

这又和定积分中黎曼和的极限多么相象!

4. 质量分布在一条可求长的空间曲线 (l) 上, 它的密度函数为 $f(M) = f(x, y, z)$. 这里点 $M(x, y, z)$ 为 (l) 上的点。我们将曲线 (l) 分为 n 段可求长的小弧段 $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, 并记它们的

弧长为 $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, 在每一段小弧段 Δs_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 于是这个小弧段的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$, 曲线 (l) 的总质量也将近似地等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

令 d 表示这 n 段小弧长 $\Delta s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 中最大的一个, 那么曲线的总质量 m 就应该是:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i. \end{aligned}$$

这里又遇见了相仿于定积分中黎曼和的极限!

5. 质量分布在一块曲面 (S) 上, 假设这块曲面有着确定的面积, 密度函数为 $f(M) = f(x, y, z)$, 这里点 $M(x, y, z)$ 为曲面 (S) 上的点. 把曲面 (S) 分为 n 个可求面积的小曲面块 $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$, 并记它们的面积仍为 $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$. 令 d 表示其中最大的一个直径, 在每块上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 于是按照同样的理由, 曲面 (S) 的总质量就是:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i. \end{aligned}$$

仍旧类似于定积分中黎曼和的极限!

在以上的問題中, 我們看到, 虽然各自具体的对象不同, 但归根到底总是要处理同一型式的和的极限. 在物理、力学、工程技术上不仅提出了求质量的問題, 还提出了大量类似的問題, 或者说提出了要求我們处理相仿于定积分中黎曼和的极限問題. 这里我們可以概括地給出下面的定义.

几何形体 Ω 上黎曼积分的定义: 設 Ω 为一几何形体(它或者

是直线段,或者是曲线段,或者是一块平面图形、一块曲面、一块空间区域等等),这个几何形体是可以度量的(也就是说它是可以求长的,或者是可以求面积的,可以求体积的等等),在这个几何形体 Ω 上定义了一个函数 $f(M)$, $M \in \Omega$. 将此几何形体 Ω 分为若干可以度量的小块 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$, 既然每一小块皆可度量,故它们皆有度量大小可言,把它们度量大小仍记为 $\Delta\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). 并令

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\Omega_i \text{ 的直径}\},$$

在每一块 $\Delta\Omega_i$ 中任意取一点 M_i , 作下列和式(也称为黎曼和数,或积分和数):

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i.$$

如果这个和式不论对于 Ω 的怎样分划以及 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何取法,只要当 $d \rightarrow 0$ 时恒有同一极限 I , 则称此极限为 $f(M)$ 在几何形体 Ω 上的黎曼积分,记为:

$$I = \int_{\Omega} f(M) d\Omega,$$

也就是

$$I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i.$$

这个极限是与分法及 M_i 取法无关的。

上面所给出的定义用“ $\varepsilon - \delta$ ”表示如下:

如果对任意 $\varepsilon > 0$ 及一定数 I , 总存在一个数 $\delta > 0$, 对于任意的分法,只要 $d < \delta$ 时,不管点 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何选取,恒有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i - I \right| < \varepsilon,$$

则称 I 为 $f(M)$ 在 Ω 上的黎曼积分,记为:

$$I = \int_{\Omega} f(M) d\Omega.$$

现在我们将根据几何形体 Ω 的不同形态,进一步给出 Ω 上积分的

具体表示式及名称。

1. 如果几何形体 Ω 是一块可求面积的平面图形 (σ) , 那么 (σ) 上的积分就称为二重积分, 在直角坐标下记为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

这里“可求面积”这一术语的正确理解应该是这样的: 设 (σ) 是平面上的一块图形, 用平行于坐标轴的一组直线网划分这个图形(图

3-5-1), 这一组正交直线网将平面划分成许多小矩形, 这些小矩形可分为三类: (i) 小矩形上的点全是区域 (σ) 的内点, 也就是说, 这类小矩形全部被含在区域 (σ) 内, 如图中带有阴影的小矩形。(ii) 小矩形的点全是区域 (σ) 的外点, 也就是说, 这类小矩形

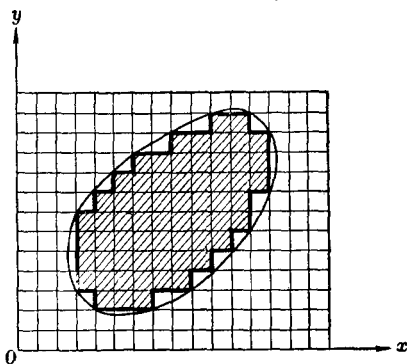


图 3-5-1

全部在区域 (σ) 的外面。(iii) 小矩形上含有区域 (σ) 的境界点, 也就是说, 这类小矩形恰恰位于区域 (σ) 的境界上。

我们将所有属于第(i)类的小矩形的面积相加起来, 记这个和数为 s (即图中阴影部分的面积), 将所有属于第(i)类和第(iii)类的小矩形的面积相加起来, 记这个和数为 S 。这两个和数 s 和 S 皆与正交直线网的分划有关。对于不同的分划, 一般所获得的 s (或 S) 也将不同。对每一个小矩形, 容易知道它的直径就是它的对角线长度, 并记 d 为这若干个小矩形的直径中最大的一个。如果当 $d \rightarrow 0$ 时, 相应地有 $(S-s) \rightarrow 0$, 我们就称这块平面图形 (σ) 是可以求面积的。

事实上讀者在本篇第二章中已經遇到过“可求面积”这一概念,在那里我們曾經讲述了定积分存在的充要条件,并給充要条件作了几何解釋——叙述了曲边梯形可求面积的概念。这里不过把曲边梯形拓广为一般的平面图形,而所依据的思想及原理却是相同的。

这样一来就不难了解,如果平面区域的境界是一条封閉連續曲綫的話,那么这块区域总是可求面积的。

2. 如果几何形体 Ω 是一块可以求体积的空間几何体 (V), 那么 (V) 上的积分就称为三重积分, 在直角坐标下記为

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz.$$

3. 如果几何形体 Ω 是一可求长的空間曲綫段 (l), 那么 (l) 上的积分就称为第一类曲綫积分, 記为

$$\int_{(l)} f(x, y, z) ds.$$

4. 如果几何形体 Ω 是一可求面积的曲面片 (S), 那么 (S) 上的积分就称为第一类曲面积分, 記为

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS.$$

在下面的一章中, 将专门讲述如何来计算这些积分。

特別地, 如果被积函数 $f(M) \equiv 1$, 由定义可以知道 $\int_{\Omega} d\Omega$ 就是几何形体 Ω 的度量, 亦即

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i = (\Omega \text{ 的度量}).$$

正如同定积分中 $\int_a^b dx = b - a$ 正是区間 $[a, b]$ 的长度一样。

§2 积分存在的充要条件

本节的叙述方法和結果, 都完全仿照本篇第二章定积分存在

的充要条件,因此在本节中,就不再作详细的论证,而只叙述如下:

设 Ω 为一个可以度量的几何形体, $f(M)$ 为定义在 Ω 上的一个有界函数。我们将 Ω 分划为 n 个可以度量的小块 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ 。记这些小块的程度大小仍为 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ 。并记 $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\Omega_i \text{ 的直径}\}$ 。由于 $f(M)$ 为 Ω 上的有界函数,所以 $f(M)$ 在每一小块 $\Delta\Omega_i$ 上存在上确界和下确界。分别记它们为 M_i 和 m_i ,也就是

$$M_i = \sup_{M \in \Delta\Omega_i} \{f(M)\}, \quad m_i = \inf_{M \in \Delta\Omega_i} \{f(M)\}.$$

分别作出下列两个和式

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\Omega_i,$$

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\Omega_i,$$

称 S 为达布大和数, s 为达布小和数。这两个和数显然是与 Ω 的分划有关的。

达布大(小)和数具有以下性质: 这些性质的证明与定积分中类似性质的证明没有任何实质上的不同。

1. 在同一种分划下,黎曼和数不小于达布小和数,不大于达布大和数,亦即:

$$s \leq \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i \leq S,$$

这里点 M_i 为 $\Delta\Omega_i$ 上任何一点,并且当 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上变动时,所获得一切黎曼和(在固定一种分划之下)的上确界和下确界恰好是 S 和 s 。

2. 对一种分划添上新分划后,相应所获得的大和数不会增大,小和数不会减小。而对于任何两种分划所得的大、小和数 S_1, s_1 和 S_2, s_2 皆有:

$$s_1 \leq S_2, \quad s_2 \leq S_1.$$

3. 小和数有上界,大和数有下界:

$$m(\Omega \text{ 的度量}) \leq s \leq S \leq M(\Omega \text{ 的度量}),$$

这里 M 和 m 为 $f(M)$ 在 Ω 上的上、下确界。所以 $\{S\}$ 存在下确界 L , $\{s\}$ 存在上确界 l 。

与定积分中达布定理相同,获得以下定理。

达布定理 当几何体 Ω 的分划无限增加,而使

$$d = \max_i \{\Delta\Omega_i \text{ 的直径}\} \rightarrow 0$$

时,大和数和小和数必存在极限,且其极限值分别为 L 和 l 。也就是说:

$$\lim_{d \rightarrow 0} S = L, \quad \lim_{d \rightarrow 0} s = l.$$

到此我們便可以给出 Ω 上积分存在的充要条件了。

1° 函数 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为:

$$L = l,$$

也可以用另一种语言来叙述这个充要条件,如果记 ω_i 为 $f(M)$ 在 $\Delta\Omega_i$ 上的振幅,亦即:

$$\begin{aligned} \omega_i &= M_i - m_i \\ &= \sup_{M \in \Delta_i} \{f(M)\} - \inf_{M \in \Delta_i} \{f(M)\}, \end{aligned}$$

那么 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta\Omega_i = 0,$$

事实上,这个条件是和 $L=l$ 等价的,因为:

$$\begin{aligned} L - l &= \lim_{d \rightarrow 0} (S - s) \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\Omega_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta\Omega_i. \end{aligned}$$

2° 函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积的充要条件为:对任意两个正数 ε 和 σ , 总存在正数 δ , 对于任何 $d < \delta$ 的分划 (这里 d 为 $\Delta\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的直径中最大的一个数), 那些 $\omega_i \geq \varepsilon$ 的小几何体 $\Delta\Omega_i$ 的