数 学 分 析

上 册

复旦大学数学系 主编

陈傳璋 金福临 胡家贛 朱学炎 欧阳光中 編

上海科学技术出版社

数学分析（上册）

复旦大学数学系主编

陈传璋　金福临　胡家赣　朱学炎　欧阳光中　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 10.375　字数 245,000

1962年12月第2版　1979年7月第6次印刷

书号：13119·355　　定价：1.15元

序

本书是在复旦大学数学系1960年編著的“数学分析(一)”試用本的基础上重新編写的。其目的是作为綜合大学数学系数学分析基础課的教材或参考书。在这次改編工作中，根据基础課的教学要求及原书在复旦大学数学系試教的实际情况，并吸取了各方面意見，基本上仍旧保持原书所采用的系統結构，进一步注意到加强基础理論、基础知識和基本訓练，从而对內容作了比較多的补充，也作了适当的改动。此外，并附入适量的习題。

本书分上下两册計四篇。上册：第一篇极限論，包括变量与函数、数列极限、函数极限、函数連續性等；第二篇微分学，包括一元函数微分学及其应用、多元函数微分学及其应用。下册：第三篇积分学，包括不定积分和定积分及其应用、各种积分的概念及計算和它們之間的联系、場論；第四篇无穷級数和广义积分，包括无穷級数、广义积分、富里埃級数等。

我們对很多兄弟学校及有关单位同志們曾对本书試用本提出不少宝貴意見和积极建議，并对曹志浩、張乃玲、陈开明、秦曾复、廖有为等同志对本书編写工作所进行的协助，以及上海科学技术出版社对本书出版工作所給予的支持，表示衷心感謝。

由于我們水平有限，編写时間也比較匆促，一定还存在不少缺点，我們除了进一步通过教学实踐来修改，充实，提高外，殷切期望同志們、讀者們随时給予批評指教。

編　者　1962年6月

目　录

(上　册)

目　录

（下　册）

第三篇　积　分　学

第四篇 无穷級数和广义积分

第五章　各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分) 的定义及性质

§1 二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分的概念

我們先来考虑一个富有启发性的問題，它說明了我們应当研究什么形式的和式的极限。我們的問題是求一个不均匀物体的质量，設該物体的密度函数 $f(M)$ 是点 M 的連續函数。由于被考虑的物体的几何形状不同，我們分下面五种情形分别討論之。

1. 这个物体为一根直綫段(細綫)，也就是质量分布在一根直綫段 AB 上。在本篇第二章定积分的概念和計算中，讀者已經知道，要計算出直綫段 AB 的质量，只要計算一个定积分就可以了，而这个定积分的被积函数为 $f(M)$。

2 质量分布在一个平面图形 (σ) 上，設这个图形是有确定的面积的，它的密度函数为 $f(M)=f(x, y)$，我們把图形 (σ) 划分成可求面积的 n 个小块 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2\cdots, \Delta\sigma_n$，并把这些小块的面积仍記为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$. 在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$，那么每一块 $\Delta\sigma_i$ 的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$，因而图形 (σ) 的总质量也就近似地等于下面的和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

再令 d 为这 n 个小块 $\Delta\sigma_i$ 的最大直径，$d=\max\limits_{i=1, 2, \cdots, n}\{\Delta\sigma_i$ 的直徑$\}$ (所謂几何体 Ω^* 的直徑是指：在 Ω^* 内任意两点間总有一个距离，

当这两点在 Ω^* 内变动时，所得到的距离当然随着而有所变化，这些距离中的上确界就称为几何体 Ω^* 的直徑。例如平面上矩形的直徑就是对角綫的长度，圓的直徑就是它本身的直徑等等），很自然地，我們会想到当 $d\to 0$ 时，上面所給出的和数将会越来越精确地表示出图形 (σ) 的总质量，也就是說这个总质量 m 应为

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

注意，这个和式的极限是和定积分中黎曼和的极限十分相象！

3. 质量分布在一块体积 (V) 上，密度函数为 $f(M)=f(x,y,z)$，我們把这块体积划分成 n 块小体积 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$，并在每一块小体积上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，那么每一个小体积 ΔV_i 的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。因此体积 (V) 的总质量将近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

再令 d 表示 n 块体积 ΔV_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的直徑中最大的一个（直徑的意义同上），于是就自然地会想到，体积 (V) 的总质量应当是下面的和式的极限

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta V_i$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

这又和定积分中黎曼和的极限多么相象！

4. 质量分布在一条可求长的空間曲綫 (l) 上，它的密度函数为 $f(M)=f(x,y,z)$。这里点 $M(x,y,z)$ 为 (l) 上的点。我們将曲綫 (l) 分为 n 段可求长的小弧段 $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$，并記它們的

弧长为 $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$，在每一段小弧段 Δs_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，于是这个小弧段的质量将近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\Delta s_i$，曲綫 (l) 的总质量也将近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i.$$

令 d 表示这 n 段小弧长 $\Delta s_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 中最大的一个，那么曲綫的总质量 m 就应該是：

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \\ &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i. \end{aligned}$$

这里又遇見了相仿于定积分中黎曼和的极限！

5. 质量分布在一块曲面 (S) 上，假設这块曲面有着确定的面积，密度函数为 $f(M)=f(x, y, z)$，这里点 $M(x, y, z)$ 为曲面 (S) 上的点。把曲面 (S) 分为 n 个可求面积的小曲面块 $\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$，并記它們的面积仍为 $\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$。令 d 表示其中最大的一个直徑，在每块上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，于是按照同样的理由，曲面 (S) 的总质量就是：

$$\begin{aligned} m &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \\ &= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i. \end{aligned}$$

仍旧类似于定积分中黎曼和的极限！

在以上的問題中，我們看到，虽然各自具体的对象不同，但归根到底总是要处理同一型式的和的极限。在物理、力学、工程技术上不仅提出了求质量的問題，还提出了大量类似的問題，或者說提出了要求我們处理相仿于定积分中黎曼和的极限問題。这里我們可以概括地給出下面的定义。

几何形体 Ω 上黎曼积分的定义： 設 Ω 为一几何形体（它或者

是直綫段，或者是曲綫段，或者是一块平面图形、一块曲面、一块空間区域等等），这个几何形体是可以度量的（也就是說它是可以求长的，或者是可以求面积的，可以求体积的等等），在这个几何形体 Ω 上定义了一个函数 $f(M)$，$M\in\Omega$．将此几何形体 Ω 分为若干可以度量的小块 $\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2$，$\cdots$，$\Delta\Omega_n$，既然每一小块皆可度量，故它們皆有度量大小可言，把它們的度量大小仍記为 $\Delta\Omega_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$．并令

$$d=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i \text{的直徑}\},$$

在每一块 $\Delta\Omega_i$ 中任意取一点 M_i，作下列和式（也称为黎曼和数，或积分和数）：

$$\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\,\Delta\Omega_i.$$

如果这个和式不論对于 Ω 的怎样分划以及 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何取法，只要当 $d\to 0$ 时恒有同一极限 I，則称此极限为 $f(M)$ 在几何形体 Ω 上的黎曼积分，記为：

$$I=\int_{\Omega}f(M)\,d\Omega,$$

也就是

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\,\Delta\Omega_i.$$

这个极限是与分法及 M_i 取法无关的。

上面所給出的定义用“$\varepsilon-\delta$”表示如下：

如果对任意 $\varepsilon>0$ 及一定数 I，总存在一个数 $\delta>0$，对于任意的分法，只要 $d<\delta$ 时，不管点 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上如何选取，恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\,\Delta\Omega_i-I\right|<\varepsilon,$$

則称 I 为 $f(M)$ 在 Ω 上的黎曼积分，記为：

$$I=\int_{\Omega}f(M)\,d\Omega.$$

現在我們将根据几何形体 Ω 的不同形态，进一步給出 Ω 上积分的

具体表示式及名称。

1. 如果几何形体 Ω 是一块可求面积的平面图形 (σ)，那么 (σ) 上的积分就称为二重积分，在直角坐标下記为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

这里“可求面积”这一术語的正确理解应該是这样的：設 (σ) 是平面上的一块图形，用平行于坐标軸的一組直线网划分这个图形(图 3-5-1)，这一組正交直綫网将平面划分成許多小矩形，这些小矩形可分为三类：(i) 小矩形上的点全是区域 (σ) 的內点，也就是說，这类小矩形全部被含在区域 (σ) 內，如图中带有阴影的小矩形。(ii) 小矩形的点全是区域 (σ) 的外点，也就是說，这类小矩形全部在区域 (σ) 的外面。(iii) 小矩形上含有区域 (σ) 的境界点，也就是說，这类小矩形恰恰位于区域 (σ) 的境界上。

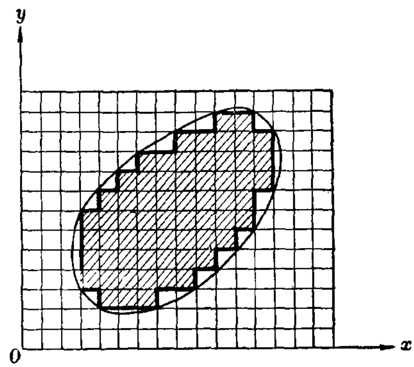

图 3-5-1

我們将所有属于第 (i) 类的小矩形的面积相加起来，記这个和数为 s (即图中阴影部分的面积)，将所有属于第 (i) 类和第 (iii) 类的小矩形的面积相加起来，記这个和数为 S。这两个和数 s 和 S 皆与正交直綫网的分划有关。对于不同的分划，一般所获得的 s (或 S) 也将不同。对每一个小矩形，容易知道它的直徑就是它的对角綫长度，并記 d 为这若干个小矩形的直徑中最大的一个。如果当 $d\to0$ 时，相应地有 $(S-s)\to0$，我們就称这块平面图形 (σ) 是可以求面积的。

事实上讀者在本篇第二章中已經遇到过“可求面积”这一概念，在那里我們曾經讲述了定积分存在的充要条件，并給充要条件作了几何解釋——叙述了曲边梯形可求面积的概念。这里不过把曲边梯形拓广为一般的平面图形，而所依据的思想及原理却是相同的。

这样一来就不难了解，如果平面区域的境界是一条封閉連續曲綫的話，那么这块区域总是可求面积的。

2．如果几何形体 Ω 是一块可以求体积的空間几何体 (V)，那么 (V) 上的积分就称为三重积分，在直角坐标下記为

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\ dx\, dy\, dz.$$

3．如果几何形体 Ω 是一可求长的空间曲线段 (l)，那么 (l) 上的积分就称为第一类曲綫积分，記为

$$\int_{(l)} f(x,\ y,\ z)\,ds.$$

4．如果几何形体 Ω 是一可求面积的曲面片 (S)，那么 (S) 上的积分就称为第一类曲面积分，記为

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y,\ z)\,dS.$$

在下面的一章中，将专門讲述如何来計算这些积分。

特别地，如果被积函数 $f(M)\equiv 1$，由定义可以知道 $\int_{\Omega} d\Omega$ 就是几何形体 Ω 的度量，亦即

$$\int_{\Omega} d\Omega=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Omega_i=(\Omega\text{ 的度量}).$$

正如同定积分中 $\int_a^b dx=b-a$ 正是区間 $[a,\ b]$ 的长度一样。

§2 积分存在的充要条件

本节的叙述方法和結果，都完全仿照本篇第二章定积分存在

的充要条件，因此在本节中，就不再作详细的論証，而只叙述如下：

設 Ω 为一个可以度量的几何形体，$f(M)$ 为定义在 Ω 上的一个有界函数。我們将 Ω 分划为 n 个可以度量的小块 $\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$。記这些小块的度量大小仍为 $\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2$，$\cdots$，$\Delta\Omega_n$。并記 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i$ 的直徑$\}$。由于 $f(M)$ 为 Ω 上的有界函数，所以 $f(M)$ 在每一小块 $\Delta\Omega_i$ 上存在上确界和下确界。分别記它們为 M_i 和 m_i，也就是

$$M_i=\sup_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\},\quad m_i=\inf_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\}.$$

分别作出下列两个和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\Omega_i,$$

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\Omega_i,$$

称 S 为达布大和数，s 为达布小和数。这两个和数显然是与 Ω 的分划有关的。

达布大(小)和数具有以下性质：这些性质的証明与定积分中类似性质的証明沒有任何实质上的不同。

1. 在同一种分划下，黎曼和数不小于达布小和数，不大于达布大和数，亦卽：

$$s\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i\leqslant S,$$

这里点 M_i 为 $\Delta\Omega_i$ 上任何一点，并且当 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上变动时，所获得一切黎曼和(在固定一种分划之下)的上确界和下确界恰好是 S 和 s。

2. 对一种分划添上新分划后，相应所获得的大和数不会增大，小和数不会减小。而对于任何两种分划所得的大、小和数 S_1，s_1 和 S_2，s_2 皆有：

$$s_1\leqslant S_2,\quad s_2\leqslant S_1.$$

3. 小和数有上界，大和数有下界：

$$m(\Omega\text{ 的度量})\leqslant s\leqslant S\leqslant M(\Omega\text{ 的度量}),$$

这里 M 和 m 为 $f(M)$ 在 Ω 上的上、下确界。所以 $\{S\}$ 存在下确界 L，$\{s\}$ 存在上确界 l。

与定积分中达布定理相同，获得以下定理。

达布定理 当几何体 Ω 的分划无限增加，而使

$$d=\max_i\{\Delta\Omega_i\text{ 的直徑}\}\to 0$$

时，大和数和小和数必存在极限，且其极限値分别为 L 和 l. 也就是說：

$$\lim_{d\to 0}S=L,\qquad \lim_{d\to 0}s=l.$$

到此我們便可以給出 Ω 上积分存在的充要条件了。

1° 函数 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为：

$$L=l,$$

也可以用另一种語言来叙述这个充要条件，如果記 ω_i 为 $f(M)$ 在 $\Delta\Omega_i$ 上的振幅，亦即：

$$\begin{aligned}\omega_i&=M_i-m_i\\&=\sup_{M\in\Omega_i}\{f(M)\}-\inf_{M\in\Delta\Omega_i}\{f(M)\},\end{aligned}$$

那么 $f(M)$ 在 Ω 上黎曼可积的充要条件为：

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\Omega_i=0,$$

事实上，这个条件是和 $L=l$ 等价的，因为：

$$\begin{aligned}L-l&=\lim_{d\to 0}(S-s)\\&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\Omega_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\Omega_i.\end{aligned}$$

2° 函数 $f(M)$ 在 Ω 上可积的充要条件为：对任意两个正数 ε 和 σ，总存在正数 δ，对于任何 $d<\delta$ 的分划（这里 d 为 $\Delta\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的直徑中最大的一个数），那些 $w_{i'}\geqslant\varepsilon$ 的小几何体 $\Delta\Omega_{i'}$ 的