职业高中试用教材

高等教育出版社

数学

第三册

李方烈 刘嘉琨 高敬东 编

ZHIYE GAOZHONG SHIYONG JIAOCAI

职业高中试用教材

数　　学

第三册

李方烈　刘嘉琨　高敬东　编

高等教育出版社

内容提要

本书共分两部分. 第一部分为“立体几何”,内容包括: 直线与平面,多面体和旋转体; 第二部分为“平面解析几何”,内容包括: 直线,圆锥曲线,极坐标和参数方程. 全书选材适当,语言通俗易懂,可供招收初中文化水平的各类职业高中及相应的职业学校使用,也可供有关的培训班作为文化课教材和自学者参考。

职业高中试用教材

数　学

第 三 册

李方烈　刘嘉琨　高敬东　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 9.125　字数 189,000

1986 年 5 月第 1 版　1986 年 5 月第 1 次印刷

印数　00,001—71,200

书号　13010·01230　定价 0.98 元

目　录

第一部分　立体几何

第二部分　平面解析几何

第一部分 立体几何

在初中平面几何里，我们学习了平面上的几何图形的性质、画法、计算以及它们的应用．但是，现实世界中的物体都占据着一定的空间，它们实际上都可以看成是由空间的点、线、面构成的图形，即**空间图形**．如图 1-1 所示的正方体，就是一种空间图形．

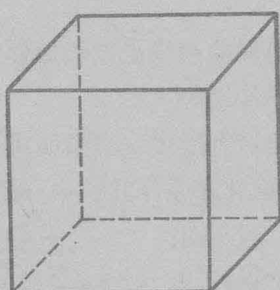


图 1-1

在立体几何这一部分，我们将要研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用．我们应当注意到：把空间图形和它的性质结合起来进行思考，将空间图形分解和转化为平面图形，利用平面几何的结论并引用平面几何的方法来解决问题，这是研究立体几何的基本思想和方法．

第一章　直线与平面

一　平　　面

1.1　平面及其表示法

在日常生活中，平静的水面、镜面、桌面、黑板面等，都给我们以平面的形象；木工用角尺检查木板是否平整，水泥工铺水泥地面时用一根直尺刮平，这些都反映出检验平面的方法．人们从日常生活和生产实践中总结出来的这些经验，把它写出来就是：经过面内任意两点的直线，如果都在这个面内，那么这个面是平面．

我们知道平面几何里的直线是无限延伸的．同样，立体几何里的平面也是无限伸展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们很象平行四边形，因此在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面（图 1-2）．当平面呈水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成 45°．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画(图 1-3)．这样，看起来立体感强一些．

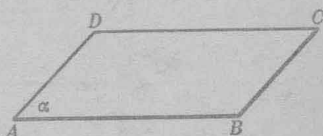


图　1-2

平面通常用一个大写的字母如 M 或一个小写的希腊字母如 α 来表示，读作"平面 M"或"平面 α"，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 1-2）．

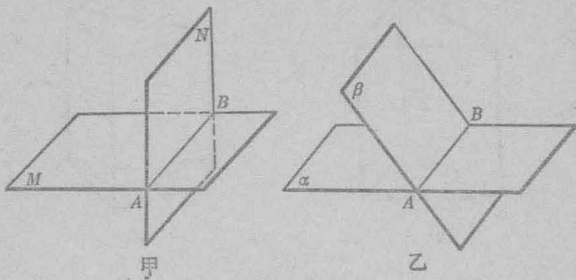
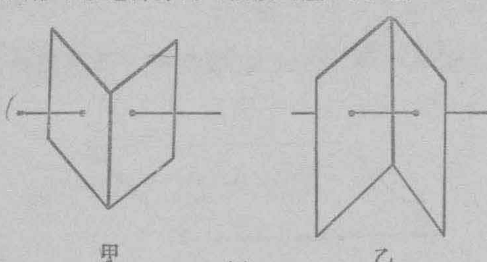


图 1-3

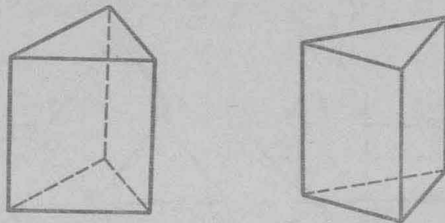
在立体几何里，我们通常把平面看做平面上点的集合。如果点 A 在平面 α 上，记作 $A\in\alpha$，点 B 不在平面 α 上，记作 $B\notin\alpha$. 同样，直线也可看做直线上所有点的集合，点 A 在直线 l 上，记作 $A\in l$；点 B 不在直线 l 上，记作 $B\notin l$. 如果直线 l 在平面 α 上，可把直线 l 上点集看做平面 α 点集的子集，记作 $l\subset\alpha$.

练习

1. 能不能说一个平面长 4 米，宽 2 米？为什么？
2. 观察(1)，(2)中甲、乙两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同. 并用字母来表示各平面.
3. 把下面图形中被遮部分的线段改为虚线，根据不同的改法，用模型



(1)

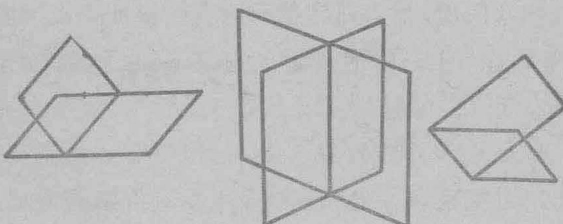


甲　　　　　　乙

(2)

第 2 题图

摆出它们的位置．并用字母表示各平面．



(1)　　　　(2)　　　　(3)

第 3 题图

1.2　平面的基本性质

人们在日常生活和生产实践中，经过长期的观察、思考、分析和概括，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础．

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 1-4)．

图　1-4

这时，我们说直线在平面内，或者说平面经过直线.

如图 1-5 所示，木工用角尺在刚刨过的木板上任意移动或转动，看角尺的边缘是否处处与木板靠紧，由此来检查木板是不是平面，就是公理 1 的实际应用.

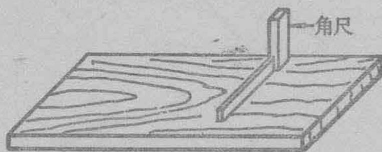


图 1-5

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线(图 1-6).

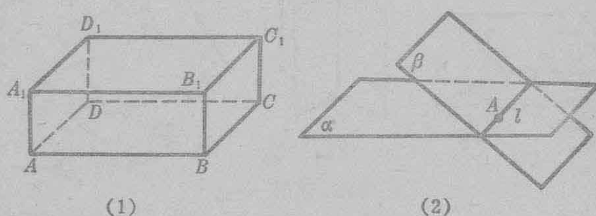
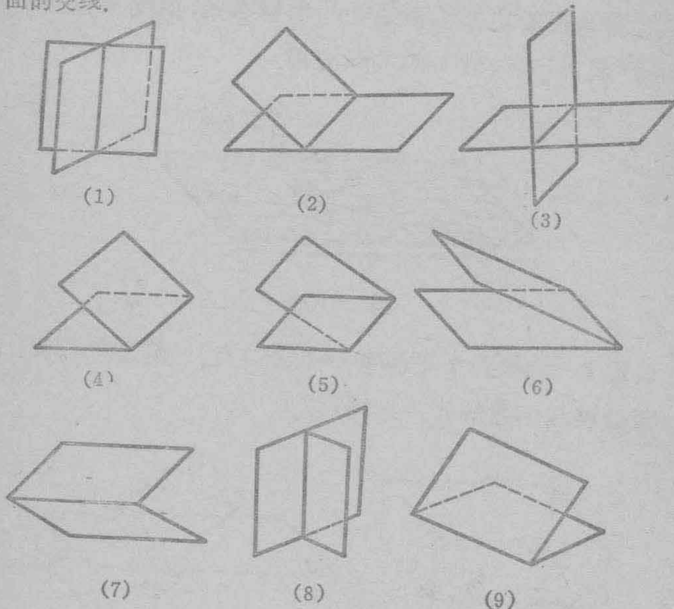


图 1-6

例如教室内的相邻墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线；又如图 1-6(1)所示，长方体中的平面 A_1B 与平面 C_1B 有公共点 B，就有一条交线 BB_1，记作：平面 $AB_1\cap$ 平面 $B_1C=BB_1$. 在图 1-6(2)中，平面 α 与平面 β 有一个公共点 A，就有一条过点 A 的交线 l，这时我们说平面 α 与平面 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$. 同样，直线 m 和直线 n 相交于点 B，可记作 $m\cap n=B$.

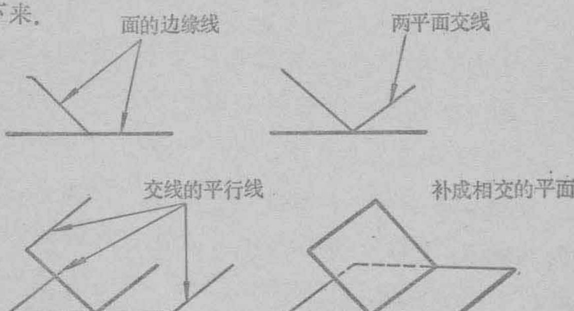
练习

1. 用硬纸板作平面，按下列情况摆出来，然后在下列图中找出两个平面的交线.



第 1 题图

2. 按下列的步骤来画两个平面相交 的空间图形，然后把上题中的图画下来.



第 2 题图

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(图 1-7)。

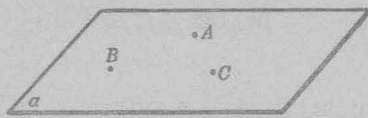


图 1-7

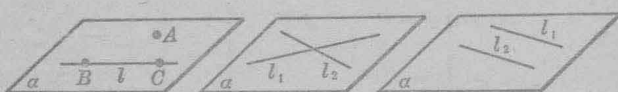
从实验观察知，经过一个定点的平面有无数个；经过两个定点的平面是过这两点的任何平面以过此两点的直线为轴旋转成的无数个平面；经过不在同一条直线上的三点，可以确定一个平面.

一扇门用两个合叶和一把锁就可以固定了，照相机用三脚架就能放稳，这些都是公理 3 的实际应用.

过 A、B、C 三点的平面可记作“平面 ABC”.

根据上述公理，可以得出下面三条推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(图 1-8 甲).



甲　　乙　　丙

图 1-8

A 是直线 l 外的一点，在 l 上任取两点 B、C. 根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 有一个平面 α. 因为点 B、C 都在平面 α 内，所以根据公理 1，直线 l 在平面 α 内. 即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面.

因为点 B、C 在直线 l 上，所以经过直线 l 和点 A 的平面一定经过点 A、B、C. 又根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

类似地，可以得出下面两个推论：

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 1-8 乙）.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 1-8 丙）.

"有且只有一个平面"，我们也说是"确定一个平面".

注意：在立体几何里，平面几何中的定义、公理、定理等，对于同一平面内的图形仍然成立.

例 1　在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，画出满足下列要求的平面.

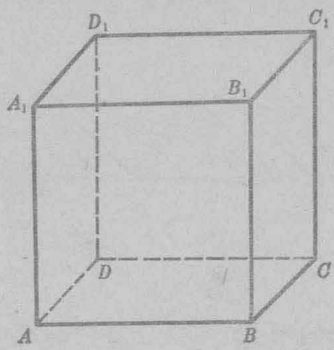


图 1-9

(1) 过 A、C、D_1 三点所确定的平面；

(2) 过线段 BD 及 C_1 点所确定的平面.

解: (1) 根据公理 3，由不共线的三点 A、D_1、C 可确定一个平面 α. A、$D_1 \in \alpha$，A、$D_1 \in$ 平面 AD_1，平面 $\alpha \cap$ 平面 $AD_1 = AD_1$；同理，平面 $\alpha \cap$ 平面 $CD_1 = CD_1$，平面 $\alpha \cap$ 平面 $AC = AC$. 因此，平面 α 被正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所截，在正方体内部得到一个截面三角形，如图 1-10 所示.

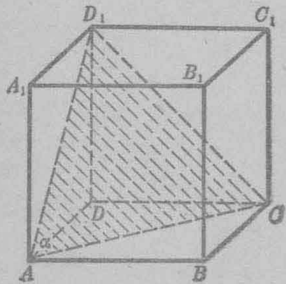


图 1-10

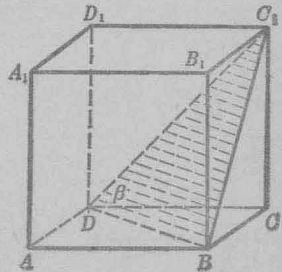


图 1-11

(2) 根据公理 3 的推论 1，由 C_1 和 BD 可确定一个平面 β.

平面 $\beta \cap$ 平面 $BC_1 = BC_1$，平面 $\beta \cap$ 平面 $C_1D = C_1D$.

平面 β 被正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所截，在正方体内得到一个截面三角形，如图 1-11 所示.

例 2 在正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，D、E 分别是 SB、SC 的中点，画出由 AD、AE 确定的平面 α.

解: 根据公理 3 的推论 2，过相交直线 AD、AE 可确定平面 α.

画法: 连结 DE，得平面 $ADE = \alpha$.

由此可见，平面 α 被正三棱锥所截，得到的平面图形是三角形 ADE(图 1-12).

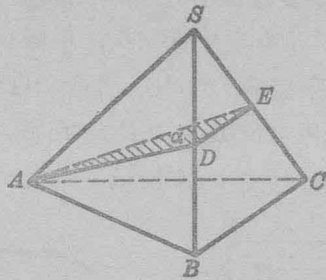


图 1-12

练习

1. 填空:

(1) ______________的三点确定一个平面;

(2) 两条______或______直线确定一个平面;

(3) 有一个公共点的两个平面交于过______的一条直线.

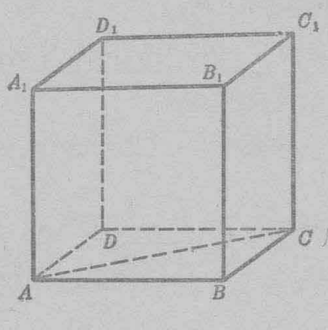
2. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，画出满足下列条件的平面图形:

(1) 经过 A_1、B、C_1 三点;

(2) 经过 AC 与 B_1 点;

(3) 经过 AC 和 C_1C;

(4) 经过 BB_1 和 DD_1.



第2题图

3. 用符号表示下列语句:

(1) 点 A 在平面 α 内, 但在平面 β 外;

(2) 直线 l 经过平面 α 外一点 M;

(3) 直线 l 在平面 α 内, 又在平面 β 内, 即平面 α 和平面 β 相交于直线 l.

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例如, 三棱镜的三条棱或长方体的棱 $AA_1 /\!/ BB_1$, $CC_1 /\!/ BB_1$, 则 $AA_1 /\!/ CC_1$, 如图 1-13.

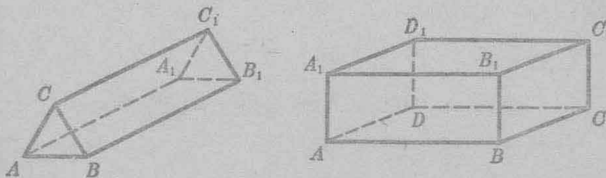


图 1-13

在生产中安装变速的皮带轮时, 轮轴必须互相平行, 这样, 轮子在运转时才比较平稳(图 1-14). 当轴 3 和轴 2 平行时, 只要轴 1 和轴 2 平行, 就能使轴 1 和轴 3 平行.

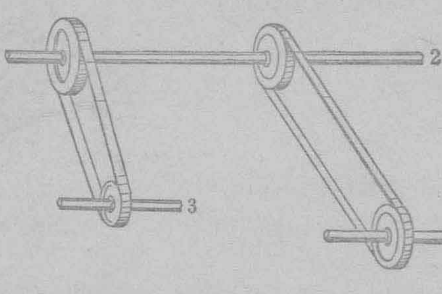


图 1-14

例 1 一条直线和两条平行直线相交，证明这三条直线在同一平面内①.

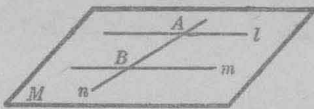


图 1-15

已知：$l \parallel m, n \cap l = A, n \cap m = B$.

求证：l、m、$n \subset$ 平面 M.

证明：$\because$ $l \parallel m$,

$\therefore$ l、m 确定一个平面 M.

又 $\because$ 直线 n 上的 A、B 两点在平面 M 内，

$\therefore$ 直线 n 也在平面 M 内，

即 l、m、$n \subset$ 平面 M.

例 2 四个顶点不在同一平面内的四边形，叫做空间四边形. 如图 1-16 所示，设空间四边形 $ABCD$ 的各边中点分别为 E、F、G、H，求证这四个中点在同一平面内.

证明：连结 B、D，E、H，F、G.

$\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH \parallel BD$.

同理，$FG \parallel BD$.

$\therefore$ $EH \parallel FG$（公理 4），

EH、FG 在平面 EG 内（推论 3）.

$\therefore$ E、F、G、H 在同一平面内.

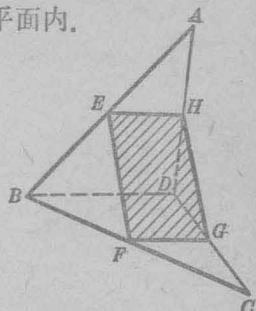


图 1-16

---

① 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”.

例3 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，画出由 AA_1 和 AC 确定的平面.

分析： $\because$ AA_1B_1B 和 BB_1C_1C 是正方形，

$\therefore$ $AA_1 \underline{\parallel} BB_1, BB_1 \underline{\parallel} CC_1,$

$\therefore$ $AA_1 \underline{\parallel} CC_1.$

根据公理3的推论3，AA_1、CC_1确定一个平面，它过AA_1；由于A、C在此平面上，根据公理1，此平面又过AC. 因此，这个平面即为所要求的平面α.

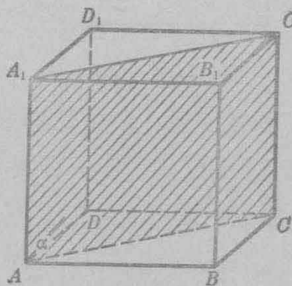


图 1-17

画法： 连结 A、C，A_1、C_1 得一矩形 ACC_1A_1 即平面 α.

练习

1. 求证：三角形一定是平面图形.
2. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法

把空间图形画在纸上或黑板上，这就是用一个平面图形来表示空间图形，这样的平面图形不是空间图形的真实形状，而是它的直观图. 如图1-18是正方体的一种直观图，正方体