

中考数学 综合指导

《初中数学课程改革与考试》课题组 编写

一轮复习



南京出版社

新课标 新思路 新创意

中考数学 综合指导

《初中数学课程改革与考试》课题组 编写

一轮复习

南京出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学综合指导/《初中数学课程改革与考试》
课题组编. —南京:南京出版社,2006
ISBN 7-80718-136-2

I. 中... II. 中... III. 数学课—初中—升学参考
资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 000500 号

书 名:中考数学综合指导
作 者:《初中数学课程改革与考试》课题组
出版(发行):南京出版社
社址:南京市成贤街 43 号 3 号楼 邮编:210018
网址:<http://www.njpbs.com/www.njpbs.net>
联系电话:025-83283871(营销) 025-83283883(编务)
电子信箱:webmaster@njpbs.com

责任编辑:张 龙

装帧设计:郭春明

印 刷:南京爱德发展有限公司

开 本:850mm×1168mm 1/16

印 张:23.75

字 数:625 千

版 次:2006 年 12 月第 2 版

印 次:2006 年 12 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-80718-136-2/G·68

总 定 价:32.00 元(全二册)

南京版图书若有印装质量问题可向本社调换

目 录

第一部分 数与代数

§ 1. 数与式	(1)
§ 1.1 实数	(1)
§ 1.2 代数式和代数式的值	(4)
§ 1.3 整式	(6)
§ 1.4 因式分解	(9)
§ 1.5 分式	(11)
§ 1.6 二次根式	(13)
§ 2. 方程(组)与不等式	(16)
§ 2.1 方程(组)的解法	(16)
§ 2.2 一元一次不等式(组)及其解法	(21)
§ 2.3 方程(组)的综合应用	(24)
§ 2.4 不等式(组)的综合应用	(32)
§ 3. 函数及其图像	(38)
§ 3.1 函数及其图像	(38)
§ 3.2 一次函数	(42)
§ 3.3 反比例函数	(57)
§ 3.4 二次函数	(61)

第二部分 空间与图形

§ 4. 图形的认识	(85)
§ 4.1 点、线、面及角	(85)
§ 4.2 视图与投影	(89)
§ 4.3 相交线与平行线、命题与证明	(94)
§ 4.4 尺规作图	(99)
§ 5. 三角形	(103)
§ 5.1 三角形的基本概念	(103)
§ 5.2 等腰三角形	(106)
§ 5.3 直角三角形	(109)
§ 5.4 全等三角形	(113)
§ 6. 四边形	(118)
§ 6.1 多边形的基本认识和平行四边形	(118)
§ 6.2 特殊的平行四边形(1)	(122)
§ 6.3 特殊的平行四边形(2)	(125)
§ 6.4 梯形	(129)

§ 7. 圆	(138)
§ 7.1 与圆有关的概念	(138)
§ 7.2 直线与圆的位置关系	(145)
§ 7.3 圆与圆的位置关系	(152)
§ 7.4 与圆有关的计算	(155)
§ 8. 图形与变换	(160)
§ 8.1 轴对称	(160)
§ 8.2 平移与旋转	(164)
§ 8.3 图形的相似	(169)
§ 8.4 解直角三角形	(181)

第三部分 统计与概率

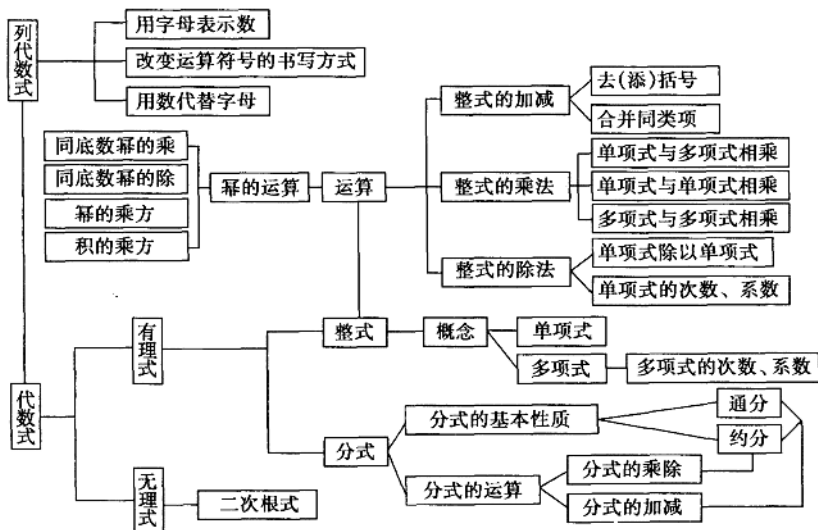
§ 9. 统计	(190)
§ 9.1 统计的概念与统计图表	(190)
§ 9.2 平均数、中位数、众数	(193)
§ 9.3 方差与极差	(196)
§ 9.4 数据与处理	(198)
§ 10. 概率	(201)
§ 10.1 随机事件	(201)
§ 10.2 概率的简单计算(1)	(204)
§ 10.3 概率的简单计算(2)	(209)
§ 10.4 概率的简单应用	(213)

第一部分 数与代数

§1. 数与式



知识结构



§1.1 实数



知识归纳

- 数轴是规定了_____、_____、_____的直线,数轴上的点与_____是一一对应的.
- 相反数
 - 实数 a 的相反数为_____;零的相反数是_____.
 - a 和 b 互为相反数,则 $a+b=$ _____.
- 倒数
 - 实数 $a(a \neq 0)$ 的倒数为_____;_____没有倒数.
 - a 和 b 互为倒数,则 $ab=$ _____.
- 绝对值
 - 一个正实数的绝对值是_____,一个负实数的绝对值是_____,零的绝对值是_____.
 - 从数轴上看,一个实数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的_____.
- 平方根与立方根
 - 如果一个数的平方等于 a ,那么这个数叫做 a 的_____,记做_____.
 - 正数 a 的平方根有_____个,它们_____.其中正的平方根叫做 a 的_____,记做 $\sqrt{a}$;0 的

平方根与算术平方根都是_____；负数_____平方根.

(3) 如果一个数的立方等于 a , 那么这个数叫做 a 的_____, 记做_____, 其中 a 的取值范围是_____.

(4) 正数的立方根为_____, 负数的立方根为_____, 0 的立方根为_____, $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

6. 近似数、有效数字与科学记数法

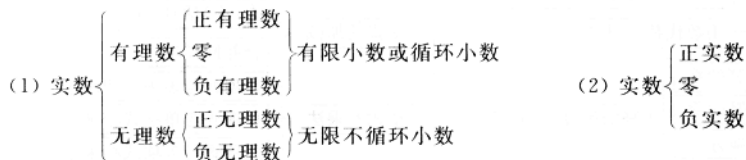
(1) 一个近似数, 从左边第一个非零数字起到最后一个数字止, 所有数字都是这个数的_____.

(2) 科学记数法一般表示为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

7. 有理数、无理数、实数

整数和分数统称有理数; 无限不循环小数叫无理数; 有理数和无理数统称为实数.

8. 实数的分类



9. 实数的运算

实数的运算顺序为先算乘方和开方, 再算乘除, 最后算加减; 有括号时, 先算括号内; 同一级运算应从左至右, 按顺序进行. 注意特殊指数的意义: $a^0 = 1 (a \neq 0)$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (p \text{ 为正整数}, a \neq 0)$.

课时 1 实数



典型剖析

例 1. $\sqrt{64}$ 的平方根是_____.

分析: 一个正数的平方根有两个, 它们互为相反数. 本题是求 8 的平方根, 而不是 64 的平方根.

解: 填 $\pm 2\sqrt{2}$.

点评: 填写答案前必须搞清楚 $\sqrt{64}$ 的意义.

例 2. 在等式 $3 \times \square - 2 \times \square = 15$ 的两个方格内分别填入一个数, 使这两个数是互为相反数且等式成立, 则第一个方格内的数是_____.

分析: 问题以新颖的趣味形式提出, 既考查了相反数的概念, 又考查了实数的运算, 可以用尝试值代入的方法探索.

解: 填 15.

点评: 也可以通过构建方程模型求解.

例 3. 实数 a, b 在数轴上的位置如图 1-1 所示, 那么化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$ 的结果是 ()

A. $2a-b$

B. b

C. $-b$

D. $-2a+b$

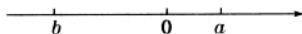


图 1-1

分析: 根据实数 a, b 在数轴上的位置先判断 a, b 的符号及大小, 然后再分别化简.

解: 选 C.

点评: 此类题型往往给出未知实数在数轴上的位置, 然后对含有这些实数的代数式进行化简, 除了要判断所给实数的大小关系外, 对实数绝对值意义及算术平方根概念的正确理解也是解题的关键.

例 4. 温家宝总理有一句名言：“多么小的问题，乘以 13 亿，都会变得很大；多么大的经济总量，除以 13 亿，都会变得很小。”据国家统计局公布，2004 年我国淡水资源总量为 26520 亿立方米，居世界第四位，但人均只有 _____ 立方米，是全球人均水资源最贫乏的十三个国家之一。

分析：以温总理的名言和真实的生活情境信息为背景提出问题，反映了大数与小数的转化，具有立意新颖的德育功能。

解： $26520 \div 13 = 2040$ 立方米。

点评：熟悉问题情境理解题意是正确解题的方法。

例 5. 瑞士中学教师巴尔末成功地从光谱数据 $\frac{9}{5}, \frac{16}{12}, \frac{25}{21}, \frac{36}{32}, \dots$ 中得到巴尔末公式，从而打开了光谱奥妙的大门。请你按这种规律写出第七个数据是 _____。

分析：发现规律是新课程评价中的必考内容之一，具有较高的创新要求，可从两个方面发现信息：一是从单个分数观察获得这组数据的分母比分子小 4，而分子是一个完全平方数；二是从相邻分数的联系观察获得各分母彼此相差的数是连续奇数 7, 9, 11, …

解：第七个数据应是 $\frac{81}{77}$ 。

点评：还可以拓展写出这个规律的一般式 $\frac{n^2}{n^2-4}$ ，其中 $n > 2$ ，且 n 为整数。



练兵平台

1. $-|-2|$ 的倒数是 _____。
2. 据苏州市红十字会统计，2004 年苏州市无偿献血者总量为 12.4 万人次，已 6 年保持全省第一。12.4 万这个数用科学记数法表示为 _____。
3. 已知 a, b 是有理数，且满足 $(a-2)^2 + |b-3| = 0$ ，则 $a^b =$ _____。
4. 实数： $\frac{\pi}{2}, \sin 30^\circ, 0.1414, \sqrt[3]{9}, (-\sqrt{7})^2, \frac{22}{7}, \sin 45^\circ, \sqrt{9}$ 中，无理数有 _____ 个。
5. 若无理数 a 满足不等式 $1 < a < 4$ ，请写出两个符合条件的无理数 _____，_____。
6. 计算： $\frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \frac{1}{13 \times 14} + \dots + \frac{1}{19 \times 20}$ 。



体验中考

1. (佛山·2006) 如图 1-2，数轴上的两个点 A、B 所表示的数分别是 a, b ，在 $a+b, a-b, ab, |a|-|b|$ 中，是正数的有 _____ 个。
2. (山西·2006) 北京与纽约的时差为 -13，(负号表示同一时刻纽约时间比北京时间晚)。如果现在是北京时间 15:00，那么纽约时间是 _____。
3. (湖北武汉·2006) 同位素的半衰期(half-life)表示衰变一半样品所需的时间。镭-226 的半衰期约为 1600 年，1600 用科学记数法表示为 _____。
4. (绍兴·2005) “数轴上的点并不都表示有理数，如图 1-3 中数轴上的点 P 所表示的数是 $\sqrt{2}$ ”，这种说明问题的方式体现的数学思想方法叫做 _____。

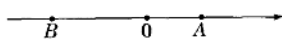


图 1-2

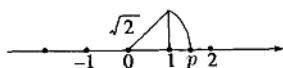


图 1-3

- A. 代入法
B. 换元法
C. 数形结合
D. 分类讨论

5. (辽宁沈阳·2006)估算 $\sqrt{24}+3$ 的值

A. 在 5 和 6 之间

B. 在 6 和 7 之间

C. 在 7 和 8 之间

D. 在 8 和 9 之间

6. (江西·2005)如图 1-4, 正方形网格中, 每个小正方形的边长为 1, 则网格上的 $\triangle ABC$ 中, 边长为无理数的边数是

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7. (河南·2006)计算: $(2-\sqrt{3})^{2006} \cdot (2+\sqrt{3})^{2007} - 2\cos 30^\circ - (-\sqrt{2})^0$.

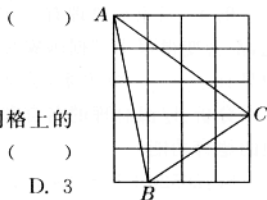


图 1-4

§ 1.2 代数式和代数式的值



知识归纳

1. 在现实情景中进一步理解用字母表示数的意义.
2. 能分析简单问题的数量关系, 并用代数式表示.
3. 能解释一些代数式的实际背景或几何意义.
4. 会求代数式的值; 能根据特定的问题查阅资料, 找到所需要的公式, 并会代入具体的值进行计算.

课时 2 代数式和代数式的值



典型剖析

例 1. “ x 的 $\frac{1}{2}$ 与 y 的和”用代数式可以表示为

A. $\frac{1}{2}(x+y)$

B. $x + \frac{1}{2} + y$

C. $x + \frac{1}{2}y$

D. $\frac{1}{2}x + y$

()

分析: 本题考查学生对代数式的语言表达含义的理解, 相关问题可以涉及到和、差、积、商、乘方、开方等各种运算.

解: 选 D.

点评: 按语意列代数式, 需对语意有透彻的理解, 书写时遵循代数式的书写要求.

例 2. 如果 $x^2 + x - 1 = 0$, 那么代数式 $x^3 + 2x^2 - 7$ 的值为

A. 6

B. 8

C. -6

D. -8

()

分析: 考虑用整体代换的思想方法, 此方法可使复杂的问题简单化.

解: $\because x^2 + x - 1 = 0, \therefore x^2 + x = 1,$

$$\therefore x^3 + 2x^2 - 7 = x^3 + x^2 + x^2 - 7$$

$$= x(x^2 + x) + x^2 - 7$$

$$= x + x^2 - 7$$

$$= 1 - 7$$

$$= -6$$

点评: 解此类题目首先要观察已知条件和需要求解的代数式, 找到合适的“整体”, 然后重新进行变形与组合, 再代换化简从而获得问题的解.

例 3. 小王利用计算机设计了一个计算程序, 输入和输出的数据如下表:

输入	...	1	2	3	4	5	...
输出	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	...

当输入的数据是 8 时,输出的数是

()

A. $\frac{8}{61}$

B. $\frac{8}{65}$

C. $\frac{8}{67}$

D. $\frac{8}{69}$

分析:观察数据规律可知:当输入数据 n 时,输出数据是 $\frac{n}{n^2+1}$.

解:把 $n=8$ 代入 $\frac{n}{n^2+1}$,求得 $\frac{8}{65}$,故选 B.

点评:用字母表示数字规律的关键是要抓住其具体的数字,分析其内在联系,再用字母把这种规律抽象地表示出来.

例 4. 观察下表,填表后再回答问题:

(1) 试完成下列表格:

序号	1	2	3	...
图形				...
●的个数	8		24	...
★的个数	1	4		...

(2) 试求第几个图形中“●”的个数和“★”的个数相等?

分析:序号为 1 时,黑点的个数为 8×1 ,五角星的个数为 1^2 ;序号为 2 时,黑点的个数为 8×2 ,五角星的个数为 2^2 ;序号为 3 时,黑点的个数为 8×3 ,五角星的个数为 3^2 ;序号为 n 时,黑点的个数为 $8 \times n$,五角星的个数为 n^2 .

解:(1) 序号为 2 时,黑点的个数为 16,序号为 3 时,五角星的个数为 9.

(2) 设第 n 个图中黑点的个数和五角星的个数相等,根据题意得, $8n = n^2$,符合题意的解为 8.

点评:题目解答方式多样,可用一种观察方式综合考虑这几个图形的特征.



练兵平台

1. 代数式 $m^2 - n^2$ ($m > n > 0$) 的三个实际意义是:_____.

2. 如图 1-5,小红房间的窗户由六个小正方形组成,装饰物是两个四分之一圆,用只含 a (或只含 b) 的代数式表示窗户中能射进阳光部分的面积是_____.

3. 某种手机卡的市话费上次已按原收费标准降低了 m 元/分钟,现在再次下调 20%,使收费标准为 n 元/分钟,那么原收费标准为_____.

4. 已知 $2^n + 2^{-n} = k$ (n 为正整数),则 $4^n + 4^{-n} =$ _____ (用含 k 的代数式表示).

5. 将连续自然数 1 至 36 按图 1-6 的方式排成一个正方形阵列,用一个小正方形任意圈出其中的 9 个数,设圈出的 9 个数的中心的数为 a ,用含 a 的代数式表示这 9 个数的和为_____.

6. 已知 $a(a-1) + (b-a^2) = -7$,求 $\frac{a^2+b^2}{2} - ab$ 的值.

7. 列代数式,并求值.

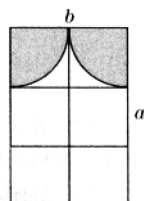


图 1-5

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

图 1-6

(1) 某公园的门票价格是：成人票每张 10 元，学生票每张 5 元。一个旅游团有成人 x 人，学生 y 人，那么该旅游团应付多少门票费？

(2) 如果该旅游团有 37 个成人、15 个学生，那么他们应付多少门票费？



体验中考

1. (临汾·2006) 如图 1-7，依次连结第一个正方形各边的中点得到第二个正方形，再依次连结第二个正方形各边的中点得到第三个正方形，按此方法继续下去。若第一个正方形边长为 1，则第 n 个正方形的面积是_____。

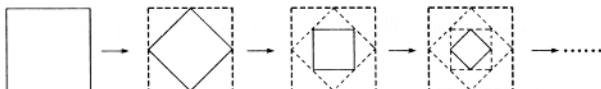


图 1-7

2. (河北·2005) 一根绳子弯曲成如图 1-8(1) 所示的形状。当用剪刀像图 1-8(2) 那样沿虚线 a 把绳子剪断时，绳子被剪为 5 段；当用剪刀像图 1-8(3) 那样沿虚线 $b(b \parallel a)$ 把绳子再剪一次时，绳子就剪为 9 段；若用剪刀在虚线 a, b 之间把绳子再剪 $(n-2)$ 次(剪刀的方向与 a 平行)，这样一共剪 n 次时绳子的段数是_____。

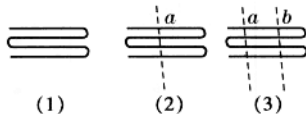


图 1-8

- A. $4n+1$ B. $4n+2$ C. $4n+3$ D. $4n+5$

3. 已知正方形 $ABCD$ 的边长 $AB=k$ (k 是正整数)，正 $\triangle PAE$ 的顶点 P 在正方形内，顶点 E 在边 AB 上，且 $AE=1$ ，将 $\triangle PAE$ 在正方形内按图 1-9(1) 中所示的方式，沿着正方形的边 $AB, BC, CD, DA, AB, \dots$ 连续地翻转 n 次，使顶点 P 第一次回到原来的起始位置。

(1) 如果我们将正方形 $ABCD$ 的边展开在一直线上，那么这一翻转过程可以看作是 $\triangle PAE$ 在直线上作连续的翻转运动。图 1-9(2) 是 $k=1$ 时， $\triangle PAE$ 沿正方形的边连续翻转过程的展开示意图。请你探索：若 $k=1$ ，则 $\triangle PAE$ 沿正方形的边连续翻转的次数 $n=$ _____ 时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置。

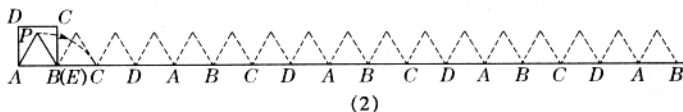
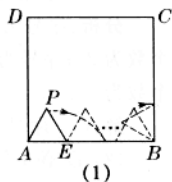


图 1-9

(2) 若 $k=2$ ，则 $n=$ _____ 时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置；若 $k=3$ ，则 $n=$ _____ 时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置。

(3) 请你猜测：使顶点 P 第一次回到原来起始位置的 n 值与 k 之间的关系(请用含 k 的代数式表示 n)。

§ 1.3 整 式



知识归纳

1. 了解整式的概念，会进行简单的整式加、减运算；会进行简单的整式乘法运算(其中多项式相乘仅指一次式相乘)。

2. 会推导乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 、 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，了解公式的几何背景，并能进行简单计算。

3. 合并同类项的法则以及去括号和添括号的法则，整式的加减法。

4. 幂的运算法则、乘法公式、整式的乘法运算法则。

课时 3 整式运算



典型剖析

例 1. 小马虎在下面的计算中只做对了一道题，他做对的题目是

()

A. $(a-b)^2=a^2-b^2$

B. $(-2a^3)^2=4a^6$

C. $a^3+a^3=2a^6$

D. $-(a-1)=-a-1$

分析：在进行整式有关的运算时要特别注意指数运算和符号的变化。

解：选 B。

点评：本题考查了整式的有关运算和性质，通过一个小情境的设计能够激发解题欲望。

例 2. 已知 $A=(a+2)(a-2)$ ， $B=2(6-\frac{1}{2}a^2)$ ，求 $A+B$ 。

分析：本题可以先运用公式分步计算再代入，也可以先代入再综合计算。在具体题目中根据从简原则选择方法。

解： $\because A=a^2-4, B=12-a^2, \therefore A+B=a^2-4+12-a^2=8$

点评：本题考查整式的各种运算，包括平方差、去括号和合并同类项等运算，有一定的综合性。

例 3. 计算： $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1)$

分析：本题若将各括号中先计算再相乘，会非常困难。仔细观察不难发现，每一个括号里 2 的次数都是前一个次数的 2 倍，因此可构造平方差公式进行计算。

解： $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1)=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)$
 $= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1) = (2^{64})^2 - 1 = 2^{128} - 1$

点评：巧妙地构造一些运算公式，可使看似繁杂的运算简化。

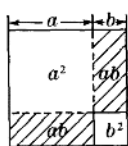
例 4. 你能用图形验证 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 及 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 吗？

分析：用图形验证完全平方公式，实际上就是阐述公式的几何背景，可以用几何图形面积法来解决。

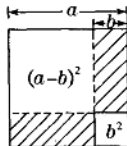
解：在图 1-10(1)中，大正方形的面积是 $(a+b)^2$ ，它由两个小正方形和两个相等的长方形组成。两个小正方形的面积分别是 a^2 、 b^2 ，长方形的面积是 ab ，所以有等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。

在图 1-10(2)中，大正方形的面积是 a^2 ，两个小正方形的面积分别是 $(a-b)^2$ 、 b^2 ，两个相等的长方形的面积都是 $(a-b) \cdot b$ ，于是有 $a^2=(a-b)^2+2(a-b) \cdot b+b^2$ ，即 $(a-b)^2=a^2-2(a-b) \cdot b-b^2=a^2-2ab+b^2$ 。

点评：这道题目通过把 $a+b$ 和 $a-b$ 看做两个正方形的边长，从而利用图形面积解决问题，让我们进一步感受到了“数形结合”的思想。



(1)



(2)

图 1-10

例 5. 现规定一种新的运算“ $*$ ”： $a*b=a^b$ 。如 $3*2=3^2=9$ 。则 $\frac{1}{2}*3$ 是

()

A. $\frac{1}{8}$

B. 8

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{3}{2}$

分析：根据自定义的运算法则来进行运算是一种新型题，很受中考命题的青睐，其解题关键是要吃透定

义的运算规则.

解: $\because a * b = a^b, \therefore \frac{1}{2} * 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, 故应选 A.

点评: 此题主要是从新的运算“ $*$ ”: $a * b = a^b$ 中分析出运算的实质与方法, 即结果是一个以前一个数为底, 后一个数为指数的幂. 它与我们所熟悉的基本运算并无本质的区别.



练兵平台

1. $(-2x+5)(\quad) = 25-4x^2$.
2. $(a-b)^2 = (a+b)^2 + (\quad)$.
3. 若 $x^m \cdot x^{2n} = x^{10}$, 当 $m=4$ 时, $n = \quad$.
4. 若 $5^m = 2, 5^n = 6$, 则 $5^{2m+n} = \quad$.
5. 如果 $2006^2 = a$, 那么 $2003 \times 2009 = \quad$. (用含 a 的代数式表示)
6. 利用乘法公式计算 $2005 \times 2007 - 2006^2 = \quad$.
7. 两个正方形的边长的和为 a , 边长的差为 b , 那么这两个正方形的面积的差为 $\quad$.

8. 用四个边长分别为 $a, b, c (0 < b < a < c)$ 的直角三角形组成的大小两个正方形, 如图 1-11 (这个图叫勾股圆方图). 请你分别用 a, b 和 a, b, c 的代数式表示阴影部分的面积, 猜一猜这两个代数式的关系, 并看一下能得到什么结论.

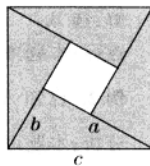


图 1-11



体验中考

1. (浙江绍兴·2005) 在边长为 a 的正方形中挖去一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$) (如图 1-12(1)), 把余下的部分拼成一个矩形 (如图 1-12(2)), 根据两个图形的阴影部分的面积相等, 可以验证 ()

- A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- C. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- D. $(a+2b)(a-b) = a^2 + ab - 2b^2$

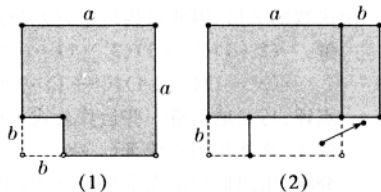


图 1-12

2. (北京·2006) 用“ $\star$ ”定义新运算: 对于任意实数 a, b , 都有 $a \star b = b^2 + 1$. 例如 $7 \star 4 = 4^2 + 1 = 17$, 那么 $5 \star 3 = \quad$, 当 m 为实数时, $m \star (m \star 2) = \quad$.

3. 将一条 50 cm 长的镀金彩条剪成两段, 恰好可用来镶两张大小不同的长方形壁画的边框 (不计接头处). 已知两张壁画的长都是宽的 1.5 倍, 并且它们的面积相差 30 cm^2 . 问这条彩条应剪成多长的两段?

4. 如图 1-13, 工人小王把一块边长分别为 $6a+2b$ 和 $3a+b$ 的长方形铁皮剪去四个角 (边长为 $a+b$ 的正方形), 围成一个无盖的长方体水槽, 求该水槽的体积.

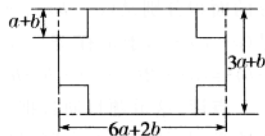


图 1-13

5. 观察下列等式: $1^3 = 1^2$,
 $1^3 + 2^3 = 3^2$,
 $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$,
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$,

(1) 想一想, 等式的左边各项幂的底数与右边幂的底数有什么关系?

(2) 猜一猜,由此你发现了什么规律?请用含 $n(n \geq 1$ 的整数)的等式把你的发现表示出来.

6. (河北·2006) 观察下面的点阵图形和与之相对应的等式,探究其中的规律:

(1) 请你在④和⑤后面的横线上分别写出相对应的等式:

①  $\leftrightarrow 4 \times 0 + 1 = 4 \times 1 - 3;$ ②  $\leftrightarrow 4 \times 1 + 1 = 4 \times 2 - 3;$

③  $\leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = 4 \times 3 - 3;$ ④  $\leftrightarrow$ _____;

⑤  $\leftrightarrow$ _____;

(2) 通过猜想,写出与第 n 个图形相对应的等式.

7. 对于二次三项式 $x^2 - 10x + 36$, 小聪同学作出如下结论: 无论 x 取什么实数, 它的值都不可能等于 11, 你是否同意他的说法? 说明你的理由.

§ 1.4 因式分解



知识归纳

(一) 把一个多项式化为几个整式的积的形式, 叫做把这个多项式因式分解.

(二) 因式分解的常用方法:

1. 提公因式法.

(1) 多项式中各项都含有的因式叫做公因式.

(2) 公因式可以是单项式, 也可以是多项式.

2. 公式法.

(1) 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

(2) 完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

3. 分组分解法和十字相乘法(只需简单了解).

课时 4 因式分解



典型剖析

例 1. 如图 1-14, 边长为 a, b 的矩形, 它的周长为 14, 面积为 10, 则 $a^2b + ab^2$ 的值为_____.

分析: 本题将简单的几何知识与代数运算结合起来考查学生的综合运用能力, 比起直接给出 $2(a+b)=14, ab=10$ 这两个条件显得技高一筹.

解: 依题意, 有 $2(a+b)=14, ab=10$,

$$\therefore a^2b + ab^2 = ab(a+b) = 10 \times 7 = 70.$$

点评: 由方程组解得 a, b 的值, 再代入计算是可能选的方法, 数据简单, 选用此方法也不算麻烦, 若解时将 $a+b$ 和 ab 当作整体, 直接代入显然要简单得多, 特别是对于较复杂的数据就更显优势.

例 2. 若整式 $4x^2 + Q + 1$ 是完全平方, 请你写一个满足条件的单项式 Q : _____.

分析: 近来对于完全平方式的考查时常出现, 主要是抓住完全平方式的形式特点做文章.

解: 满足条件的单项式 Q 可以是 $\pm 4x, 4x^4, -1$ 等, 只需填出一个.



图 1-14

点评:形如 $a^2+2ab+b^2$ 的式子叫做完全平方式,其中“ a 、 b ”这两个数既可以表示单项式,又可以表示多项式或更多复杂的代数式.

例3. 已知 m 、 n 满足 $m^2n^2-4mn+n^2-2n+5=0$,求 m 、 n 的值.

分析:把左边变形为两个完全平方式和的形式.

解:因为 $m^2n^2-4mn+n^2-2n+5=m^2n^2-4mn+4+n^2-2n+1=(mn-2)^2+(n-1)^2$,所以 $(mn-2)^2+(n-1)^2=0$,所以 $m=2, n=1$.

点评:把多项式适当配方,利用完全平方式是非负数这一性质可以解决比较复杂的求值问题.



练兵平台

1. 因式分解: $3x^3-12x^2y+12xy^2=$ _____.
2. 已知二次三项式 $2x^2+bx+c$ 分解因式为 $2(x-3)(x+1)$,则 b 、 c 的值为 ()
A. $b=3, c=-1$ B. $b=-6, c=-2$ C. $b=-6, c=-4$ D. $b=-4, c=-6$
3. 下列各式由左边到右边的变形中,是分解因式的为 ()
A. $a(x+y)=ax+ay$ B. $x^2-4x+4=x(x-4)+4$
C. $10x^2-5x=5x(2x-1)$ D. $x^2-16+3x=(x+4)(x-4)+3x$
4. 已知实数 a 、 b 满足 $(a+b)^2=1, (a-b)^2=25$,求 a^2+b^2+ab 的值.

5. 已知,如图1-15 现有 $a \times a$ 、 $b \times b$ 的正方形纸片和 $a \times b$ 的矩形纸片各若干块,试选用这些纸片(每种纸片至少用一次)在下面的虚线方框中拼成一个个矩形(每两个纸片之间既不重叠,也无空隙,拼出的图中必须保留拼图的痕迹),使拼出的矩形面积为 $2a^2+5ab+2b^2$,并标出此矩形的长和宽.

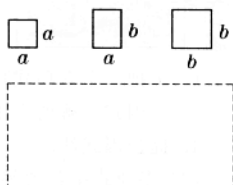


图 1-15



体验中考

1. (贵州课改·2006)因式分解: $a^3b-b^3a=$ _____.
- (湖南常德·2006)多项式 ax^2-4a 与多项式 x^2-4x+4 的公因式是_____.
2. (福建漳州课改·2005)如图1-16,在边长为 a 的正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形($a>b$),把剩下的部分拼成一个梯形,分别计算这两个图形阴影部分的面积,验证了公式_____.
3. (江苏盐城·2006)下列因式分解中,结果正确的是 ()
A. $x^2-4=(x+2)(x-2)$ B. $1-(x+2)^2=(x+1)(x+3)$
C. $2m^2n-8n^3=2n(m^2-4n^2)$ D. $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2})$
4. (四川内江·2006)在一个地球仪的赤道上用铁丝打一个箍,现将铁丝半径增大1米,需增加 m 米长的铁丝,假设地球的赤道上也有一个铁箍,同样半径增大1米,需增加 n 米长的铁丝,则 m 与 n 的大小关系是 ()
A. $m>n$ B. $m<n$ C. $m=n$ D. 不能确定
5. (湖北十堰·2005)填上适当的数,使等式成立: x^2-4x+ _____ $=(x-$ _____ $)^2$.
6. (浙江·2005)在日常生活中如取款、上网都须要密码,有一种“因式分解”法产生的密码,方便记忆.原理是:如对于多项式 x^4-y^4 ,因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$,若取 $x=9, y=9$ 时,则各个因式的值是: $(x-y)=0, (x+y)=18, (x^2+y^2)=162$ 于是就可以把“018162”作为一个六位数字密码,对于多项式

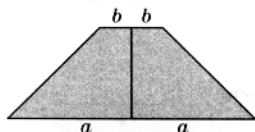
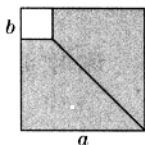


图 1-16

$4x^3 - xy^2$, 取 $x=10, y=10$ 时, 用上述方法产生的密码是: _____ (写出一个即可).

§ 1.5 分 式



知识归纳

1. 形如 $\frac{A}{B}$ (A, B 是整式且 B 中含有字母, $B \neq 0$) 的式子, 叫做分式.
2. 在分式中, 分母为零, 分式没有意义.
3. 分式的基本性质: 分式的分子与分母都乘以或除以同一个不等于零的整式, 分式的值不变.
4. 分式的乘法法则: 分式乘分式, 用分子的积做积的分子, 分母的积做积的分母; 分式除以分式, 把除式的分子、分母颠倒位置后与被除式相乘.
5. 分式乘方法则: 分式乘方, 把分子、分母各自乘方, 即 $(\frac{a}{b})^k = \frac{a^k}{b^k}$ (k 为正整数).
6. 同分母分式加减法: 同分母的分式相加减, 分母不变, 把分子相加减.
7. 异分母的分式相加减, 先通分, 变为同分母的分式, 然后再加减.

课时 5 分 式



典型剖析

- 例 1. 在 $\frac{1}{x}, \frac{a^2b}{3}, -0.5xy + y^2, \frac{b+c}{a}, \frac{x-z}{5+y}, \frac{3a^2}{\pi}, \frac{x^2}{x}$ 中, 是分式的有 _____ ()
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

分析: 判断是否为分式关键是看分母是否含有字母.

解: 选 C.

点评: 正确理解分式的概念是判断的前提.

- 例 2. 下列式子 (1) $\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y}$; (2) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{a-b}{a-c}$; (3) $\frac{|b-a|}{a-b} = -1$; (4) $\frac{-x+y}{-x-y} = \frac{x-y}{x+y}$ 中, 正确的是 _____ ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解析: 本题主要考查了分式的约分与符号化简等知识与技能, 其中 (2)、(4) 的算式正确, 因此应选 B.

例 3. 有一道题“先化简, 再求值: $(\frac{x-2}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}) \div \frac{1}{x^2-4}$, 其中 $x = -\sqrt{3}$.”小玲做题时把“ $-\sqrt{3}$ ”错抄成了“ $x = \sqrt{3}$ ”, 但她的计算结果也是正确的, 请你解释这是怎么回事?

分析: 本题从学生的现实生活提取问题, 虽然也是对分式的混合运算的考查, 但是增强了学生对问题的探索兴趣, 该题具有一定的创新意义.

解: 化简得 $(\frac{x-2}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}) \div \frac{1}{x^2-4} = \frac{x^2-4x+4+4x}{x^2-4} \times (x^2-4) = x^2+4$ 因为 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$, x^2 的值均为 3, 原式的计算结果都是 7, 所以把“ $x = -\sqrt{3}$ ”错抄成“ $x = \sqrt{3}$ ”, 计算结果也是正确的.

点评: 本题具有一定的教育功能, 正确的解题必须具有清晰、完整的过程, 因此必须养成良好的解题习惯.

例 4. 有一台现价值为 N 元的机器, 如果不经修理可以再用 n 次, 经修理后, 可以再用 m 次 ($m > n$). 如

果修理费是 P 元,问在修理费满足什么条件的情况下,修理后再使用较为合算.

分析: 本题通过所设置的实际情境考查了学生对分式的值的大小比较的把握. 其解题的关键是: 当修理后的每次使用费小于修理前的每次使用费时, 这样的修理才有意义.

解: 据题意, 得 $\frac{N}{n} - \frac{N+P}{m} > 0$, 左边通分, 同时注意到 $m > n$, 整理得 $P < \frac{m-n}{n}N$, 所以当 $P < \frac{m-n}{n}N$ 时, 修理后再使用较为合算.

点评: 本题通过生活实际问题体现了分式的应用价值, 解这类题时学生需要具有一定的实践经验, 才能将问题建立成分式大小比较的数学模型, 折算成比较修理前与修理后的每次使用均费.



练兵平台

- 已知 $y = \frac{x^2}{2-3x}$, x 取哪些值时, (1) y 的值是正数; (2) y 的值是负数; (3) y 的值等于零; (4) 分式无意义.
- 约分: (1) $\frac{-4x^2y}{8xy^2}$; (2) $\frac{x^3-2x^2y}{x^2y-2xy^2}$.
- 如果把分式 $\frac{xy}{x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大 3 倍, 那么分式的值 ()
A. 扩大 3 倍 B. 不变 C. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ D. 缩小为原来的 $\frac{1}{6}$
- 计算:
(1) $\frac{4}{a^2-4} + \frac{2}{a+2} - \frac{1}{a-2}$; (2) $\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+b} \cdot \left[\frac{a+b}{3a} - (a+b) \right]$;
(3) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.
- 计算: $1 - \frac{a-b}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$. 以下是甲、乙两位同学的解答, 请分析和判断谁的解答正确并说明你的理由.
甲生: 原式 $= \frac{(a+2b)-(a-b)}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{3b}{a+2b} \cdot \frac{(a+2b)^2}{a^2-b^2} = \frac{3b(a+2b)}{a^2-b^2}$
乙生: 原式 $= 1 - \frac{a-b}{a+2b} \cdot \frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)} = 1 - \frac{a+2b}{a+b} = \frac{(a+b)-(a+2b)}{a+b} = -\frac{b}{a+b}$
- 某店经销一种商品, 由于进货价降低了 6.4%, 使得利润提高了 8%, 那么, 原来经销这种商品的利润率是多少?
- 已知: $P = \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y}$, $Q = (x+y)^2 - 2y(x+y)$, 小敏、小聪两人在 $x=2, y=-1$ 的条件下分别计算了 P 和 Q 的值, 小敏说 P 的值比 Q 大, 小聪说 Q 的值比 P 大, 请你判断谁的结论正确, 并说明理由.



体验中考

- (重庆课改·2006) 使分式 $\frac{x}{2x-4}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()
A. $x=2$ B. $x \neq 2$ C. $x=-2$ D. $x \neq -2$
- (黑龙江大庆课改·2006) 若边长为 a 的正方形与长、宽分别为 m, n 的矩形的面积相等, 则下列比例式中, 不正确的是 ()