现代数学译丛

多复变函数

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

陈志华　殷慰萍 译

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是多复变函数方面的基本理论的入门读物，但与当前的研究主流配合甚切. 主要内容有多复变函数的基本理论，Hartogs 理论，全纯域和有界域的解析自同构等.

读者对象是从事数学专业的大学高年级学生、研究生、教师以及其它有关的科技工作者.

R. Narasimhan

SEVERAL COMPLEX VARIABLES

The University of Chicago Press

Chicago and London, 1971

现代数学译丛

多 复 变 函 数

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

陈志华 顾慰萍 译

责任编辑 张启男 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985年 1 月第一次印刷 印张：4 5/8

印数：0001—8,100 字数：118,000

统一书号：13031・2781

本社书号：3854・13—1

定价： 1.35 元

目 录

第 1 章

多复变函数的基本性质

符号 我们用 **C**, **R**, **Z**, **N** 分别表示复数域,实数域,整数环和所有非负整数的集合. $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}^n$ 将分别表示域 **C** 上和域 **R** 上的 n 维向量空间,且分别用 $(z_1, \cdots, z_n)$, $z_j \in \mathbf{C}$ 和 $(x_1, \cdots, x_n)$, $x_j \in \mathbf{R}$ 表示它们的点. 我们看待 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 时, 都认为已赋于它们自然拓扑.

$$对\ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n,\ 令\ \|z\| = \sqrt{(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)},$$

$$|z| = \max_{j=1,\cdots,n} |z_j|,$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 内的点亦用类似的符号.

一般用 α, β, $\cdots$表示 **N** 的元素组成的 n-元组; 即 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{N}$. 令

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

$\alpha \leqslant \beta$ 表示 $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j = 1, \cdots, n$ 和 $\alpha < \beta$ 表示 $\alpha \leqslant \beta$ 且$\alpha \neq \beta$.

如果 $a \in \mathbf{C}^n$ 和 $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$, 则以 a 为中心,以 ρ 为(多元)半径的多圆柱是指集合.

$$P(a, \rho) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_1 - a_1| < \rho_1, \cdots, |z_n - a_n| < \rho_n\}.$$

$\bar{P}(a, \rho)$ 表示 $P(a, \rho)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的闭包. 最后,如果 $z \in \mathbf{C}^n$,$\alpha \in \mathbf{N}^n$, 令

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

有时要将 **C** 等同于 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{C}^n$ 等同于 $\mathbf{R}^{2n}$, 则表示

$$z = x + iy, \quad z_j = x_j + iy_j, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad x_j, y_j \in \mathbf{R},$$

$$i = \sqrt{-1}, j = 1, \cdots, n.$$

对于开集 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上的一个连续可微分复值函数 g,令

8510247

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}-i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right),\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}+i\frac{\partial g}{\partial y_j}\right),$$

$$(D^\alpha g)(z)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}g(z).$$

如果 A, B 是一个(Hausdorff)拓扑空间 X 的两个子集，$A\Subset B$ 表示 A 是在 B 内相对紧致的. 通常 $\mathring{A}$ 表示 A 的内点所成之集，$\bar{A}$ 是 A 的闭包，$\partial A=\bar{A}-\mathring{A}$ 表示 A 的边界.

一个开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微分函数所成的类，记之为 $C^\infty(\Omega)$. 我们也称 $C^\infty(\Omega)$ 的每个元素是 C^∞ 函数.

全纯函数

定义 1 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集，f 是 Ω 上的一个复值函数，则称 f 是在 Ω 上全纯的. 如果对 $\forall a\in\Omega$ 都有一个邻域 U 和一个幂级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geqslant 0}c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n},$$

对 $\forall z\in U$，则此级数收敛于 $f(z)$. 今后我们用 $\mathscr{H}(\Omega)$ 表示 Ω 上的全纯函数的集合.

引理 1 (Abel) 假设 $\{c_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{N}^n}$ 是一个复数集，且对 $\rho_1,\cdots,\rho_n>0$ 存在 $M>0$ 使得

$$|c_\alpha|\rho_1^{\alpha_1}\cdots\rho_n^{\alpha_n}\leqslant M\qquad\forall\ \alpha\in\mathbf{N}^n,$$

则级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha(z-a)^\alpha$$

对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j$, $0\leqslant\theta<1$ 是一致收敛的. 而且，导数级数

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}c_\alpha D^\beta(z-a)^\alpha,\quad\beta\in\mathbf{N}^n,$$

亦对 $|z_j-a_j|\leqslant\theta\rho_j$ 是一致收敛的.

系 全纯函数都是无穷可微的. 而且，当 $f(z)=\sum c_\alpha(z-a)^\alpha$ 时，有 $c_\alpha=\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)$.

引理 2 如果 f 在 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上全纯，有 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0,\ j=1,\cdots,n.$

这个引理的逆也成立，将在第 3 章证明此事实.

命题 1（解析开拓原理） 设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是一个连通开集，f 是在 Ω 上全纯. 如果 f 在 Ω 的一个非空开集上恒为零，则 $f\equiv 0$ 在 Ω 上成立.

证 设 $E=\{z\in\Omega\,|\,D^\alpha f(z)=0,\ \forall\ \alpha\in\mathbf{N}^n\}$. 如果令 $E_\alpha=\{z\in\Omega\,|\,D^\alpha f(z)=0\}$，因为 $D^\alpha f$ 是连续的，故 E_α 是一个闭集，所以 $E=\bigcap E_\alpha$ 是闭的.

设 $a\in E$，则有一个 a 的开邻域 U 和一个幂级数 $\sum c_\alpha(z-a)^\alpha$，对 $\forall z\in U$ 它收敛于 $f(z)$. 由引理 1 的系与 $a\in E$，故 $c_\alpha=\dfrac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)=0$. 因此对 $\forall\ z\in U$，有 $f(z)=0$. 所以对 $z\in U$ 和 $\forall\ \alpha\in\mathbf{N}^n$，有 $D^\alpha f(z)=0$. 于是 $U\subset E$，这就得出 E 是开集.

由于 Ω 是连通的，$E\neq\phi$，故 $E=\Omega$.

注 如果存在某个 $a\in\Omega$，$D^\alpha f(a)=0$ 对所有 $\alpha\in\mathbf{N}^n$ 成立，则 $f\equiv 0$.

定义 2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内之开集和 f 是一个 Ω 上的（实值或复值）函数，我们称 f 是实解析的. 如果对每个 $a\in\Omega$ 对应有一个 a 的邻域 U 和一个幂级数 $\sum c_\alpha(x-a)^\alpha$，则对 $\forall\ x\in U$，它收敛于 $f(x)$.

注 （1）如前所述，实解析函数是 c^∞ 的.

（2）解析开拓原理对实解析函数亦成立：证明是同样的.

下面的二个命题是单复变数函数的 Cauchy 公式的直接结果.

Cauchy 公式与某些推论

命题 2（Cauchy 公式） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个开集，f 是 Ω 上的一个全纯函数，$a\in\Omega$ 和 $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$，$\rho_j>0$ 是使得 $\overline{P}(a,\rho)\subset\Omega$，则对 $z\in P(a,\rho)$，有

$$f(z)=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\cdot\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

系 1 在上面的假设下，

$$D^{\alpha}f(z)=\alpha!(2\pi i)^{n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

这里用符号 $\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}$ 代表 $\int_{|\zeta_1-a_1|=\rho_1}\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=\rho_n}$，
这在后面将常用到.

系 2 如果 f 是在多圆柱 $P(a,\rho)$ 内的一个全纯函数，则级数

$$\sum\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)(z-a)^{\alpha}$$

对 $z\in P(a,\rho)$，收敛到 $f(z)$.

注意 如果 φ 在集合 $|\zeta_j-a_j|=\rho_j, j=1,\cdots,n$ 上是连续函数，

$$f(z)=\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}\varphi(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

是在 $P(a,\rho)$ 内全纯且等于

$$\sum c_{\alpha}(z-a)^{\alpha}.$$

这里

$$c_{\alpha}=\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}\varphi(\zeta)\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-a_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.$$

这个等式由下面的公式直接得之

$$\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{-1}=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(z_j-a_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j-a_j)^{\alpha_j+1}};$$

这个级数对 z 在 $P(a,\rho)$ 的一个紧致集上与 $|\zeta_j-a_j|=\rho_j$ 时，是一致收敛的.

命题 3 (Cauchy 不等式) 如果 f 是在 Ω 上的全纯函数和 $\bar{P}(a,\rho)\subset\Omega$，则有

$$|D^{\alpha}f(a)|\leqslant M\alpha!\rho^{-\alpha}.$$

这里 $M=\sup\limits_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}|f(\zeta)|$.

如果写 $\zeta_j-a_j=\rho_je^{i\theta_j}$，则由命题 2 立刻推得此命题.

开映照定理

命题 4（开映照定理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中之一连通开集并且 f 是在 Ω 上的一全纯函数. 假设 f 不是常数，则 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是开的;亦即 f 将 Ω 中之开集映为 $\mathbf{C}$ 中之开集.

证. (a) $n=1$ 时可以假设 $0\in\Omega$ 与 $f(0)=0$. 只要证明 $f(\Omega)$ 是 0 的邻域就够了. 设 $\rho>0$ 这样选取,使得 $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leqslant\rho\}\subset\Omega$ 且对 $|z|=\rho$，有 $f(z)\neq 0$. 设 $\delta=\inf\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$，则 $\delta>0$. 设 $W\in\mathbf{C}$，$W\bar{\in} f(\Omega)$ 和 $|W|<\delta$，则

$$\varphi(z)=(f(z)-W)^{-1}$$

是在 Ω 上全纯. 由命题 3

$$\frac{1}{|W|}=|\varphi(0)|\leqslant\sup_{|z|=\rho}|\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{\delta-|W|},$$

所以 $|W|\geqslant\frac{1}{2}\delta$. 因此 $\left\{W\in\mathbf{C}\mid |W|<\frac{1}{2}\delta\right\}\subset f(\Omega)$.

(b) **一般情况** 设 $a\in\Omega$ 和 U 是 a 的一个凸邻域,且 $U\subset\Omega$, 由命题 1, $f|U\neq f(a)$. 设 $b\in U$, $f(b)\neq f(a)$, 考虑

$$D=\{z\in\mathbf{C}\mid a+z(b-a)\in U\}.$$

设 $g(z)=f(a+z(b-a))$，$z\in D$，则 D 是一个包含 0, 1 的凸集,并且 $g(0)=f(a)\neq f(b)=g(1)$. 因此，由 (a) 推出，$g(D)$ 是 $f(a)$ 的一个邻域. 从 $F(U)\supset g(D)$ 推出命题

系 1（极大模原理） 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内有界连通开集，且 f 是 Ω 上的全纯函数,令 $M=\sup\limits_{\zeta\in\partial\Omega}\overline{\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\Omega}}|f(\zeta)|$，如果 f 不是常数,则有 $|f(z)|<M\ \ \forall z\in\Omega$.

证 可以假设 $M<\infty$. 在 $\bar{\Omega}$ 上定义函数 φ 为

$$\varphi(z)=|f(z)|,\quad z\in\Omega,\quad \varphi(\zeta)=\overline{\lim_{z\to\zeta,z\in\Omega}}|f(z)|.$$

$\varphi(z)$ 在紧致集 $\bar{\Omega}$ 上是上半连续，因此是在 $\bar{\Omega}$ 上有界. 所以由命题 4 $f(\Omega)=U$ 是一个有界开集（假定 f 不是常数). 进一步，因为 f 是开的，$\forall W\in\partial U$ 具有 $W=\lim f(z_\nu)$，这里 $\{z_\nu\}$ 是收敛于 $\partial\Omega$ 的某点的 Ω 内的点列. 因此 $\partial\bar{U}\subset\{W\in\mathbf{C}\mid |W|\leqslant M\}$. 由

于U是有界而且开的，故$U\subset\{W\in \mathbf{C} \mid |W|<M\}$. 证毕.

系 2 如果f在$\mathbf{C}^n$内的连通开集Ω上全纯并有$a\in\Omega$使$|f(z)|\leqslant|f(a)|$对$\forall z\in\Omega$成立，则f是一个常数.

证 如果f不是常数，$f(\Omega)$将是包含在$\{W\in\mathbf{C}\mid |W|\leqslant|f(a)|\}$中之开集，因此将包含在$\{W\in\mathbf{C}\mid |W|<|f(a)|\}$中，这是荒谬的.

Weierstrass 定理和 Montel 定理

命题 5 （Weierstrass 定理） 设Ω是$\mathbf{C}^n$内一个开集，设$\{f_\nu\}$是Ω上的全纯函数列，它们在Ω的每个紧致子集上是一致收敛的，则$f=\lim f_\nu$是在Ω上全纯，对$\alpha\in\mathbf{N}^n$，$\{D^\alpha f_\nu\}$在Ω的每个紧子集上收敛于$D^\alpha f$.

证 设$a\in\Omega$，$\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$使$\bar{P}(a,\rho)\subset\Omega$并且设

$$|z_j-a_j|<\frac{1}{2}\rho_j,$$

则

$$\begin{aligned}f(z)&=\lim f_\nu(z)\\&=\lim(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f_\nu(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-1}\alpha\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n.\end{aligned}$$

由命题 2 的系 2，f是在a的邻域内全纯. 而且当

$$|z_j-a_j|\leqslant\frac{1}{2}\rho_j$$

时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)&=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=\lim(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_j-a_j|=\rho_j}f_\nu(\zeta)\prod(\zeta_j-z_j)^{-\alpha_j-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n\\&=\lim\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f_\nu|z).\end{aligned}$$

命题 6 （montel 定理） 设$\mathscr{F}=\{f\}$是Ω上的一个全纯函数族，且对任一紧致集$K\subset\Omega$，存在$M=M_K>0$，使

$$|f(z)| < M \qquad 对 \forall z \in K, \forall f \in \mathscr{F},$$

则任一序列 $\{f_\nu\}$, $f_\nu \in \mathscr{F}$ 包含有一个子序列，它们在 Ω 的紧致子集上一致收敛.

证 对 $a \in \Omega$ 和 $f \in \mathscr{F}$，设 $\sum c_\alpha(f, a)(z-a)^\alpha = f(z)$ 在 a 的一个邻域内成立. 由命题 2 的系 2，这个级数在一个与 f 无关的多圆柱 $P(a, \rho)$ 内收敛. 进一步，由命题 3 和对 $\mathscr{F}$ 的假设，有 $c > 0$ 使得

$$|c_\alpha(f, a)| \leqslant c r^{-\alpha}.$$

$r = (r_1, \cdots, r_n)$ 适合 $0 < r_j < \rho_j$. 因此，如果 $\{f_\nu\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的元素所成的序列，我们能用对角线方法，找到一个子序列 $\{f_{\nu_k}\}$，使当 $k \to \infty$ 时，对 $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$ $c_\alpha(f_{\nu_k}, a)$ 收敛. 这就得到 $\{f_{\nu_k}\}$ 在 a 的一个邻域中一致收敛. 事实上，设 $U = P(a, r')$，使 $0 < r'_j < r_j < \rho_j$，则对 $\forall z \in U$，

$$|f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_l}(z)| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant N} |c_\alpha(f_{\nu_k} - f_{\nu_l}, a)| + 2C \sum_{|\alpha| > N} r'^{\alpha} r^{-\alpha}.$$

从 $r'_j < r_j$，当 $N \to \infty$ 时，上式右边最后一项 $\to 0$（关于 k, l 一致的）. 进一步对每个 α，当 $k, l \to \infty$ 时，有 $c_\alpha(f_{\nu_k} - f_{\nu_l}, a) \to 0$. 这样得到

$$\sup_{z \in U} |f_{\nu_k}(z) - f_{\nu_l}(z)| \to 0 \quad 当 k, l \to \infty.$$

如果 $\{U_p\}_{p=1,2,\cdots}$ 是覆盖 Ω 的开集序列，$\mathscr{F}$ 的元素所组成的任一序列，对每个 p 都有一个子序列在 U_p 上一致收敛. 因此对任一序列 $\{f_\nu\}$, $f_\nu \in \mathscr{F}$，再用对角线法，可找出一个子序列在每个 U_p 上都是一致收敛的. 这个序列显然在 Ω 的每个紧致子集上一致收敛.

定义 3 一个在连通开集 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 中的子集 A 称为是一个唯一性集，如果任何 Ω 上的全纯函数 f 在 A 上为 0，则 $f \equiv 0$ 在 Ω 上成立.

例 集合 A 如果有 $\mathring{A} \neq \phi$，则是唯一性集.

命题 7 (Vitali) 设 $\{f_\nu\}$ 是在连通开集 Ω 上的全纯函数序列和 A 是 Ω 内的唯一性集. 假设 $\{f_\nu\}$ 是在 Ω 上一致有界（$|f_\nu(z)| < M$ 对所有 $z \in \Omega$，所有 ν 成立），且对 $\forall a \in A$ 有 $\{f_\nu(a)\}$ 收敛，则

$\{f_\nu\}$是在Ω的紧致子集上一致收敛的.

证 如果$\{f_\nu\}$不在Ω的紧致子集上一致收敛，则能找到紧致子集$K\subset\Omega$和$\{\nu\}$的子序列$\{\nu_k\}$，$\{\mu_k\}$以及一个$\delta>0$，$\{z_k\}\subset K$使得

$$|f_{\nu_k}(z_k)-f_{\mu_k}(z_k)|\geqslant\delta.$$

由命题6，如果有必要可用$\{\nu_k\}$和$\{\mu_k\}$的子序列代替$\{\nu_k\}$和$\{\mu_k\}$，则可假定$\{f_{\nu_k}\}$和$\{f_{\mu_k}\}$是在Ω的紧致子集上一致收敛的(分别收敛于全纯函数f和g)并且$z_k\to z_0\in K$，则

$$|f(z_0)-g(z_0)|\geqslant\delta>0.$$

另一方面,对$\forall\, a\in A$，由$\{f_\nu(a)\}$收敛,所以

$$f(a)-g(a)=\lim\{f_{\nu_k}(a)-f_{\mu_k}(a)\}=0.$$

由于A是唯一性集,故$f-g\equiv0$，这是矛盾的.

命题8 设B是平面$\mathbf{C}$上的半带形 $a<\mathrm{Re}z<b$，$\mathrm{Im}z>0$，设Ω是$\mathbf{C}^{n-1}$中的一个连通开集，$\Omega=B\times\Omega'$和f是在Ω上的一个有界全纯函数. 假设对某个$c(a<c<b)$，有

$$\lim_{y\to\infty}f(c+iy,z')=g(z')$$

存在，而且对Ω'的任一紧致子集内的z'是一致的，则对$\forall\varepsilon>0$的区间$a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon$和$\Omega'$上的任一紧致子集,当$y\to\infty$时$f(x+iy,z')\to g(z')$是一致的.

证 设f_ν是Ω上的全纯函数,它的定义是

$$f_\nu(z,z')=f(z+i\nu,z'),$$

则$\{f_\nu\}$是一致有界的. 由假设条件

$$\lim_{y\to\infty}f(c+iy,z')=g(z'),$$

表明

$$\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(z,z')=g(z')$$

在集合$A=\{(z,z')\in\Omega\,|\,\mathrm{Re}z=c,0<\mathrm{Im}\,z<1\}$上成立. 由于$A$是一个唯一性集,故由命题7推得本命题.

第 2 章

解析开拓：初等理论

全纯函数从多圆柱边界的开拓

显然，如果 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的一个连通开集，$a\in\mathbf{C}-\Omega$，则有一个 Ω 上的全纯函数 f 不能解析开拓到 a 点(例如 $f(z)=(z-a)^{-1}$)。但这一事实在 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 内不再成立.

定理 1 (Hartogs) 设 $P=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|z_j|<1\}$，$n>1$，设 V 是 ∂P 的一个邻域使得 $V\cap P$ 是连通的 (∂P 有一个如此的邻域所成的基本系)，则每个在 V 上全纯的函数 f，有一个在 $P\cup V$ 上的全纯函数 F，使 $F|V=f$.

证 设 $\varepsilon>0$，它使如下之集 $A\subset V$

$$A=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,1-\varepsilon<|z_1|<1,\ |z_j|<1\ j\geqslant 2\}\cup\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,1-\varepsilon<|z_2|<1,\ |z_j|<1\ j\neq 2\},$$

设 $z'=(z_2,\cdots,z_n)$，当 $|z'|<1$，函数 $z_1\longmapsto f(z_1,z')$ 是在环 $\{z_1\in\mathbf{C}\,|\,1-\varepsilon<|z_1|<1\}$ 上的一个全纯函数，所以有

$$f(z_1,z')=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}a_\nu(z')z_1^\nu.$$

对 $\forall\,\nu\in\mathbf{Z}$，$a_\nu(z')$ 是在 $P'=\{|z_2|<1,\cdots,|z_n|<1\}$ 全纯. 而现在当 $1-\varepsilon<|z_2|<1$，$|z_3|<1$，$\cdots$，$|z_n|<1$ 时，函数 $z_1\longmapsto f(z_1,z')$ 是在圆盘 $|z_1|<1$ 内全纯，所以它的 Laurent 级数不包含有 z_1 的负幂次项；即 $a_\nu(z')=0$，对 $\nu<0$ 和 $1-\varepsilon<|z_2|<1$ 成立. 由第 1 章命题 1，对 $\nu<0$，$z'\in P'$ 有 $a_\nu(z')\equiv 0$. 现在定义

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & z\in V\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z')z_1^\nu, & z\in P,\end{cases}$$

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')z_1^\nu$ 是在 P 的紧致子集上一致收敛的幂级数，所以是全纯的，而且在 $V\cap P$ 的一个非空开子集上等于 f，因 $V\cap P$ 是连通的，所以在整个 $V\cap P$ 上等于 f.

Reinhardt 域

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个区域(连通开集). 我们称 Ω 是一个 Reinhardt 域，如果 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$ 和 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\mathbf{R}$，则有$(e^{i\theta_1}z_1,\cdots,e^{i\theta_n}z_n)\in\Omega$.

定理 2 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 内的一个 Reinhardt 域，则对 Ω 上任一全纯函数 f，有一个 "Laurent 级数"

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha ,$$

它是在 Ω 的紧致子集上一致收敛于 f，而且 a_α 是由 f 唯一确定的.

证 先证唯一性. 设 $w\in\Omega$ 是 Ω 中的一点，而且它的坐标为 $(w_1,\cdots,w_n)$，$w_j\neq 0$，则从级数 $\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$ 在 Ω 的紧致子集上一致收敛，可以令 $z_j=w_je^{i\theta_j}$，然后乘上 $e^{-i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}$ 进行逐项积分(沿 $-\pi\leqslant\theta_j<\pi$). 对 $\forall\,\alpha\in\mathbf{Z}^n$，得到

$$a_\alpha = w^{-\alpha}(2\pi)^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} f(w_1e^{i\theta_1},\cdots,w_ne^{i\theta_n})\, e^{-i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

为了证明上面定理中所讲的展开式的存在性，首先注意到如果 $D=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,r_j<|z_j|<R_j,\ 0<r_j<R_j,\ j=1,\cdots,n\}$ 和 f 是在 D 上全纯，则由单复变函数的 Laurent 展开的迭代，得到 f 的一个 Laurent 级数的展式.

设 $w\in\Omega$，取 $\varepsilon>0$ 充分小，因 Ω 是一个 Reinhardt 域，故集合

$$D(w,\varepsilon)=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|w_j|-\varepsilon<|z_j|<|w_j|+\varepsilon\}$$

包含在 Ω 内. 由于 $D(w,\varepsilon)$ 是具有上述 D 的形式的一个集合，故有一个 Laurent 展开

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n} a_\alpha(w)z^\alpha = f(z), \qquad z\in D(w,\varepsilon),$$

它是在 u 的一个邻域内一致收敛于 f 的. 现在如果有 $w' \in D(w, \varepsilon)$ 和 $\sum a_\alpha(w')z^\alpha$ 是对应于 w' 在集合 $D(w', \varepsilon) \subset \Omega$ 中的展开，则前面的唯一性论断说明 $a_\alpha(w) = a_\alpha(w')$.

因此对 $\forall \alpha \in \mathbf{Z}^n$，函数 $w \longmapsto a_\alpha(w)$ 在 Ω 上是局部常值的. 由于 Ω 是连通的，故 $a_\alpha(w) = a_\alpha$ 是与 w 无关的. 因此级数

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$$

在 Ω 的任一点的邻域内一致收敛于 $f(z)$，因此当 z 在 Ω 的任一紧致子集时，它一致收敛于 $f(z)$.

系 1 设 Ω 是一个 Reinhardt 域，使得对每个 j, $1 \leqslant j \leqslant n$，有一个点 $z \in \Omega$，它的第 j 个坐标是 0，则 Ω 内的任一全纯函数 f 允许有一个展开

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha z^\alpha,$$

它在 Ω 的紧致子集上一致收敛.

系 2 设 Ω 是一个 Reinhardt 域，使得对每个 j; $1 \leqslant j \leqslant n$，有一点 $z \in \Omega$，它的第 j 个坐标是 0，则 Ω 上的任一全纯函数 f，有一个在集合

$$\tilde{\Omega} = \{(\rho_1 z_1, \cdots, \rho_n z_n) \mid 0 \leqslant \rho_j \leqslant 1, (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega\}$$

上的全纯扩充 F（即有一个在 $\tilde{\Omega}$ 上唯一的全纯的函数 F，使 $F|\Omega = f$).

系 3 设 f 全纯于

$$r < |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R, \qquad 这里\ 0 < r < R,$$

则 f 能全纯扩充(开拓)到 $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R$.

引起的问题是是否能构造一个全纯函数或多个全纯函数的"存在区域". 在本章将给出一个全纯函数的存在区域的构造，在后面的章中将给出对一族全纯函数的存在区域的构造.

设 $a \in \mathbf{C}^n$. 考虑对子集 (U, f)，这里 U 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集，$a \in U$，f 是在 U 上全纯的函数. 两个这样的对子 (U, f) (V, g) 称之为等价，如果存在 a 的一个邻域 W，$W \subset V \cap U$ 使 $f|W =$

$g|W$. 关于这个等价关系的一个等价类称为在 a 点的全纯函数芽. 当不致引起混淆时，我们常常欢喜用一个表示这个等价类的函数来等同这个等价类. 注意一个在 a 点的芽 f_a 在 a 点的值记为 $f_a(a)$，同时 f_a 的任意次导数在 a 点的值亦是有明确定义的.

由 $\mathcal{O}_a$ 表示所有在 a 点全纯函数芽的集合. $\mathcal{O}_a$ 是一个环.

层 $\mathcal{O}$ 考虑 $\mathcal{O} = \bigcup_{a\in\mathbf{C}^n}\mathcal{O}_a$. 如果 $f\in\mathcal{O}_a$，则有一个映照 $p:\mathcal{O}\to\mathbf{C}^n$ 定义为 $p(f) = a$. 今在 $\mathcal{O}$ 上定义拓扑如下：设 $f_a\in\mathcal{O}_a$ 并设对子集 (U, f) 是定义 f_a 的. 令 $N(U, f) = \{f_b|b\in U\}$，这里 f_b 是由对子集 (U, f) 所定义的在 b 点的芽. 当 (U, f) 遍历所有定义 f_a 的对子集时，所有集 $N(U, f)$ 构成 f_a 的邻域的基本系. 这样的 $\mathcal{O}$ 称为 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数的芽层.

引理 1 映照 $p:\mathcal{O}\to\mathbf{C}^n$ 是连续的.

证 设 $f_a\in\mathcal{O}_a$，则 $p(f_a) = a$. 设 V 是 a 的一个邻域，和 (U, f) 是一个定义 f_a 的对子集，则 $p(N(U\cap V, f))\subset V$.

引理 2 $\mathcal{O}$ 定义了上述拓扑以后，是一 Hausdorff 空间.

证 设 f_a, $g_b\in\mathcal{O}$, $f_a\neq g_b$. 当 $p(f_a)\neq p(g_b)$ 时，能找到在 $\mathbf{C}^n$ 内的分别包含 $p(f_a)$, $p(g_b)$ 的不相交的开集 Ω_a, Ω_b，则 $p^{-1}(\Omega_a)$, $p^{-1}(\Omega_b)$ 是分别包含 f_a, g_b 的不相交开集.

如果 $p(f_a) = p(g_b)$，则 f_a, $g_b\in\mathcal{O}_a$. 设 (U, f), (U', g) 分别为定义 f_a, g_b 的对子集和 V 是 a 的一个连通邻域且 $V\subset U\cap U'$，则 $N(V, f)$, $N(V, g)$ 是不相交的. 事实上，如果 $x\in N(V, f)\cap N(V, g)$，则 f 和 g 在 $p(x)$ 的一个邻域相同，由 V 是连通的，故 $f\equiv g$ 在 V 上成立；特别 $f_a = g_b$，故与假设矛盾.

引理 3 映照 $p:\mathcal{O}\to\mathbf{C}^n$ 是局部同胚；即 $\forall x\in\mathcal{O}$ 有一个邻域 N 使 $p|N$ 是同胚于 $\mathbf{C}^n$ 的一个开集.

证 如果 $x\in f_a$ 和 $N = N(U, f)$，这里 (U, f) 定义 f_a，则 $p(N) = U$. $p|N$ 之逆的定义是由 $b\longmapsto f_b$, $b\in U$, f_b 如同前面所述的 (U, f) 所定义的 b 点的芽所给出的.

在进一步叙述本章主题之前，我们将讨论具有引理 3 内性质

的空间某些一般性质.

定义 1 一个 Hausdorff 拓扑空间 X 称为是一(实) n 维流形，如果 X 的每点有一个开邻域同胚于 $\mathbf{R}^n$ 内的一个开集.

设 X 是一个 n 维流形，X' 是一个 Hausdorff 空间. 我们说连续映照 $p: X' \to X$ 是一个局部同胚，如果对每点 $a' \in X'$，有一个 a' 的开邻域 U' 使 $p(U')$ 是在 X 内开的且 $p|U'$ 是到 $p(U')$ 上的同胚. 注意此时 X' 自然地带有一个流形结构.

如果 $p: X' \to X$ 是一个局部同胚，则称 (X', p, X) 是一个 X 上的(非分支)域. 当在上下文中已将 p 交代清楚时，就称 X' 是 X 上的域.

设 $p: X' \to X$ 是一个 X 上的域和 Y 是一个 Hausdorff 拓扑空间，$f: Y \to X$ 是一个连续映照. f 到 X' 的一个提升是一个连续映照 $f': Y \to X'$ 使得 $p \circ f' = f$.

注意提升并非总是存在，且如果存在时也未必是唯一的.

引理 4 设 Y 是连通的，$f_1, f_2: Y \to X'$ 是 f 的二个提升. 假设对某点 $y_0 \in Y$，有 $f_1(y_0) = f_2(y_0)$，则 $f_1 \equiv f_2$.

证 设 $E = \{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\}$，显然 E 是闭的和非空的. 如果 $a \in Y$，且 $b = f_1(a) = f_2(a)$，设 U' 是 b 的一个邻域使得 $p|U'$ 是到 X 的一个开集 U 上的同胚. 设 V 是 a 的一个邻域，使得 $f_1(V), f_2(V) \subset U'$，$f(V) \subset U$，则显然有

$$f_1|V = (p|U')^{-1} \circ f = f_2|V,$$

所以 E 是开的. 因为 Y 是连通的，故 $E = Y$，所以 $f_1 \equiv f_2$.

定义 2 设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间. X 内的一条弧是一个连续映照 $\gamma: I \to X$，这里 $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$. X 内的一条围线是一条弧 γ，适合 $\gamma(0) = \gamma(1)$. 对一条弧 γ，$\gamma(0)$ 称之为起点，$\gamma(1)$ 称之为终点.

定理 3(单值定理) 设 $I = [0, 1]$ 和 $p: X' \to X$ 是 X 上的一个域，$a \in X$ 和 $a' \in p^{-1}(a)$. 设 $F: I \times I \to X$ 是一连续映照，使得对于 $\forall u \in I$，有 $F(0, u) = a$. 对 $\forall u \in I$ 令 γ_u 是 X 内的弧 $t \to F(t, u)$.