

# 结构抗震分析

钱培风 著

地震出版社

# 结构抗震分析

钱 培 风 著

地 震 出 版 社

1 9 8 3

## 内 容 简 介

本书共分两编。第一编为结构动力学，简明系统地介绍了单自由度、多自由度、无限自由度体系的振动、波在杆件中的传播和结构动力性能的实用分析法。此外，还分析了一些具体结构的动力性能。第二编为结构抗震分析，首先比较系统地叙述了水平地震力理论，并透过介绍具有某些特点的国家的规范，说明了各国学者们对某些问题的不同看法及处理情况。作者的观点也在相应的章节中作了阐述。若干年来的传统观点一直认为水平地震力对结构破坏起决定性作用，本书根据各种结构的大量破坏现象证明，实际上是竖向地震力起主要作用。最后介绍国内外一些学者通过对大量震害的分析研究，提出的抗震措施。

本书对于从事抗震设计的工程技术人员及科研、教学人员都有一定参考价值。

## 结 构 抗 震 分 析

钱培凤 著

\*

地震出版社出版

北京复兴路 63 号

新村印刷厂印刷

北京新华书店发行所发行

各地新华书店经售

\*

787×1092 1/16 26 1/4 印张 650 千字

1983 年 4 月第一版 1983 年 4 月第一次印刷

印数 0,000—6,000 册

统一书号：13180·118 定价：4.00 元

## 前 言

本书是笔者根据二十年来在北京、成都、哈尔滨及昆明等地给一些工程技术人员及青年科研人员讲课时使用的讲义加以补充、修改和整理而成的。

对强地震区的建筑结构进行抗震计算已有近百年的历史。日本的大森房吉教授在本世纪之初首先提出的计算方法，完全没有考虑结构的动力性能，后人都称之为静力理论。四十年之后，美国的 M. A. Biot 才开始提出至今仍然被广泛采用的反应谱理论。以后学者们还不断地发现和提出新问题，并加以研究，也取得了十分丰富的成果。它表明结构所受水平地震力的大小，除了地震的强度之外，还与结构的动力性能有关。最近二十多年对结构超过弹性范围后的非线性地震反应作了很多的研究，使水平地震力的计算越来越细致，但用实际震害来检验，问题还不少。笔者认为主要是有些基本假设还未搞清，例如在强地震作用下，结构的阻尼到底有多大？力学性能是否与静力试验及微振情况相同？地基柔性将产生多大的消能作用？结构对地基的压抑与反馈作用是不是微不足道？这一系列问题看来都不是短时能够搞清的。因此，虽然学者们的水平很高，工作非常积极，设备日益先进，现在已收到很多强震记录，计算技术与计算工具也十分发达，考虑的问题也很周密，但人们对于地震工程这一学科仍认为非常粗糙。世界各国的抗震规范，差异极大。有些国家虽然对地震工程很有研究，但长期都是采用静力理论。有些国家虽然同是采用反应谱理论，在定量甚至定性上都有很大的矛盾。有些国家的规范同时提两种计算方法（而且都按反应谱理论）相差达 200% 以上也能心安理得。同一问题有的国家由东向西改动，而另一些国家却刚好是由西向东改动。相信大家都有各自的理由和根据，很难辨别谁是谁非。笔者认为其中可能存在一些带根本性的问题，等待人们去发现和研究。

大森房吉的计算方法从理论上讲是过时的，但有些国家，例如日本的规范长期来一直在采用（或稍加改良）。笔者认为这不是保守，而是具有一定理由的。所以本书想从静力理论开始，或简或详地结合有一定特点的某些国家的规范进行介绍和讨论，使读者对地震力的发展情况以及对某些问题的不同看法、处理办法与存在问题等有一个大致的了解。对于水平地震力的某些问题，笔者也曾进行过一些研究，也将在适当的地方加以介绍。

地震时地面的水平及竖向运动本来是同时存在的，但若干年来的传统观点一直认为水平地震力对结构的破坏起决定性作用，竖向地震力的影响微不足道。1957 年笔者分析一些日本砖烟囱的震害资料之后，发现有些破坏现象用水平地震力不能很好地解释，它是地面竖向运动引起烟囱的纵波应力造成的，因而写成了一篇文章[24]，在当年第一次全国抗震会议上宣读，指出竖向地震力的作用很大，应该重视。这一观点是否有些道理，只有用实际震害来检验。近十多年来我国发生了多次大地震，特别是 1975 年的海城地震及 1976 年的唐山地震，各种结构的震害资料都极丰富。我国很多优秀的工程人员及科研人员都从实际的震害中发现了竖向地震力的显著作用（见文献[60]、[93]、[94]、[95]、[97]、[101]、[102]、[103]、[104]、[107]、[108]等）。

这几年我们继续对大量实际震害做了一些分析工作，在结构类别上包括对水平地震力十

分敏感的高塔等倒摆式结构、烟囱等高柔结构及房屋等矮胖结构；在建筑材料上包括脆性的砖石结构和韧性较大的钢筋混凝土与钢结构；从震害现象上讲，包括结构本身的破坏，置于地面上物体的跳动、移动与转动以及房屋的构件（或放于其上的物体）的移动与跳动等。根据分析的结果我们认为水平地震力起决定性作用的传统观点是错误的，实际是竖向地震力起主要作用。这一观点，在 1975 年的海城地震震害经验交流会上，每一会议小组都曾约作者去介绍，很多与会者列举了一些实际震害加以支持。这几年笔者也曾应北京市科协、石油部、化工部、江苏省土木工程学会、云南工学院、昆明市建委、武汉力学学会、土建学会、建材学院、桥梁研究所、水电学院以及北京、唐山各工程单位之邀作过多次报告，都得到大家的支持。1976 年国际上著名的地震工程专家 E. Rosenblueth 来我国访问，对我们的观点也表示全部同意。他回国后于 1977 年写了一篇文章，列举国外的很多震害现象说明竖向地震力的效应很大 [52]。1978 年笔者参加国家建委组织的结构抗震考察组到多地震的墨西哥、秘鲁进行考察。秘鲁天主教大学的 Vargas 主任教授及工程大学的 Koroiva 教授也认为秘鲁近几年发生的大地震产生的一些震害表明竖向地震力起着主要作用。1972 年尼加拉瓜马那瓜地震时，学者们也认为有些建筑的破坏是竖向地震力造成的 [106]。1977 年罗马尼亚地震，经一些高水平的专家分析很多破坏及倒塌的震害也得到同样的结论 [109]。钢筋混凝土结构柱的破坏，常常是两端的混凝土破碎崩落，钢筋呈灯笼状后，上部仍保持原位。日本早稻田大学谷资信研究室通过震害发现竖向振动对混凝土建筑物柱子的破坏是严重的 [116]。其它国家进行研究的学者也不少，而且已开始发表论文。James C. Anderson, Vitelmo V. Bertero 教授输入两个地震记录计算一个多层单跨框架（还考虑塑性变形，但竖向未考虑阻尼），梁中点的最大竖向加速度约为地面最大加速度的 10 倍，他们分析的竖向加速度谱值，最大的动力系数达 15.6 及 11.3 [112]。很多国家的规范也规定了按传统观点无法理解的竖向地震力之值。

地震时结构的破坏，实际上是在水平地震力与竖向地震力共同作用下产生的。但有很多震害现象表明竖向地震力的作用往往只是降低结构的抗震能力，从破坏现象看不出它的影响，因此常常被人忽视；水平地震力的作用，则往往明显地表现为破坏原因，所以很容易引起人们的重视。例如桥梁或屋架要发生移动，须要克服由于自重引起的摩擦阻力与固定螺栓的抗剪能力等，没有很大的水平地震力是不能发生的。但若向上的竖向地震力很大，使摩擦力大大降低或完全消失甚至变为螺栓受拉，则很小的水平地震力也能将螺栓剪断。但不管竖向地震力的影响多大，人们从震害现象一般都只看见水平地震力的作用。又如砖砌体的抗剪强度与竖向压力的大小有关。当地震竖向拉力接近、特别是大于砌体的自重压力时，砌体抗剪强度的降低就更加显著。但地震时砖烟囱、砖水塔及砖墙等出现斜缝或错位现象时，人们很少想到竖向地震力的影响。再如钢筋混凝土水塔或其它构筑物等，如果发生一边表现为受压（或受拉）破坏时，人们也立即想到弯矩的作用。事实上也可能是在很大的轴向压力（或拉力）作用下，加上一定的弯矩压应力（或拉应力）而产生受压（或受拉）的破坏现象。

长期以来人们收到的强震记录，地面竖向加速度都比水平加速度小，一般常为  $1/2$  至  $2/3$  左右，因此认为竖向地震力很小，可以不必考虑。首先我们认为即使地面竖向加速度较小，并不一定表明竖向地震力就比水平地震力小。因为影响地震荷载大小的，还有阻尼等多种因素。文献 [112] 分析的结果，就可以说明这一问题。其次是地面竖向加速度是否真比水平加速度小？小多少？似乎还值得进一步研究。很多资料都记载有地面物体上跳的现象（有些地震的震级并不大）[110]。我国最近十多年的多次大地震此类现象也不少，但长期来却没有收



到地面竖向加速度远大于 $g$ 的记录。1976年5月17日苏联 Zazli 地震记录, 开始得到地面竖向加速度为 $1.3g$ , 水平加速度为 $0.6g$ 及 $0.8g$ [110]; 1979年10月15日美国收到的 Imperial Valley 地震记录, 竖向约为 $1.75g$ , 水平约为 $0.6g$ 及 $0.8g$ [119]。这两个地震记录的竖向加速度都远大于水平加速度, 如果这是由于仪器改进或测震技术改进的原因, 我们有理由怀疑从前的记录可能失真较严重。强震仪在高频段常失真。因为结构竖向振动的周期都很短, 所以高频震动对竖向地震力是十分重要的。

人们低估竖向地震力严重作用的另一原因, 是认为结构物承受着很大的自重。设计时对竖向强度有很大的储备, 当竖向地震力向下时问题不大; 竖向地震力向上时有自重压力与之抵销也不怕。前面曾经说过: 当竖向地震力大于自重时砖砌体的抗剪强度将大大降低甚至全部消失, 屋架及桥梁抗移动的能力也大大削弱, 因而将造成严重破坏。还有钢筋混凝土柱, 当竖向地震力拉断混凝土后, 仅由几个钢筋承担全部拉力, 很容易达到塑性变形, 从而引起各种各样的破坏。笔者认为表面看去上述的这种想法似乎合情合理, 实际上并不是这么回事。只有当竖向地震应力远小于自重应力, 才不致引起大的危害。

竖向地震力到底有多大? 它对各种结构的破坏到底起多大作用? 是它还是水平地震力起主要作用? 不仅是理论问题, 对于研究经济合理的抗震措施, 也有极为重要的意义。例如对于防止桥梁及各种单层厂房等的屋架移位, 按水平地震力起决定性作用的观点, 必然是加强屋架与柱头及桥梁与桥墩之间的联接。根据我们的分析, 这种措施反而会起着很不好的作用。按竖向地震力起主要作用的观点, 应该不加任何联接, 地震时让它们能自由上抛(当然还要采取另一些措施防止移位)。另外, 根据渐的观点还可以研究很多有经济及实用价值的不同于从前的抗震措施。由此可见这一研究工作的意义是很大的。

砖这种建筑材料, 在我国广大地区仍在大量使用, 它本身具有很多的优点, 但抗震性能却很差。很多学者提出的各种旨在增加它的抗震性能的措施, 都需要使用大量的钢材、水泥, 不仅造价高, 而且施工也困难。为了解决砖结构的抗震问题, 1957年全国第一次抗震会议上笔者曾提出过一种工字砖。按照抗震规范计算的结果, 说明不用一根钢筋, 也不多花钱(甚至比普通砖还少花钱), 就可以提高抗震能力一倍至数倍。根据竖向地震力起主要作用的观点, 它的抗震性能还要高, 对于四、五层以下的砖石房屋抵抗八、九度地震, 毫无问题。如果再增加一些措施, 有可能抗至十度。这些将在第二编第四章中介绍。

我国广大的地震区数以亿计的农村居民, 居住的是抗震性能很差的农村建筑。对农村建筑抗震研究显然是非常重要的, 也是很有前途的。殷切希望能有一大批同志从事此项工作。本书第二编第八章中将介绍笔者过去看到和听到的有关农村建筑的一些抗震经验。

1975年我们将烟囱竖向地震力的研究报告寄请钱令希教授指教, 他虽在病中, 仍细致地审阅了全文, 提出了很多宝贵意见, 给了我们很大的鼓舞。谨向大家敬仰的、诲人不倦的钱令希教授致以衷心的感谢。

书中的一些照片是苏梅芳、蒋纯秋、韩加谷、钟益村、吴家骝、施耀新、白春章、韩清宇、蔡醒麒、倪继森、钟素琼、杨文忠、郭纲平、陈达生、徐祥文、高云学及王倩梅等同志赠送的; 插图是黄泉生同志代绘的, 谨表示感谢。

# 目 录

## 第一编 结 构 动 力 学

|                                                 |         |
|-------------------------------------------------|---------|
| 第一章 单自由度体系的振动 .....                             | ( 3 )   |
| § 1.1 单自由度体系的自由振动 .....                         | ( 3 )   |
| § 1.2 单自由度体系的强迫振动 .....                         | ( 13 )  |
| § 1.3 瞬时常量力、任意干扰力及周期性干扰力引起的强迫振动 .....           | ( 19 )  |
| § 1.4 能量耗损系数 .....                              | ( 21 )  |
| § 1.5 有侧移单层刚架的动力分析 .....                        | ( 23 )  |
| 第二章 多自由度体系的振动 .....                             | ( 25 )  |
| § 2.1 无阻尼的自由振动 .....                            | ( 25 )  |
| § 2.2 各振型间的重要特性 .....                           | ( 29 )  |
| § 2.3 有阻尼的自由振动 .....                            | ( 33 )  |
| § 2.4 多自由度体系的强迫振动 .....                         | ( 35 )  |
| § 2.5 多层刚架发生侧移的自由振动 .....                       | ( 42 )  |
| 第三章 无限自由度体系的振动与波动 .....                         | ( 46 )  |
| § 3.1 具均布质量的弹性杆件的横向挠曲自由振动 .....                 | ( 46 )  |
| § 3.2 考虑阻尼作用的自由振动、振动方程的位移式及各主振型间的<br>主要特性 ..... | ( 51 )  |
| § 3.3 分析连续架及连续梁的转角传递法及转角影响公式 .....              | ( 54 )  |
| § 3.4 连续梁与连续架无侧移的频率方程 .....                     | ( 59 )  |
| § 3.5 剪力影响公式及有侧移刚架的频率方程 .....                   | ( 63 )  |
| § 3.6 连续弹性支承梁的横向自由振动及求解各种梁动力性能的最简方法 .....       | ( 71 )  |
| § 3.7 多孔弹性简支梁的动力分析 .....                        | ( 76 )  |
| § 3.8 无限自由度体系在谐和干扰力作用下的强迫振动 .....               | ( 81 )  |
| § 3.9 具均布质量、集中质量及弹簧支承梁的自由振动 .....               | ( 84 )  |
| § 3.10 等截面杆件的纵向自由振动与剪切自由振动 .....                | ( 86 )  |
| § 3.11 变截面杆件的纵向自由振动 .....                       | ( 88 )  |
| § 3.12 杆件的纵向强迫振动 .....                          | ( 91 )  |
| § 3.13 波在杆件中的传播 .....                           | ( 93 )  |
| § 3.14 波的反射 .....                               | ( 97 )  |
| § 3.15 波在阶形杆中的传播 .....                          | ( 98 )  |
| § 3.16 质量与刚度均匀分布的层间剪切多层刚架的剪切波 .....             | ( 102 ) |
| 第四章 结构动力性能的实用分析法 .....                          | ( 104 ) |
| § 4.1 雷理法 (能量法) .....                           | ( 104 ) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| § 4.2 李兹法 .....               | (107) |
| § 4.3 集中质量法 .....             | (111) |
| § 4.4 逐渐接近法 .....             | (115) |
| § 4.5 迭次代入法 .....             | (131) |
| § 4.6 统计分析法、烟囱动力性能的统计分析 ..... | (138) |
| § 4.7 输电线塔的自由振动 .....         | (143) |

## 第二编 结构抗震分析与抗震措施

|                                        |       |
|----------------------------------------|-------|
| 第五章 水平地震力 .....                        | (145) |
| § 5.1 绪言 .....                         | (145) |
| § 5.2 大森房吉的静力理论 .....                  | (150) |
| § 5.3 K. C. Запринев 建议的地震力算法 .....    | (153) |
| § 5.4 根据地震记录求结构所受的地震荷载及内力 .....        | (155) |
| § 5.5 最先采用反应谱理论的美国加州规范 .....           | (163) |
| § 5.6 首先计算高振型地震力的规范 .....              | (167) |
| § 5.7 首先对谱曲线考虑地基影响及规定很大竖向地震力的规范 .....  | (173) |
| § 5.8 罗马尼亚的抗震规范 .....                  | (176) |
| § 5.9 卓越周期最长、谱曲线在短周期部分下降的墨西哥规范 .....   | (179) |
| § 5.10 竖向地震力比较大的秘鲁规范 .....             | (181) |
| § 5.11 对于动力系数的研究和建议 .....              | (182) |
| § 5.12 我国规范采用过的动力系数（或其它有关系数）的谱曲线 ..... | (187) |
| § 5.13 对于振型组合的研究和建议 .....              | (192) |
| § 5.14 我国规范采用过的各振型地震力的组合法及其它的组合法 ..... | (193) |
| § 5.15 对水平地震力简化计算法的讨论 .....            | (202) |
| § 5.16 对烟囱水平地震力简化计算法的研究和建议 .....       | (210) |
| § 5.17 对水平地震力的一些看法 .....               | (217) |
| § 5.18 单自由度体系的非线性地震反应 .....            | (219) |
| § 5.19 多自由度体系的非线性地震反应 .....            | (226) |
| § 5.20 对非线性地震反应分析的一些粗浅意见 .....         | (229) |
| 第六章 结构震害和水平地震力 .....                   | (232) |
| § 6.1 绪言 .....                         | (232) |
| § 6.2 砖烟囱的震害资料及破坏规律 .....              | (234) |
| § 6.3 砖烟囱的水平地震力与震害的矛盾 .....            | (242) |
| § 6.4 砖筒水塔的震害及水平地震力 .....              | (252) |
| § 6.5 砖柱支承水塔的震害及水平地震力 .....            | (256) |
| § 6.6 唐山新风井塔的震害及水平地震力 .....            | (258) |
| § 6.7 桥梁的震害及水平地震力 .....                | (262) |



|        |                                    |       |
|--------|------------------------------------|-------|
| § 6.8  | 屋顶烟囱的震害及水平地震力 .....                | (266) |
| § 6.9  | 钢筋混凝土框架及其他结构的震害分析 .....            | (269) |
| § 6.10 | 土坯墙承重房屋的某些震害及分析 .....              | (275) |
| § 6.11 | 砖房的震害及分析 .....                     | (276) |
| § 6.12 | 带水塔砖烟囱的震害分析 .....                  | (279) |
| § 6.13 | 钢筋混凝土烟囱的震害分析 .....                 | (285) |
| § 6.14 | 储油罐及钢柱料仓的震害分析 .....                | (288) |
| § 6.15 | 单层钢筋混凝土厂房的震害及水平地震力 .....           | (289) |
| § 6.16 | 砖柱单层厂房(包括砖柱库棚等)的震害与水平地震力 .....     | (294) |
| 第七章    | 竖向地震力与震害 .....                     | (300) |
| § 7.1  | 绪言 .....                           | (300) |
| § 7.2  | 根据震害估算砖烟囱的竖向地震力 .....              | (302) |
| § 7.3  | 烟囱对地面竖向运动的反馈作用 .....               | (305) |
| § 7.4  | 砖烟囱的纵波应力与震害分析 .....                | (309) |
| § 7.5  | 对计算砖烟囱地震力的初步建议 .....               | (316) |
| § 7.6  | 砖筒支承水塔的竖向地震力与震害分析 .....            | (318) |
| § 7.7  | 对砖柱支承水塔竖向地震力的估算及震害分析 .....         | (321) |
| § 7.8  | 唐山新风井塔的竖向地震力及震害分析 .....            | (322) |
| § 7.9  | 桥梁的竖向地震力及震害分析 .....                | (324) |
| § 7.10 | 屋顶烟囱的竖向地震力 .....                   | (328) |
| § 7.11 | 房屋上构件上抛的现象 .....                   | (331) |
| § 7.12 | 砖房的竖向地震力与震害分析 .....                | (336) |
| § 7.13 | 带水塔烟囱的纵波应力与震害 .....                | (339) |
| § 7.14 | 钢筋混凝土烟囱的纵波应力与震害 .....              | (341) |
| § 7.15 | 截面按指数规律改变的独立杆件的竖向地震力 .....         | (344) |
| § 7.16 | 高层建筑的竖向地震力 .....                   | (347) |
| § 7.17 | 钢筋混凝土框架的竖向地震力(一) .....             | (357) |
| § 7.18 | 钢筋混凝土框架的竖向地震力(二) .....             | (359) |
| § 7.19 | 用竖向地震力起主要作用的观点分析讨论钢筋混凝土框架的震害 ..... | (360) |
| § 7.20 | 地面上物体的上跳现象 .....                   | (361) |
| § 7.21 | 按反应谱(或静力)理论计算竖向地震力某些参数的建议 .....    | (367) |
| § 7.22 | 单层钢筋混凝土厂房的竖向地震力与震害 .....           | (369) |
| § 7.23 | 砖柱单层厂房的竖向地震力与震害 .....              | (372) |
| § 7.24 | 带构造柱砖房的抗震性能与竖向地震力 .....            | (375) |
| 第八章    | 抗震措施 .....                         | (378) |
| § 8.1  | 场地选择 .....                         | (378) |
| § 8.2  | 隔震措施 .....                         | (382) |
| § 8.3  | 抗震型砖或抗震砌块 .....                    | (385) |
| § 8.4  | 房屋的一般震害及抗震措施 .....                 | (391) |

|       |                  |       |
|-------|------------------|-------|
| § 8.5 | 农村建筑的抗震措施 .....  | (394) |
| § 8.6 | 砖烟囱的抗震措施 .....   | (399) |
| § 8.7 | 桥梁的抗震措施 .....    | (401) |
| § 8.8 | 砖支承水塔的抗震措施 ..... | (402) |
| § 8.9 | 单层厂房的抗震措施 .....  | (402) |

## 参考文献

# 第一编 结构动力学

作用在结构上的荷载，可以分为静力荷载与动力荷载两种。前者不会使结构产生振动现象，或者只产生极轻微的振动现象，因此，附属在结构上的质量也不会产生加速度或惯性力，或者所产生的惯性力与其他的荷载比起来是微不足道的。徐徐加于结构的荷载其变化周期大于结构的自振周期五、六倍以上者，都可以认为是静力荷载。后者则相反，它会使结构产生较强烈的振动现象，所以结构本身及附属属于结构上的质量也将产生较大的加速度或惯性力。突然作用或突然离开的荷载、冲击作用及随时间不断剧烈变化的荷载或基础运动等，都属于动力荷载。在动力荷载作用下，结构的内力及变形等，除了与荷载的强度有关外，还与结构的动力性能、荷载的作用方式及变化情形等都有着很密切的关系。有时动力荷载的强度并不大，但它却能使结构产生很大的内力及变形等，因而不能不对这种荷载的影响进行独立的研究。

本书所要讨论的地震作用，属于比较复杂的动力荷载的一种。所以我们打算在第一编中介绍一些必需的结构动力学的常识，然后再叙述计算地震力或地震荷载的各种理论并研究存在的问题。

首先我们给体系的自由度下个定义：体系在振动时的任一瞬间，确定其全部质量位置所需要的独立参变数的数目，称为这个体系的自由度。如果有限的独立参变数不能确定，那就成为无限自由度的体系。



图 1.1

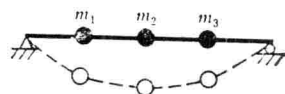


图 1.2

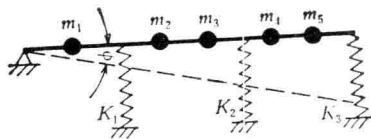


图 1.3



图 1.4

图 1.1 表示在一个没有重量的梁上置有一个集中质量  $m$  (或称为质点) 的情形。假如这个梁只能在一个平面内振动 (以下不特别加以说明者，都假定只体系在一个平面内振动)，则这个体系就是单自由度的体系。因为在任何时候集中质量  $m$  的位置，都只需要知道它在垂直方向的位移 (或挠度) 就能确定了。图 1.2 所示的梁则是三个自由度的体系，因为必须知道三

个集中质量的位移，才能确定它们的位置。图 1.3 所示的梁是无限刚劲的，所以虽然在梁上放置着 5 个集中质量，但却是单自由度的体系。由于梁不能变形，所以各集中质量的位移并不互相独立，而是呈一定比例关系的。只要知道了杆件的旋转角  $\varphi$  或任一点的位移，就可以确定所有集中质量的位置。假如左支承也是弹性支承，那就成为两个自由度的体系。在这种情形下，要确定梁上各集中质量的位置，除了转角  $\varphi$  之外，还需要知道左支承（或其他任一支承）的垂直位移  $y$  才行。最后我们再来看一看图 1.4 的情形，虽然只有一个集中质量，但却是两个自由度的体系。因为集中质量  $m$  在垂直及水平方向的位移都必须知道，才能确定它的位置。

图 1.5 所示的体系，一眼很难确定它的自由度。对于这种情形，可以采用加入一些支承联杆来固定各质点的位置。加入联杆的最低数，即为体系的自由度数。如图 1.5 所示的情形，若在  $B$  点加一个垂直（斜交亦可）于  $AB$  的支承联杆，则  $m_1$  即不能移动。然后再在  $C$  点加一个垂直于  $BC$  的联杆，则  $m_2$  亦被固定。同样，还想使  $m_3$  固定不动，亦可在  $D$  点加一个垂直于  $CD$  的联杆。由此可见，这个体系为三个自由度的体系。

容易理解：将图 1.5 所示体系的  $m_1$  或  $m_2$  二者任意取消一个，体系仍为三个自由度。如果体系只有  $m_1$ ，则为一个自由度。只有  $m_2$  或者只有  $m_3$  一个集中质量，都是两个自由度的体系。

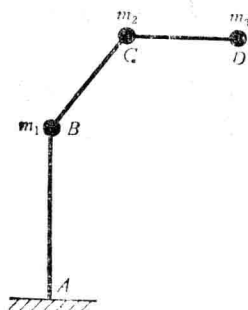


图 1.5

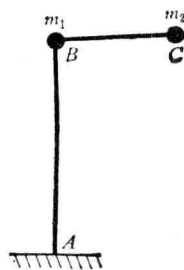


图 1.6

图 1.6 所示的体系若  $AB$  杆的刚度  $EJ$  无穷大，则  $m_1$  及  $m_2$  都不能在水平方向移动。 $m_2$  只能上下运动故为单自由度体系。若  $AB$  杆为弹性杆，则为两个自由度的体系。

# 第一章 单自由度体系的振动

## § 1.1 单自由度体系的自由振动

### 一、不考虑阻尼作用的自由振动

不管体系发生振动的原因如何, 如果发生振动以后, 不再受外部的干扰作用 (包括干扰力或支承运动等, 但阻尼除外), 就称为自由振动。反之, 若一直还受到外部干扰作用, 就称为强迫振动。本节先介绍单自由度体系的自由振动。

体系振动时, 总要受到材料内部的摩擦阻力和体系与介质间的摩擦以及各构件间的摩擦等的阻尼作用, 所以体系的自由振动, 一般都是随着时间的不断增加而逐渐衰减以至静止的。但为了便于研究, 这里我们先假定没有阻尼存在。或者先不考虑这些阻尼的作用, 来研究体系的自由振动。图 1.1 所示体系如果只能在竖向振动, 且不考虑该梁的质量, 则为单自由度体系, 当它作自由振动时, 若不考虑阻尼的作用, 则集中质量  $m$  在任何时刻都是受着下述的两个力的作用 (根据达朗贝尔原理我们将惯性力当作外力考虑)。

一个是弹性力  $S$ : 我们以  $K$  表示体系的刚度系数, 或称为弹簧常数 (即在振动方向使质量产生单位位移所需要的力), 则当质量  $m$  产生位移  $y$  时, 弹性力应为:

$$S = -Ky$$

式中负号表示弹性力总是与位移  $y$  的方向相反。

另一个是惯性力  $I$ : 它等于质量  $m$  与其加速度  $\ddot{y}$  之积, 即,

$$I = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\ddot{y}$$

式中, 负号表示惯性力总是与加速度反向。

根据达朗贝尔原理, 无论在任何时刻, 此二力皆相互平衡, 故其和应等于零, 即,

$$S + I = 0$$

将  $S$  和  $I$  之值代入, 就得到集中质量  $m$  自由振动的微分方程为:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = 0$$

或

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (1.1)$$

式中,

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad (1.2)$$

如所周知, 二阶线性微分方程 (1.1) 的通解可表示为:

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (1.3)$$

由 (1.3) 式可以看出: 当不考虑阻尼作用时,  $y$  的值总是随着时间的增加周而复始、重复地改变的。(1.3) 式所示的谐和振动, 当时间  $t$  增加  $2\pi/\omega$  的整数倍时, (1.3) 式将完全不变。所以这种振动属于周期性的振动。 $2\pi/\omega$  称为体系的振动周期或自振周期, 如以  $T$  表示, 则

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.4)$$

如以  $f$  表示体系的自振频率, 即每秒钟的振动次数(为了纪念一个电工技术人员, 就以他的名字赫芝作为计算单位), 则

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.5)$$

频率  $f$  的  $2\pi$  倍、或  $2\pi$  秒的振动次数为  $\omega$ , 我们称之为圆频率或角频率。但习惯上往往也称  $\omega$  为自振频率。 $\omega$  之值可由(1.2)式求之。如果以  $\delta$  表示单位位移 (即沿振动方向作用单位力时质点产生的位移), 则

$$K = \frac{1}{\delta}$$

故(1.2)式又可变为

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1}{n\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} \quad (1.6)$$

$y_{st}$  表示大小等于质量  $m$  的重力沿振动方向静力作用于质点时所引起的位移, 普通称为静力位移。

如果我们用  $n$  表示每分钟的振动次数 (又称为工程频率), 则可得

$$n = 60 \times \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{300}{\sqrt{y_{st}}} \quad (1.7)$$

(1.3)式中的  $A_1$  和  $A_2$  是决定于振动起始条件的两个积分常数。所谓起始条件, 就是在  $t$  等于零(就是我们选作计算时间的起点)时的位移及速度。例如当  $t$  等于零时,

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}_0 = v_0$$

代入(1.3)式得

$$y_0 = A_2 \quad v_0 = \omega A_1$$

即

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega} \quad A_2 = y_0$$

故(1.3)式又可写为,

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.8)$$

(1.3)式我们还可以用另一个常用的写法来表示:

令

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A \cos \varphi \\ A_2 &= A \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

代入(1.3)式, 则该式又可变为:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.10)$$

若以  $t$  为横坐标,  $y$  为纵坐标, 根据上式可绘得时间位移曲线如图(1.7)所示。

上式中,  $A = y_{\max}$ , 我们称它为振幅;  $(\omega t + \varphi)$  称为相角,  $\varphi$  为初相角 (即时间  $t=0$  时的相角)。

由(1.9)式可以看出:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y_0^2}$$

(1.11)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega y_0}{v_0}$$

所以  $A_1$  与  $A_2$  及  $A$  与  $\varphi$  这两对常数，知道了一对，就可以求另一对。

研究结构的振动问题时，求自振频率或自振周期，是很重要的课题之一。这里举几个求自振频率的简单例子。

例一：试求图 1.1 所示悬臂梁的自振频率。

解：  $\therefore y_{st} = \frac{mgL^3}{3EJ}$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} = \sqrt{\frac{3EJ}{mL^3}}$$

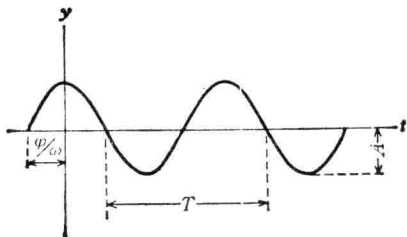


图 1.7



图 1.8

例二：如图 1.8 所示，当重量  $Q=1000$  公斤时，弹簧共伸长 2 厘米。若将  $Q$  减为 500 公斤，试求这个体系的自振频率。

解：  $\therefore \delta = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$  (厘米/公斤)

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}} = \sqrt{\frac{931}{500 \times \frac{1}{500}}}$$

$$\approx 31.3 \text{ 1/秒}$$

例三：设有一等截面砖圆筒支承的水塔(图 1.9)，圆筒外径为 14 米，筒厚为 0.37 米。以  $L$  及  $Q$  分别表示水柜重心的高度(米)及水柜的总重(吨)，试按单自由度体系计算  $L=50$ 、40、30、20 米及  $Q=1800$ 、1000、500 吨时的自振频率。设砖砌体的各种常数为：弹性模量  $E=4 \times 10^5$  吨/米<sup>2</sup>，剪切弹性模量  $G=4 \times 10^4$  吨/米<sup>2</sup>，容重  $\gamma=1.8$  吨/米<sup>3</sup>。又基础为直径  $d=18$  米的圆形板；地基的弹性非均匀压变位移系数  $C_s=15000$  吨/米<sup>3</sup>。

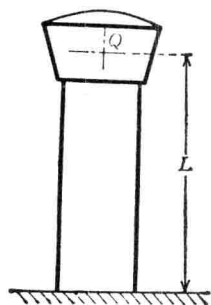


图 1.9

解：圆筒截面积

$$F = \frac{\pi}{4}(14^2 - 13.26^2) \\ = 15.86 \text{ 米}^2$$

圆筒截面惯性矩

$$J = \frac{\pi}{64}(14^4 - 13.26^4) \\ = 368.2 \text{ 米}^4$$

基础对其直径的截面惯性矩

$$J_F = \frac{\pi}{64} \times 18^4 = 5150 \text{ 米}^4$$

基础的抗旋转刚度

$$K_\phi = C_\phi J_F \\ = 7.73 \times 10^6 \text{ 吨} \cdot \text{米}$$

当单位力水平地作用于水柜重心时(近似地将  $L$  视为圆筒的高度),可算得由于弯曲作用、剪切作用及基础旋转使顶端产生的单位位移及总的单位位移依次为(水柜侧移引起的附加力矩暂不考虑):

$$\delta_1 = \frac{L^3}{3 E J} = \frac{1}{3 \times 4 \times 10^6 \times 368.2} L^3 = \frac{1}{441760 \times 10^3} L^3 (\text{m})$$

$$\delta_2 = \frac{L}{G F} = \frac{1}{4 \times 10^4 \times 15.86} L = \frac{1}{634600} L (\text{m})$$

$$\delta_3 = \frac{L^3}{K_\phi} = \frac{1}{7.73 \times 10^6} L^3 (\text{m})$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

对于题中所述的各种高度,我们算得顶端的上述各种单位位移之值如下表所示:

表 1.1

| $L$ (m) | $\delta_1$ (m) | $\delta_2$ (m) | $\delta_3$ (m) | $\delta$ (m) |
|---------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| 50      | 0.000283       | 0.000079       | 0.000032       | 0.000394     |
| 40      | 0.000145       | 0.000033       | 0.000027       | 0.000235     |
| 30      | 0.000061       | 0.000017       | 0.000012       | 0.000120     |
| 20      | 0.000018       | 0.000002       | 0.000005       | 0.000055     |

后面精确的计算结果表明:对于这种情况,计算其最低频率时,可按单自由度体系进行计算。将圆筒视为无质量的杆件,但在计算水柜的重量  $Q$  值时,应将圆筒重量的 24% 左右加进去。于是按(1.6)式算出  $\omega$  之值后,再代入(1.4)式即可算得各种情形的自振周期之值,如表 1.2 所示。

表 1.2

水塔自振周期之值(秒)

| $Q$ (T) | $L$ (m) | 50   | 40   | 30    | 20    |
|---------|---------|------|------|-------|-------|
| 1800    |         | 1.82 | 1.32 | 0.947 | 0.632 |
| 1000    |         | 1.39 | 1.07 | 0.700 | 0.497 |
| 500     |         | 1.13 | 0.82 | 0.578 | 0.371 |

## 二、考虑阻尼作用的自由振动

前面讲过,体系在振动过程中,总是要受到各种阻尼作用的,所以自由振动将要逐渐衰减,而不可能永远保持如上节所述的稳定的振动。本节我们就来讨论阻尼作用对于自由振动的影响。

体系在振动时所受的阻尼作用,本来是极为复杂的,但普通都采用福格特所提出的假定:即质量振动时所受的阻尼作用,系与其运动速度成正比。这种阻尼常称为粘性阻尼。若以  $\gamma$  表示阻尼系数,  $R$  表示阻尼力,则

$$R = -\gamma \frac{dy}{dt} = -\gamma \dot{y}$$

负号表示阻尼力恒与振动速度的方向相反。

加入了阻尼作用之后,则单自由度体系作自由振动时的微分方程(1.1)将变为:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + Ky &= 0 \\ \ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\text{或} \quad \text{其中,} \quad \varepsilon = \frac{\gamma'}{2m} \quad (1.13)$$

称为阻尼特征系数。

线性微分方程(1.12)的通解为:

$$y = e^{-\varepsilon t} (B_1 \sin \omega_\varepsilon t + B_2 \cos \omega_\varepsilon t) \quad (1.14)$$

$$\text{式中,} \quad \omega_\varepsilon^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 \quad (1.15)$$

$\omega_\varepsilon$  为考虑阻尼作用的自振频率,或简称为有阻尼频率。

$$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\omega_\varepsilon}$$

称为有阻尼周期。

将(1.14)式对  $t$  微分一次,得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t} (B_1 \sin \omega_\varepsilon t + B_2 \cos \omega_\varepsilon t) + \\ &\quad + e^{-\varepsilon t} \omega_\varepsilon (B_1 \cos \omega_\varepsilon t - B_2 \sin \omega_\varepsilon t) \\ &= -\varepsilon y + e^{-\varepsilon t} \omega_\varepsilon [B_1 \cos \omega_\varepsilon t - B_2 \sin \omega_\varepsilon t] \end{aligned}$$

$B_1$  及  $B_2$  仍旧是根据起始条件来确定的两个积分常数。假设当  $t=0$  时,

$$y = y_0, \quad \dot{y} = v_0$$

代入上式及(1.14)式可得:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_\varepsilon} \\ B_2 &= y_0 \end{aligned}$$

故(1.14)式又可写为:

$$y = e^{-\varepsilon t} \left[ \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t + y_0 \cos \omega_\varepsilon t \right] \quad (1.16)$$

同前面一样,(1.14)式也可以改写为下列形式:

$$y = B e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_\varepsilon t + \varphi) \quad (1.17)$$

式中,

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$