最新版

全国硕士研究生入学统一考试历年试题

名家解析及预测

经济数学四

（修订本）

刘 斌 编

海洋出版社

最新版

全国硕士研究生入学统一考试

历年试题名家解析及预测

经济数学四

（修订本）

海洋出版社

2001年·北京

图书在版编目（CIP）数据

最新版全国硕士研究生入学统一考试历年试题名家解析及预测. 经济数学四/刘斌编. －北京：海洋出版社，2001
ISBN 7－5027－4957－8

Ⅰ. 最… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学－研究生－入学考试－试题 Ⅳ. G643－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 15329 号

海洋出版社 出版发行
（100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号）
北京市房山印刷厂印刷 新华书店发行所经销
2001 年 2 月第 2 版 2001 年 2 月北京第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：84.125（总）
字数：1920 千字（总） 印数：3000 册
共 7 册 定价：112.00 元（每册 16.00 元）

出版说明

本套丛书具有资料完整、分析详细、解剖透彻和技巧灵活的特点。首先，汇集了 1987～2001 年数学，1991～2001 年政治、英语的历届研究生入学考试试题，包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共七册；其次，真正做到了逐题解析，透彻详细，论证严密，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析，并注重解题思路和规律的分析—总结与方法—技巧的提炼；最后对命题趋势作出预测，切题率高。

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有 15 年，共命制试卷 100 余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过 10 届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，2001 年数学一的第一大题第(1)小题与 2000 年数学二第二大题第(5)小题，2001 年数学一的第六大题与 1997 年数学一的第三大题第(2)小题，2001 年数学一的第九大题与 1996 年数学三的第十大题，2001 年数学二的第一大题第(5)小题与 2000 年数学一的第(4)小题，2001 年数学三、四的第二大题第(1)小题与 1996 年数学一第二大题第(2)小题，2001 年数学三、四第二大题第(3)小题与 1995 年数学一第二大题第(5)小题，2001 年数学一第三大题与 1992 年数学三第四大题，2001 年数学三、四第七大题与 1996 年数学三第六大题，2000 年数学一的第三二大题第(2)小题与 1988 年数学一的第二大题第(3)小题，2000 年数学三、四的第九大题与 1991 年数学一的第七大题、1998 年数学二的第十三大题，2000 年数学一的第七大题与 1995 年数学一的第一大题第(4)小题，2000 年数学二的第二大题第(2)小题与 1997 年数学二的第二大题第(3)小题，2000 年数学一的第三大题与 1991 年数学二的第一大题第(5)小题，2000 年数学二的第二大题第(5)小题与 1997 年数学二的第三大题第(5)小题，2000 年数学三、四的第五大题与 1991 年数学三的第七大题、数学四第八大题，2000 年数学二的第九大题与 1998 年数学三的第二大题第(1)小题，2000 年数学二的第一大题第(3)小题与 1998 年数学四的第一大题第(3)小题，2000 年数学四

的第十大题与1999年数学四的第十大题，1999年数学一的第三大题与1995年数学一的第三大题第(1)小题，1999年数学一填空题第(2)小题与1998年选择题的第(1)小题，1999年数学一选择题第(3)小题与1989年选择题第(4)小题，1999年数学二第十二大题与1991年数学一第七大题，1999年数学三填空题第(1)小题与19994年数学四第五大题，1999年数学三、四选择题第(2)小题与1997年数学三、四填空题第(2)小题，1999年数学三第九大题与1997年数学一第七大题第(2)小题，1999年数学四第九大题与1994年数学三第十大题等等都是相同或非常相似的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在最近两年的数学考题中就有多达20余道题是与往届考题雷同的，考生若把这些历年试题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考，共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶，具有极高的切题率。比如，从去年版本来看，2001年数学试题中的有关曲率、梯度与散度以及弹性等等；在2001年英语试题中语法结构方面预测到第1题，第2题，第5题，第9题，第10题；词汇方面预测到第11题，第13题，第14题，第16题，第18题，第20题，第22题，第23题，第25题，第30题；阅读理解方面预测到第2篇；短文写作方面准确预测到不是图表题(而2000年准确预测到是图表作文题)。

本丛书的文科政治和理科政治的4位作者中，有3位曾是教育部原政治命题组组长或命题组成员，1位是长期阅卷，并一直担任政治阅卷组组长。现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以，他们对历年试题的解析及预测的权威性强，可信度高。

本书对2002年的命题趋势作了新的预测，相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于出版时间比较仓促，难免还有不当之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本系列丛书能不断完善。

考研试题研究组

目　　录

注:1987～1996 年数学四为原数学五.

第一篇　全国硕士研究生入学统一考试 历年经济数学四试题、答案及解析

2001 年全国硕士研究生入学统一考试 经济数学四试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设生产函数为 $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$,其中 Q 是产出量,L 是劳动投入量,K 是资本投入量,而 A,α,β 均为大于零的参数,则当 $Q = 1$ 时 K 关于 L 的弹性为________.

(2) 设 $z = e^{-x} - f(x - 2y)$,且当 $y = 0$ 时,$z = x^2$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ = ________.

(3) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,则第四行各元素余子式之和的值为________

(4) 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

且秩$(\boldsymbol{A}) = 3$,则 k = ________.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 0.5,则根据切比雪夫不等式 $P\{|X - Y| \geqslant 6\} \leqslant$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{x - a} = -1$,则

(A) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点　【　　】

(2) 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), 若 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{3}(x-1), 若 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内

(A) 无界　　(B) 递减　　(C) 不连续　　(D) 连续　【　】

(3) 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix}, P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$

(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$　【　】

(4) 对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是

(A) $A\subset B$　　(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$

(C) $A\bar{B}=\varnothing$　　(D) $\bar{A}B=\varnothing$　【　】

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1　【　】

三、(本题满分 6 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy}-xy=2 \text{ 和 } e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

四、(本题满分 6 分)

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}, \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$$

求 c 的值.

五、(本题满分 6 分)

求二重积分 $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

六、(本题满分 7 分)

某商品进价为 a(元/件),根据以往经验,当销售价为 b(元/件)时,销售量为 c 件(a,b,c 均为正常数,且 $b \geqslant \frac{4}{3}a$),市场调查表明,销售价每下降 10%,销售量可增加 40%,现决定一次性降价.试问,当销售价定为多少时,可获得最大利润?并求出最大利润.

七、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且满足

$$f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x$$

证明存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内连续,$f(1) = \frac{5}{2}$,且对所有 $x,t \in (0,+\infty)$,满足条件

$$\int_1^{xt} f(u)\mathrm{d}u = t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u + x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u$$

求 $f(x)$.

九、(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.已知线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 有解但不惟一,试求:

(1) a 的值;(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}} (i = 1,2,\cdots,r; r < n)$ 是 n 维实向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.已知 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量.试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

十一、(本题满分 8 分)

一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的.假设每箱平均重 50 千克,标准差为 5 千克.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977.($\Phi(2) = 0.977$,其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.)

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点(0,1),(1,0),(1,1)为顶点的三角形区域上服从均匀分布,试求随机变量 $U = X + Y$ 的方差.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学四试题答案及解析

一、填空题

(1) $-\frac{\alpha}{\beta}$.

[解析]

当 $Q=1$ 时,有 $1=AL^{\alpha}K^{\beta}$,即 $K=A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}$,根据弹性公式,有

$$\epsilon=L\cdot\frac{K'(L)}{K(L)}=L\cdot\frac{-\frac{\alpha}{\beta}A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

(2) $2(x-2y)-e^{-x}+e^{2y-x}$.

[解析]

由题设 $y=0$ 时,$z=x^2$ 知 $\quad x^2=e^{-x}-f(x)$

即 $$f(x)=e^{-x}-x^2,$$

故 $$z=e^{-x}-e^{-(x-2y)}+(x-2y)^2$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-2y)-e^{-x}+e^{2y-x}$$

(3) -28.

[解析]

设 $M_{4i}(i=1,2,3,4)$ 为第四行各元素余子式,对应代数余子式记为 A_{4i} $(i=1,2,3,4)$. 则

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-28$$

[注] 题设条件为求余子式之和,而非代数余子式之和. 千万不要写成

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

(4) -3.

[解析]

由于
$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

由题设秩(**A**) = 3,故必有 $|\mathbf{A}| = 0$,即必有 $k = -3$ 或 $k = 1$. 而当 $k = 1$ 时,秩(**A**) = 1. 因此 $k = -3$.

(5) $\dfrac{1}{12}$.

[解析]

$\because D(X-Y) = DX + DY - 2\operatorname{cov}(X,Y) = 1 + 4 - 2\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY} = 3$

$\therefore P\{|X-Y| \geqslant 6\} \leqslant \dfrac{D(X-Y)}{6^2} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

二、选择题

(1) 应选(B).

[解析]

由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$,知 $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$ 从而有 $\lim\limits_{x\to a}f'(x) = f'(a) = 0$

于是
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(a) = -1$$

即 $f'(a) = 0, f''(a) = -1$,因此 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(2) 应选(D).

[解析]

当 $0 \leqslant x < 1$ 时,$g(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x$

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,$g(x) = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u + \int_1^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{3} + \int_1^x \frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2$$

可见,$g(x)$ 在区间(0,2) 内连续.

(3) 应选(C).

[解析]

$\because \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1, \therefore \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\mathbf{A}^{-1}$

故选(C).

(4) 应选(D).

[解析]

$\because A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A\overline{B} = \varnothing$.

$\therefore$ 与 $A \cup B = B$ 不等价的是(D).

(5) 应选(A).

[解析]

由题设 $X = n - Y$,故 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -1$.

三、[解析]

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \qquad (*)$$

由 $e^{xy} - xy = 2$ 两边对 x 求导,得

$$e^{xy}\left(y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \left(y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$$

又由 $e^x = \int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导,得

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1 - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$$

将其代入(*)式,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}$$

四、[解析]

由条件易见 $c \neq 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$$

由拉格朗日定理,有

$$f(x) - f(x-1) = f'(\xi)\cdot 1$$

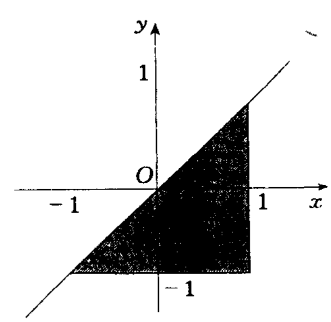
其中 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间,那么

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)] = \lim_{x\to\infty}f'(\xi) = e$$

于是,$e^{2c} = e$,故 $c = \frac{1}{2}$.

五、[解析]

积分区域 D 如图.



$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中

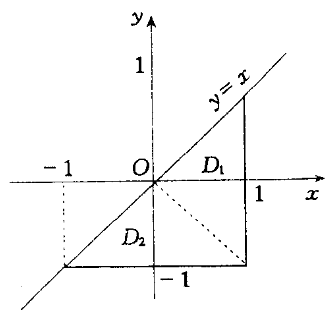
$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 y(1-y)\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}$$

$$\iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y\int_y^1 xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y[e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} - e^{y^2}]\mathrm{d}y = 0$$

于是

$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}$$

[注] 本题也可用下述求解方法：将 D 分解为关于 x 轴和 y 轴对称的 D_1、D_2，则



$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint_{D_2} y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x} y\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}$$

六、[解析]

设 p 表示降价后的销售价，x 为增加的销售量，$L(x)$ 为总利润，那么

$$\frac{x}{b-p} = \frac{0.4c}{0.1b}$$

则

$$p = b - \frac{b}{4c}x$$

从而

$$L(x) = \left(b - \frac{b}{4c}x - a\right)(c + x)$$

对 x 求导，得

$$L'(x) = -\frac{b}{2c}x + \frac{3}{4}b - a$$

令 $L'(x) = 0$，得惟一驻点

$$x_0 = \frac{(3b-4a)c}{2b}$$

由问题的实际意义或 $L''(x_0) = -\frac{b}{2c} < 0$ 可知，x_0 为极大值点，也是最大值点，故定价为

$$p = b - \left(\frac{3}{8}b - \frac{1}{2}a\right) = \frac{5}{8}b + \frac{1}{2}a\text{(元)}$$

时，得最大利润

$$L(x_0) = \frac{c}{16b}(5b - 4a)^2(\text{元})$$

七、[证明]

由积分中值定理,得

$$f(1) = e^{1-\xi_1^2}f(\xi_1), \xi_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

令 $F(x) = e^{1-x^2}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上连续,在 $(\xi_1, 1)$ 内可导,且

$$F(1) = f(1) = e^{1-\xi_1^2}f(\xi_1) = F(\xi_1)$$

由罗尔定理,在 $(\xi_1, 1)$ 内至少有一点 ξ,使得

$$F'(\xi) = e^{1-\xi^2}[f'(\xi) - 2\xi f(\xi)] = 0$$

于是

$$f'(\xi) = 2\xi f(\xi), \xi \in (\xi_1, 1) \subset (0,1)$$

八、[解析]

由题意可知,等式的每一项都是 x 的可导函数.于是等式两边对 x 求导,得

$$tf(xt) = tf(x) + \int_1^t f(u)\mathrm{d}u \qquad ①$$

在 ① 式中,令 $x = 1$,由 $f(1) = \frac{5}{2}$,得

$$tf(t) = \frac{5}{2}t + \int_1^t f(u)\mathrm{d}u \qquad ②$$

则 $f(t)$ 是 $(0, +\infty)$ 内的可导函数,② 式两边对 t 求导,得

$$f(t) + tf'(t) = \frac{5}{2} + f(t)$$

即

$$f'(t) = \frac{5}{2t}$$

上式两边求积分,得

$$f(t) = \frac{5}{2}\ln t + C$$

由 $f(1) = \frac{5}{2}$,得 $$C = \frac{5}{2}$$

于是

$$f(x) = \frac{5}{2}(\ln x + 1)$$

九、[解析]

解法 1 (1) 对线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵作行的初等变换,有

$$(A \vdots \beta)=\begin{pmatrix}1&1&a&\vdots&1\\1&a&1&\vdots&1\\a&1&1&\vdots&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&a&\vdots&1\\0&a-1&1-a&\vdots&0\\0&0&(a-1)(a+2)&\vdots&a+2\end{pmatrix}.$$

因为方程组 $AX=\beta$ 有解但不惟一，所以秩(A) = 秩$(A \vdots \beta)<3$，故 $a=-2$.

(2) 由(1)，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$.

对应的特征向量依次是 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得 $\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$.

令

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

则有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解法 2 (1) 因为线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不惟一，所以

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0$$

当 $a=1$ 时，秩(A) 不等于秩$(A \vdots \beta)$，此时方程组无解；

当 $a=-2$ 时，秩(A) 等于秩$(A \vdots \beta)$，此时方程组的解存在但不惟一.

于是，$a=-2$.

(2) 同解法 1.

十、[解析]

用定义法.