民國二十一年出版

高級中學學生用

高中解析幾何學

編著者 傅溥

世界書局印行

中華民國二十一年十月印刷
中華民國二十一年十月出版

高級中學教科書 高中解析幾何學（全一冊）

（每冊定價銀九角）
（外埠酌加郵費匯費）

編著者　傅溥
出版者　世界書局
印刷兼發行者　上海大連灣路　世界書局
發行所　上海暨各省　世界書局

例　言

1.本書係依照教育部頒布之高中暫行課程標準,及根據編者多年之教授經驗,編纂而成.專供高級中學普通科及與此同程度學校之用.

1.學語譯名,我國極不統一.本書所採用者,均係通行已久之名詞.茲更於卷尾附一中英學語對照表,俾便學者參閱,且可作翻讀西文原書之助.

1.直交坐標不過為平行坐標中之一種,故本書採用坐標,皆以一般平行坐標軸為主,直交坐標軸為副.藉使學者熟習後,知其妙用.其凡未註明坐標軸為直交或斜交者,皆係指一般平行坐標軸而言.

1.圓錐曲線關於一般平行坐標軸之方程式過於繁複,學者不易了解.故本書為使學者易於得其形狀及性質起見,不得不採用某一定之直交坐標軸而推求其方程式.

1.橢圓與雙曲線之方程式極相類似,隨之其各種性質之類似處亦多,故一般書籍多有將此二種曲線併合而研究之者.本書為使學者易於了解起見,故仍行分別敍述之.

1.高等平面曲線為高等數學中之一分科,理論艱深,決

非本書程度所可及.故本書僅於篇末將數學上富有興趣之曲線十餘種敍述之,藉使學者知其一斑.

1.立方倍積及任意角之三等分問題,爲幾何學中有名之作圖不能三問題中之二.故本書於高等平面曲線中附帶的與以解法,藉使學者知所謂作圖可能與不能,全視其所用工具及所守公法如何而定.

1.本書問題雖僅二百餘題,然選擇精當,難易適度.學者如能一一演習之,則對於本書所述各項,可謂完全了解.編者他日有暇,當一一演出,藉供學者自修之助.

1.本書付印倉促,謬誤之處,在所難免.海內明達,如承見敎,則不勝感謝之至.

民國二十一年六月編者識於京寓

人名中譯對照表

亞格勒西 Maria Agnesi

亞幾默德 Archimedes

伯魯羅依 Bernoulli

德卡路特 Descartes

的阿苦魯士 Diocles

歐幾里得 Euclid

賈理熱 Galileo

尼可默德司 Nicomedes

世界書局

高中教科書

科目	書名	編著人	冊數	定價
國文	高中國文（甲種）道林紙印	朱劍芒 徐蔚南	三冊	第一冊一元六角 第二三冊各二元
	高中國文（乙種）新聞紙印	朱劍芒 徐蔚南	三冊	第一冊一元二角 二三各一元四角
黨義	高中黨義	郭伯棠 魏冰心	三冊	第一二冊各九角 第三冊九角五分
英語	高中英文讀本	黃梁說明	三冊	每冊　角
	高中進步英文讀本	林漢達	三冊	每冊　角
	高中英文文法	黃梁說明	二冊	每冊　角
	高中英文作文修辭	黃梁說明	一冊	角
歷史	高中本國史	陸東平 朱翊新	二冊	每冊九角五分
	高中本國史	陳登元	二冊	每冊　角
	本國現代史	梁園東	二冊	每冊　角
	中國近百年史	邢鵬舉	上冊	一元二角半

25.88

目　次

第一章　坐標 ……………………………… 1

1. 平行坐標 ……………………………… 1
2. 符號之區別 ……………………………… 2
3. 二點間距離 ……………………………… 4
4. 分線段成定比之分點 ……………………………… 6
5. 極坐標 ……………………………… 8
6. 同一點之直交坐標與極坐標之關係 ……………………………… 10
7. 極坐標所表之二點間距離 ……………………………… 11
8. 三角形之面積 ……………………………… 12
9. 方程式之軌跡 ……………………………… 14

第二章　直線 ……………………………… 19

10. 直線之方程式 ……………………………… 19
11. 直線之對稱方程式 ……………………………… 21
12. 直線之正則方程式 ……………………………… 22
13. 角係數 ……………………………… 25

14. 通過一點之直線……28
15. 通過二點之直線……30
16. 直線方程式之幾何的求法……31
17. 二直線之交點……36
18. 二直線之交角……37
19. 點與直線之距離……38
20. 通過二定直線交點之直線方程式……40
21. 二直線交角之二等分線之方程式……42
22. 直線之極方程式……43
23. 幾何學上之應用……45

第三章　坐標之變換……55

24. 坐標之變換……55
25. 軸之方向不變僅原點移動時之變換……55
26. 直交坐標軸之原點不變僅軸之方向移轉一 θ 角度時之變換……56
27. x 軸之位置不變直交坐標變爲斜交坐標之變換……58

第四章　圓……61

28. 圓之方程式……61

29. 關於斜交坐標軸之圓之方程式……63
30. 圓之極方程式……64
31. 由一點向圓所引割線之長……66
32. 切線……67
33. 法線……70
34. 切點弦……71
35. 極與極線……74
36. 極線之幾何的作圖法……76
37. 根軸與根心……77
38. 通過三點之圓……80

第五章　橢圓……85

39. 橢圓之方程式……85
40. 橢圓之形狀……88
41. 橢圓之作圖法……89
42. 補助圓……90
43. 橢圓之面積……92
44. 點與橢圓之位置關係……93
45. 切線與法線……95
46. 橢圓之重要性質……98
47. 極及極線……102

48. 準線……………………………………………105
49. 共軛徑 ……………………………………………106
50. 以共軛徑爲坐標軸之橢圓方程式…… ……………108
51. 橢圓之極方程式 ……………………………………109

第六章 雙曲線 ……………………………115

52. 雙曲線之方程式 ……………………………………115
53. 雙曲線之形狀…………………………………………119
54. 雙曲線之作圖法 ……………………………………120
55. 漸近線與共軛雙曲線…………………………………122
56. 點與雙曲線之位置關係………………………………124
57. 切線與法線……………………………………………125
58. 雙曲線之重要性質 …………………………………128
59. 極,極線及準線………………………………………129
60. 共軛徑 ……………………………………………130
61. 以共軛徑爲坐標軸之雙曲線方程式 ………………132
62. 以漸近線爲坐標軸之雙曲線方程式 ………………133
63. 雙曲線之極方程式 …………………………………134

第七章 拋物線 ……………………………139

64. 拋物線之方程式 ……………………………………139

65. 拋物線之形狀……………………………………………140
66. 拋物線之作圖法 ………………………………………141
67. 點與拋物線之位置關係………………………………141
68. 切線與法線 ……………………………………………142
69. 拋物線之重要性質 ……………………………………144
70. 極及極線 ………………………………………………146
71. 直徑……………………………………………………147
72. 以直徑及直徑一端之切線爲坐標軸之拋物線
方程式 …………………………………………………149
73. 拋物線之極方程式 ……………………………………151

第八章　二次曲線總論 ……………………155

74. 二次曲線 ………………………………………………155
75. 二次方程式表二直線之條件 …………………………155
76. 二次曲線之中心 ………………………………………158
77. 原點移於曲線中心後之二次方程式 …………………161
78. 有心曲線 ………………………………………………162
79. 二次方程式前三項係數之關係 ……………………… 164
80. 有心二次曲線之分類 …………………………………165
81. 有心曲線之結論………………………………………167
82. 無心曲線 ………………………………………………169

第九章　高等平面曲線……………………173

83. 高等平面曲線……………………………173

84. 垂蔓線……………………………………174

85. 貝殼形……………………………………177

86. 紐狀線……………………………………179

87. 丘陵形……………………………………181

88. 擺線………………………………………182

89. 蝸牛形與心臟形…………………………184

90. 螺線………………………………………185

附錄

答數

中英學語對照表

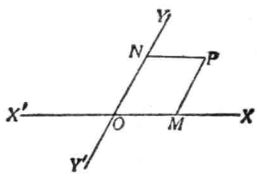
人名中譯對照表

高中解析幾何學

第一章　坐標

1. 平行坐標　解析幾何學之目的,在研究以代數學中之方程式,代表點,直線,圓等幾何學圖形之方法;且由施代數的演算於其方程式所得之結果,而求得此等圖形之性質,及其相互之關係.為欲達到此目的,必先研究一以代數的符號代表平面上之點之位置之方法始可.法國之數學者德卡路特氏因而發見下述之方法,於公曆1637年發表於其自著之幾何學書中.

於平面上引相交二定直線XX', YY',設其交點為O.次由其平面上任意一點P,各與YY', XX'平行,引PM,PN二線.則如P點之位置決定後,其PM, PN二線之長,亦隨之決定.反之,如PM, PN二線之長決定後,P點之位置,亦隨之決定.



例如使$PN=a$, $PM=b$時,吾人僅須於XX'上取OM使等於a,又於YY'上取ON使等於b,由M, N各與YY', XX'平行,引MP, NP時,則其交點卽為所求之P點是.

平行於 OY 之 PM,通常皆以 y 代之.又平行於 OX 之 PN,通常皆以 x 代之.其 P 點則謂之隨 $x=a$, $y=b$ 而決定,或簡書之爲點 (a, b).

PM, PN, 總稱之爲 P 點之**平行坐標**.二定直線 XX', YY', 謂之**坐標軸**.或單稱曰**軸**.其交點 O, 謂之**原點**.而直線 XX' 謂之 **x 軸**,或稱**橫軸**; YY' 謂之 **y 軸**,或稱**縱軸**.

又 P 點之坐標中,其 PN 謂之**橫坐標**,或稱 **x 坐標**; PM 謂之**縱坐標**,或稱 **y 坐標**.

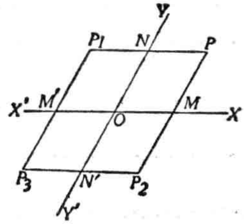
再坐標軸互相垂直者,謂之**直交坐標**.不互相垂直者,謂之**斜交坐標**.

如上規約,其 M 點之坐標爲 $x=a$, $y=0$; N 點之坐標爲 $x=0$, $y=b$; 原點之坐標爲 $x=0$, $y=0$ 甚明.

2. 符號之區別 因坐標軸 YOY', XOX' 所區分之部分有四,故由上述表 PN, PM 之數,尙不足以明示其點究位於何一部分.必須應用代數學中之正負符號,附於坐標之前,始能表示平面上任意之點之位置.其規約如下.

橫坐標位於 y 軸右方之線段,皆以正數表之;位於 y 軸左方之線段,皆以負數表之.又縱坐標位於 x 軸上方之線段,皆以正數表之;位於 x 軸下方之線段,皆以負數表之.

例如後圖所示,設 $P_1PP_2P_3$ 爲平行四邊形,其相鄰二邊 P_1P, P_1P_3 各與 x 軸及 y 軸平行,且 OM 與 OM' 之長相等,



各爲 a; ON 與 ON' 之長亦相等,各爲 b 時;則

$$OM=a$$

$$OM'=-a$$

$$ON=MP=M'P_1=b$$

$$ON'=MP_2=M'P_3=-b$$

隨之得 $P, P_1, P_2, P_3, M, M', N, N'$ 八點之坐標如下.

$P(x=a, y=b)$	或	$P(a, b)$
$P_1(x=-a, y=b)$	或	$P_1(-a, b)$
$P_2(x=a, y=-b)$	或	$P_2(a, -b)$
$P_3(x=-a, y=-b)$	或	$P_3(-a, -b)$
$M(x=a, y=0)$	或	$M(a, 0)$
$M'(x=-a, y=0)$	或	$M'(-a, 0)$
$N(x=0, y=b)$	或	$N(0, b)$
$N'(x=0, y=-b)$	或	$N'(0, -b)$

卽凡屬第一象限內之點,其兩坐標皆爲正;第二象限內之點,其橫坐標爲負,縱坐標爲正.又第三象限內之點,其兩坐標皆爲負;第四象限內之點,其橫坐標爲正,縱坐標爲負.故如已知一點之坐標後,欲求其點之位置時,依下法行之卽可.

以 XOX' 爲 x 軸, YOY' 爲 y 軸.然後取任意之長爲單

位,如所求之點之 x 坐標爲正,則在 OX 上;爲負,則在 OX' 上;求得其至原點 O 之距離,等於 x 坐標之絕對值之點 M. 過其點,引 y 軸之平行線.如所求之點之 y 坐標爲正,則於此平行線位於 XX' 之上方;爲負,則於此平行線位於 XX' 之下方.求得其至 M 點之距離,等於 y 坐標之絕對值之點 P 時,則 P 卽爲所求之點.

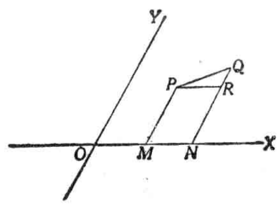
又於一直線上依同方向所量得之距離,如以正數表之,則於其反對方向所量得之距離,一般皆以負數表之.例如設 A, B 爲一直線上之二點,則 AB 非但表 A,B 間之距離,抑且表由 A 向 B 所度量之方向.卽設

$$AB=+5$$

則 $$BA=-5$$

一般 $$AB=-BA$$

3. 二點間距離 設 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ 爲所與之二點,坐標軸正之方向之夾角爲 ω, 卽 $\angle YOX=\omega$. 由 P, Q 二點與 y 軸平行,各引 PM, QN 二線,交 x 軸於 M, N 點.又由 P 引 x 軸之平行線 PR, 交 QN 於 R. 則



$$OM=x_1 \qquad PM=y_1$$

$$ON=x_2 \qquad QN=y_2$$

又　$PR=ON-OM=x_2-x_1$

$QR=QN-PM=y_2-y_1$

且　$\angle PRQ=\pi-\omega$

$\therefore$　$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{QR}^2-2PR\cdot QR\cos PRQ$

$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega\cdots(1)$

設二點中之一點 P 爲原點,卽 $x_1=0,\ y_1=0$ 時,則上之公式成爲

$$\overline{PQ}^2=x_2^2+y_2^2+2x_2y_2\cos\omega\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

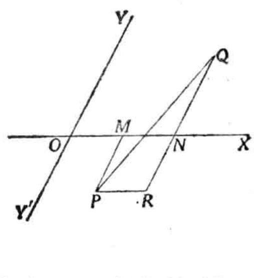
又設坐標軸爲直交坐標,卽 $\omega=90°$ 時,則前之公式復成爲

$$\overline{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

如坐標軸爲直交坐標,同時其一點 P 復爲原點時,則公式成爲

$$\overline{PQ}^2=x_2^2+y_2^2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

使用上列各公式時所應注意者,厥爲坐標之符號.例如 P 點位於 XOY' 角內時,則其縱坐標 y_1 爲負,吾人必須於公式中改書 y_2+y_1 以代 y_2-y_1.此事觀圖自明,因此時 QR 成爲 QN 與 PM 之和故也.



學者如自行作圖,置 P,Q 二點於各象限中而研究之當可得知前列諸公式,無論何時,皆屬眞確.