离散数学普及丛书

数理逻辑、集合

邱伟德　胡美琛　编著　人民邮电出版社

离散数学普及丛书

数理逻辑、集合

邱伟德　胡美琛　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书是《离散数学普及丛书》的第一分册，主要介绍的是数理逻辑和集合论的基本概念。本书通俗易读并采用了形象和直观的方法来写在讲解基本概念的同时都结合有例题，以便帮助读者理解，只要具有中学数学基础的读者就能读懂。本书主要读者对象为初、高中文化程度的读者，非计算机专业的大学生．中专生、工程技术人员及经济管理人员。

离散数学普及丛书
数理逻辑、集合
邱伟德　胡美琛　编著
责任编辑：梁凝

人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
河南邮电印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

开本：787×1092　1/32　　1987年12月第一版
印张：7 4/32 页数：114　　1987年12月河南第一次印刷
字数：163 千字　　印数：1—5 500 册
统一书号：15045·总2997—有5403
定价：1.40 元

绪　言

每一门学科都有它产生和发展的过程，离散数学也不例外。如果把数学比作桂冠的话，那么，离散数学中的许多内容早就作为这顶桂冠上的明珠闪烁出诱人的光彩了。早在公元前三百多年（－282——322），就有属于阿里斯多德（Aristotle的逻辑学，随后，到十七世纪中叶，莱布尼兹（leibnitz）首先用符号化方法研究逻辑学，十九世纪中叶再由布尔（Boole）提出了逻辑系统，此后，数理逻辑才得到蓬勃发展；集合论的研究是近百年的事情，德国著名数学家康托尔（Cantor）于1874年发表了一篇“关于实代数数所组成的集合的一个性质”的论文，奠定了集合论发展的基础；十八世纪中叶，欧拉（Euler）在1736年发表了一篇图论方面的论文，回答了哥尼斯堡七桥问题的不可解性[注]；至于代数结构这个分支，从十六世纪意大利一位中学教师塔尔塔利亚（Tartaglia）构造出求三次方程解的有效方法，到1820年由阿贝尔（Abel）指出5次方程的解是与系数的结构有关，而1846年伽罗华（Galois）理论奠定了代数结构的基础。上述这些简单的介绍，说明这些包含在离散数学中的数

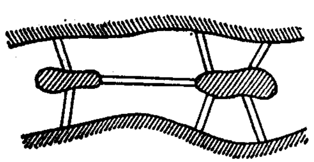


图 0—1

〔注〕：哥尼斯堡七桥问题：当时在普鲁士的哥尼斯堡有一条普雷格尔河横贯该城，东发夫岛位于这条河的中央，河上架有七座桥，如图0—1所示。问一个步行者能否从一处出发走过每座桥一次且仅一次，并回到原处？

学分支是很早就已经出现了。然而，这些数学分支在过去较多地是作为纯粹数学的内容而进行研究的，因此，虽有一些应用，但还是不够广泛。

自然科学，特别是基础理论学科；正当它在发展的时候，并不见得马上就能看到它在实际中的应用。例如，布尔代数直到近代才发现它在数字电路中的重要作用。1946年第一台电子计算机投入运转后，由于计算技术的飞跃发展，在自动机理论、计算机系统结构、计算机网络、语言理论、容错计算技术、数据结构、人工智能、信息编码、算法理论等各个领域中都涉及到许多有关离散对象的研究，迫切地需要用数学工具来描述和处理。人们不断地用到那些研究离散量的数学理论，这些理论包括集合论、数理逻辑、代数结构、组合论、图论等。直到本世纪七十年代，经过科学的实践，人们才把计算机科学中所用到的那些离散量的数学理论综合在一起，给予全面系统地论述，出现了不少离散数学的专著，例如：

1973年由Stone, Harold S.写的“Discrete Mathematical Structures”（离散数学结构）；

1975年由Trembley, J.P.和R.Manohar合著的“Discete Mathematical Structures With Applications to Computer Science”（离散数学结构及其在计算机科学中的应用）；

1977年由C.L.Liu写的“Elements of Discrete Mathematics”（离散数学基础）；

1977年由Donald F. Stanat和David F. Mcallister合著的“Discrete Mathematics in Computer Science”（计算机科学中的离散数学）等，都是在这个时期的主要教科书。从而就形成了较为完整的离散数学系统。最近，1980年还有由

Leon S. Levy 著的“Discrete Strucutres of Computer Science”（计算机科学的离散结构）等。

离散数学中的内容极为丰富，虽然这些内容大多较抽象，然而，它们都是计算机科学的数学基础。它们在计算机科学的各个方面，有着极其广泛的应用。譬如，数理逻辑是数字电路设计、程序设计理论和方法等方面的有效工具；在形式语言中用到代数结构中的一些概念；在现代通信系统以及计算机系统设计中为了保证信息传输的正确性，要考虑检错和纠错技术，为此，必须设计功能强、结构好的纠错码，而群论就是设计检错、纠错码的一个基本数学工具；至于图论在计算机科学中的应用也是很多的，诸如故障检测、最短路径、数据结构、编译技术、计算机网络等。离散数学各个分支之间也有着密切的联系。例如，集合论中的公式都可符号化且用数理逻辑的推理方法论证；许多组合计数问题都用到群论；近来，已有学者直接将抽象的代数结构对有向图加以研究。另外，计算机科学技术的发展也促进了离散数学的发展。譬如，图论中的四色猜想早在1857年就已提出，直到1976年由美国两位教授在计算机上算了一千多个小时得到解决。这种问题的解决，需要找适当的“数据结构”存放信息，而好多常用的数据结构可直接用链、树等图形直观地表示。正因为离散数学的产生和发展是与计算机科学紧密相联的，所以，对计算机有兴趣的人来说，离散数学是必须掌握的。

为使读者对离散数学的应用有所认识，在绪言中简要地介绍一些例子也是必要的。譬如，给定几个不相等的数，要求找出其中的最大数和最小数。一个自然的方法是：任取两个数作比较，保留大数，再在未比较过的数中任取一数与该大数比较，保留大数，依此类推，经过n－1次比较后，就可找出最

大数，然后，在除去最大数后的n－1个数中用类似的方法，经过n－2次比较，就可找出最小数。这样共需（n－1）＋（n－2）＝2n－3次比较，才能找出最大数和最小数。这显然是一个可行的方法，但并不是好方法。更好的方法是把n个数（这里假设$n=2^k$）分成两部分，每部分有$\frac{n}{2}$个数，先在每部分中分别找出最大数和最小数，然后，将两部分各自的大数作一次比较，其大者就是n个数中的最大数，将两部分各自的小数作一次比较，其小者就是n个数中的最小数，上述步骤递归地进行k－1次，直到每个部分恰有两个数为止。如果用T(n)表示从n个数中找最大数和最小数所需要的比较次数，那么，我们就有$T(n)=2T(\frac{n}{2})+2$。这是一个递推方程。因为两个数只要作一次比较就可确定大的数和小的数，所以$T(2)=1$。由递推方程便可得

$$T(4)=2T(2)+2=2\cdot1+2=4$$
$$T(8)=2T(4)+2=2\cdot4+2=10$$
$$T(16)=2T(8)+2=2\cdot10+2=22$$

等等。实际上，我们不必这样做，因为这个递推方程的解是$T(n)=\frac{3}{2}n-2$。这后一种方法，通常称为分治术。将这两种方法比较一下，对于同一个n，前者要比后者多$\frac{1}{2}n-1$次比较。当n＝128时，分治术可省去63次比较，而当n＝1024时，分治术将省去511次比较。用计算量（象这里的比较次数等）来衡量算法的好坏，这就是算法复杂性。再譬如，在数字计算机与现代通信系统中，常常要进行大量的信息交换，在数

字通信中这些信息由0,1的数字信号组成，一个通信过程就是由发送端将数字信号输出，通过传输信道送到接收端。

但是，由于在传输信道中会受到噪声干扰，有些信息位可能发生错误，即由0变1或由1变0。假如，我们所要传输的信息都是长度为2的二进制序列，它们有00，01，10，11，这些二进制序列称为码字。当发送端发送的信息是01，经过传输后，可能在第一位或第二位出错，那么，01将分别变成11或00。由于11或00都是码字，这样，我们就无法判断11或00是01的出错信息呢还是11或00的不出错信息。为了弥补这个缺陷，我们只要在上述每个码字的后面增加一位校验位，使得每个码字中1的个数都是偶数，即将00，01，10，11分别变成000，011，101，110。这样，当传输过程中出现一位错误时，我们就可以判断了。例如，发送字是011，如果在第一、二、三位的任一位上出错，则将分别变为111，001或010，显然，这些字中1的个数都是奇数，它们都不属于原来的码字，因此，它们都是非法码。可见，增加一位校验位，我们就可以查单错了。至于，判别一个字中所含1的个数的过程可由一类称为有限状态机的机器自动完成。这种机器有三个状态，S—初始状态，E—字中含1的个数为偶数，O—字中含1的个数为奇数；输入字母是0或1。这些状态在输入的影响下，有下面的转换关系：

$$S \xrightarrow{0} E$$

$$S \longrightarrow O$$

$$E \xrightarrow{0} E$$

$$E \xrightarrow{1} O$$

$$O \xrightarrow{0} O$$

$$O \xrightarrow{1} E$$

将三个状态分别用大圆圈圈起来画在纸上。如果某个状态A输入 i 转为状态B，那么就从A到B画一条带有标记 i 的有向弧。于是，上述这些转换关系可直观地表示成图0—2。

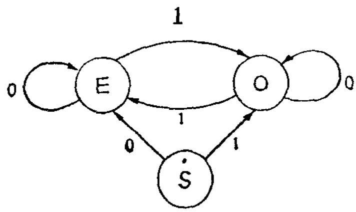


图 0—2

这个有限状态机称为奇偶校验器。奇偶校验器用于发送端，就可用来决定所要增加的校验位是0还是1。例如，输入为01，那么奇偶校验器有下列的状态转换

$$S \xrightarrow{0} E \xrightarrow{1} O$$

机器停在状态O，表示输入字中1的个数为奇数，所以，增加的校验位应为1，即01应变成011。同样地，用奇偶校验器可确定，对00应增加校验位0变成000，对于10和11应分别增加校验位1和0而变成101和110。另外，奇偶校验器用于接收端，就能查错。例如，接收字为001，将它输入奇偶校验器，就有下列的状态转换

$$S \xrightarrow{0} E \xrightarrow{0} E \xrightarrow{1} O$$

机器停在状态O，表示输入字中1的个数为奇数，因此传输过程中发生了单错。类似地，对于接收字011，输入奇偶校验器，经过状态转换，机器停在状态E，表示输入字中1的个数为偶数.因此传输过程中未出现错误。这仅是有限状态机的一个应用。

随着我国计算机科学的发展，目前在设有计算机科学系或专业的高等院校都相继开设了离散数学课程。我们写这套丛书的目的之一是给非计算机专业的人员提供一本自学读物，同时在更广泛的范围内普及离散数学的基本知识。这是因为，目前的广大技术人员和中学教师了解和熟悉离散数学的较少，在基础知识方面不能更好地适应现代科学技术发展的需要。现在中学的数学教材中，已经出现了集合、算法和程序等概念，这表明了一种新的趋向。我们深信，广大技术人员读了这套丛书必将使离散数学的有关内容能广泛地应用到工业部门和经济部门中去，这套丛书对广大中学数学教师也将是有用的，可以使他们在中学的数学教学中能增加一些诸如集合、逻辑代数、组合论等内容，以提高学生的思维能力和现代数学的基本训练。

当人们到书店选购书籍时，除了根据自己的爱好外，总还要衡量一下自己的阅读能力，而这又往往取决于读者的知识基础。从离散数学的基本内容来看，只要具有中学数学基础就能顺利地读完本丛书。我们希望，当你合上本丛书的最后一页，回顾一下，能觉得得益匪浅。当然，对于已经学过高等数学的读者来说，阅读本丛书自然会感到更省力一些。本丛书主要是为中学文化程度的读者、非计算机专业的大学生、中专生、工程技术人员以及经济管理人员而编写的普及性读物，因此，我们尽可能地采用形象和直观的方法来写，然而，有些概念总带

有一定的抽象性，这对提高读者的抽象思维能力是有好处的，只要多次反复地加以理解，也是不难掌握的。

前面已经谈到离散数学这门学科是由若干个数学分支汇集而成的，是随着计算机科学的发展而形成的。因此，如果能同时阅读一些有关电子计算机、怎样使用电子计算机、计算机算法语言等方面的书籍，那将获得更大的收获。就学习离散数学本身来说，读者应该首先把基本概念搞清楚，掌握书上介绍的例子与基本概念之间的联系，最好自己努力地去找一些适当的例子来加深对数学概念的理解。譬如，有一个原理称为鸽巢原理，通俗地说就是：设有m只鸽巢和n只鸽子，如果n＞m，那么鸽子都回巢时，至少有一只鸽巢要飞进多于一只鸽子。一个很清楚的例子是：如果有13个人，那么必有两个人是同一个月出生的。有一个论断说：在一个边长为1的正方形里任意画上七个点，其中必定存在这样三个点，即以这三个点为顶点的三角形面积不超过总面积的1/6。证明这个论断成立就不是一目了然的了，但是，如果用鸽巢原理稍加分析，就可得到论证。事实上，只要将边长为1的正方形分成三个等分矩形，如图0—3所示，在这个正方形内任意画七个点。我们将三个等分矩形看作三只鸽巢，将七个点当作七只鸽子，那么由鸽巢原理可知，至少有一个矩形中要含有三个或三个以上的点，而一个$\frac{1}{3}\times 1$的矩形内的任意三点所组成的三角形面积，其最大值为1/6。我们知道，利用如此简单的鸽巢原理可以解决更多有趣的问题，读者可以在本丛书的第二部分中学到。学习离散数学更要注意多做些习题，这是因为离散数学的基本概念通常是容易理解和接受的，但是确实有不

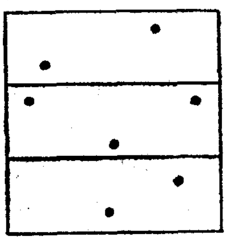


图 0—3

少习题不是很容易作出解答的，而要求人们具有较强的分析问题的能力。在我们这套丛书中，各部分内容的后面都选编了一些习题，在这些习题中，除了一部分基本上属于理解概念的习题外，还选择了相当多的证明题和应用题，而这些习题决不是用套公式的办法所能奏效的，通过这些习题的训练，对于提高分析、推理、论证的能力极有帮助，认真地对待这些习题，做一道题往往可以起到举一反三的作用，这是学好离散数学的一个重要方法。为了便于读者自学，附有习题解答。

这套丛书共分四部分，写成四本书，其基本内容如下：

第一部分：数理逻辑，矩阵，集合，关系与映射

第二部分：组合数学，图论

第三部分：代数结构，布尔代数

第四部分：组合开关电路，编码，形式语言与自动机，算法分析

每本书的内容有它相对的独立性。前三本书中内容之间的联系，在每本书的开头用图表形式展示，以供读者阅读时参考。

这套丛书由作者分工撰写：

“数理逻辑、集合”	邱伟德　胡美琛
“组合与图”	胡美琛　邱伟德
“代数结构”	李为鉴　刘永才
“离散数学的应用”	刘永才　李为鉴

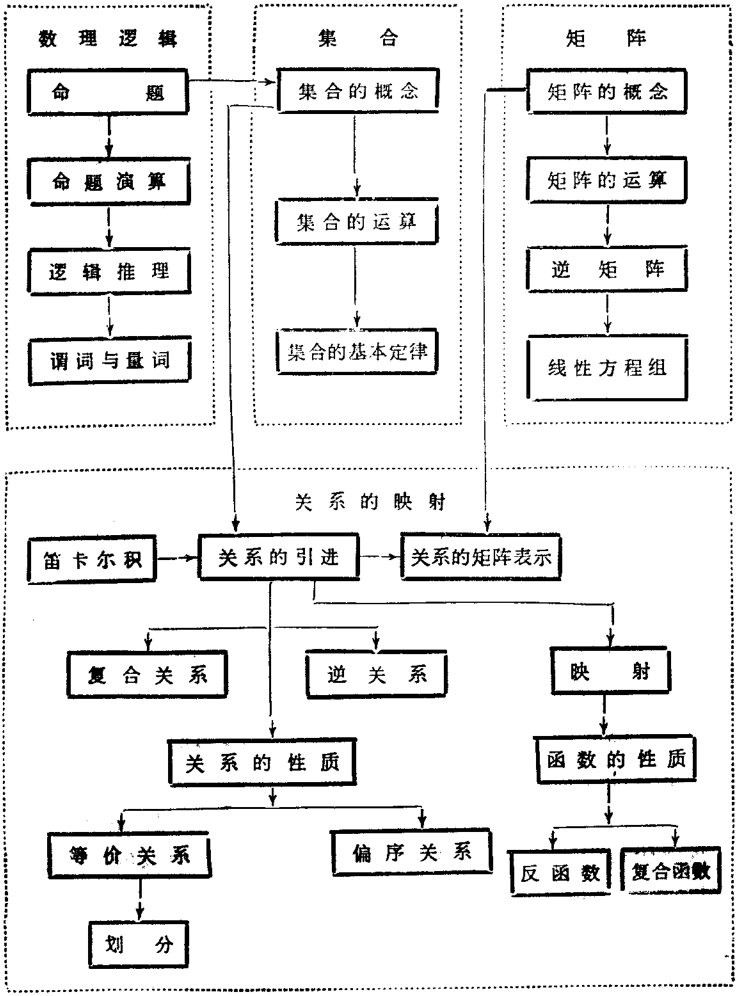
每本书都经过四位作者共同讨论定稿。

我们写离散数学丛书是一种尝试，经验不足，只是抱着普及现代数学这样一个愿望。从书中会存在这样那样的缺点，甚至错误，敬希广大读者提出批评和指正。

编者

一九八一年三月

第一部分的内容用图表形式展示如下：



目　录

第一章 数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学。思维的形式结构包括概念，判断和推理之间的结构和联系。概念是思维的基本单位，通过概念决定事物是否具有某种属性就是判断，由几个判断推出另一个判断的思维形式就是推理。研究推理的方法很多，用数学的方法来研究推理就是数理逻辑。在用数学的方法推理时引进了一套符号体系做为“工具”。例如，假定：如果今天下雨，则我不去看电影，若我不去看电影，则我在家里看书。由此可推出如果今天下雨我则在家里看书。这个推理可用符号表示如下，设：P为今天下雨，Q为不去看电影，R为在家看书，其推理过程的符号表达式为：

$$P \to Q,\ Q \to R \Rightarrow P \to R$$

以下就介绍这些符号的意义，以及用符号逻辑研究推理的方法，主要讲述命题逻辑和谓词逻辑。

§1 命题

命题

在日常语言中，句子分为陈述句、疑问句、感叹句、祈使句等等，用来表达说话人的不同“信息”。只有陈述句是叙述事情的。符合事实的陈述句，我们称它为真语句，反之，违反事实的陈述句就是假语句。一个陈述句，凡是能肯定它是真还是假时，这种陈述句称为命题。请看以下例子：

雪是白的。

$5+4=9$。

地球是方的。

太阳是地球的卫星。

这四个句子都是命题，前面两个是真命题，后面两个是假命题。疑问句，祈使句等等都不是叙述一件事情，也无所谓真假，它们都不是命题。因此，下列句子不是命题。

不要关门！

老黄在家吗？

再看以下句子，它们是命题吗？

（1）哥德巴赫猜想*是成立的。

（2）$11+1=100$。

目前为止还没有人能解决哥德巴赫猜想，当然不能肯定句子（1）的真假。但是，相信人类终究能解决这个数学难题，而就该猜想本身，不是真便是假，其真假是确定的，可以认为句子（1）是命题。在二进制数系中，（2）式成立，在其它数系中，（2）式不成立，如果从上下文能确定数系的话，（2）才是命题。

命题的“真”和“假”，称为命题的真值，我们分别用大写英文字母T和F表示。

复合命题

例1

命题	真值
太阳从东方升起	T
钢是金属	T
水是固体	F
公鸡会生蛋	F

* 凡大于2的偶数都是两个奇素数之和，这就是著名的哥德巴赫（Goldbach）猜想