第2篇

电工数学

第2篇

电工数学

主编单位 华中理工大学

编写单位 华中理工大学

湖北工学院

主　　编 周克定

编 写 人 李朗如　周克定　周启元

主　　审 卢　强

第 1 章　初 等 数 学

1　代数

1·1　恒等式与不等式

1·1·1　恒等式

$$(a\pm b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i\neq j}a_ia_j$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^3=\sum_{i=1}^{n}a_i^3+3\sum_{i\neq j}a_i^2a_j+6\sum_{i<j<k}a_ia_ja_k$$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n \quad (n\text{ 为正整数})$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \quad (n\text{ 为正整数})$$

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-b^{n-1}) \quad (n\text{ 为偶数})$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \quad (n\text{ 为奇数})$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

1·1·2　不等式

1. 简单不等式　若 $a>b$ 且 $c>0$，则 $a\pm c>b\pm c$；$ac>bc$，但若 $c<0$，则 $ac<bc$；又若 $n>0$，则 $a^n>b^n$；又若 $n<0$，则 $a^n<b^n$；当 n 为正整数时，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$；当 $0<n<1$ 时，$(1+x)^n\leqslant 1+nx\ (x\geqslant -1)$；当 $n<0$ 或 $n>1$ 时，$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (x\geqslant -1)$。

2. 绝对值不等式　若 $|a|\leqslant b$，则 $-b\leqslant a\leqslant b$；若 $|a|\geqslant b$，$b>0$，则 $a>b$，或 $a<-b$；若 a，b，为任意实数，则

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$$

若 a，b，…，k 为任意实数，则

$$|a\pm b\pm\cdots\pm k|\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|。$$

3. 几种重要不等式

(1) 算术平均值与方均根值不等式

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

上式中当且仅当 $a_1=a_2\cdots=a_n$ 时等号成立。它表明几个数的算术平均值的绝对值不超过这些数的方均根值。

(2) 设 a_1，a_2，a_3，…，a_n 为正数，则它们的几何平均值不超过算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

当且仅当 $a_1=a_2\cdots=a_n$ 时等号成立。

(3) 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，则有

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\leqslant\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

(4) 设 a_1，a_2，…，a_n 为正数，又 $\alpha<0$，$\beta>0$，则有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

(5) 柯西不等式：设 a_i 和 b_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。该式表明两向量 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 的内积小于或等于两向量模(长度)之积。

(6) 闵柯夫斯基不等式：设 a_i 和 $b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，又 $r>0$，$r\neq1$，则

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r>1)$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r<1)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。当 $r=2$ 时，此不等式亦称三角不等式，它表明三角形两边之和大于第三边。

1·2 指数与对数

1·2·1 定义

若 x 为自变量，且 $-\infty<x<+\infty$，则由方程 $y=a^x$ 确定的函数称为指数函数。式中 a 为不等于 1 的正数。当 $a=e$ 时，常把 e^x 记为 $\exp x$，把 $e^{f(x)}$ 记为 $\exp\{f(x)\}$。

若把 x 视为自变量，y 视为因变量，且 $0<x<\infty$，则由 $x=a^y$ 确定的函数关系式 $y=f(x)$，叫做以 a 为底的 x 的对数函数，x 称为真数，记作 $y=\log_a x$，指数函数与对数函数互为反函数。

以 10 为底的对数称为常用对数，记为 $\lg x=\log_{10}x$。

以 e＝2.718281828…为底的对数称为自然对数，记为 $\ln x=\log_e x$。

常用对数与自然对数有如下关系：

$$\lg y = M\ln y \qquad \ln y = \frac{1}{M}\lg y$$

式中 M——模数，$M=\lg e=0.4342944819\cdots$。

1·2·2 指数运算

$$a^m a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ (m\text{ 和 }n\text{ 为实数，下同})$$

$$(a^m)^n=a^{mn} \qquad (ab)^m=a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m} \qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \qquad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$a^0=1 \qquad (a\neq0)$$

1·2·3 对数运算

$$\log_a a=1 \qquad \log_a 1=0\ (a>0,\text{ 且 }a\neq1,\text{ 下同})$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$$

$$\log_a x^n=n\log_a x \qquad a^{\log_a y}=y$$

$$\log_a y=\frac{\log_b y}{\log_b a} \qquad \log_a b\log_b a=1$$

零没有对数，对于实数域负数没有对数。对于复数域，负实数（$-a$）的对数为一复数，可表示为 $\ln(-a)=\ln a+i\pi$。

1·3 复数

1·3·1 复数的概念

记 $\sqrt{-1}=i$ 称为虚数单位，复数 z 的一般表示法为 $z=a+ib$，a 和 b 均为实数，a 称为 z 的实部记为 $a=\mathrm{Re}(z)$，b 称为 z 的虚部记为 $b=\mathrm{Im}(z)$。$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 z 的模，$\arg z=\varphi=\arctan\frac{b}{a}$ 称为复数 z 的辐角。一个复数可以有无穷多个辐角，$\arg z$ 称为主辐角，它的值为

$$0\leqslant \arg z < 2\pi$$

且有 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

两个复数仅在虚部相差一正负号者称为共轭复数，例如，$z=a+ib$ 与 $\bar{z}=a-ib$ 互为共轭复数。z 的共轭复数常记作 $\bar{z}$ 或 z^*。

1·3·2 复数的表示法

1. 坐标表示法 在复数的代数表达式 $z=a+ib$ 中，此处“＋”符号不代表运算符，仅作为复数的记号或表示法。从几何意义上看，可以把复数当作数的概念的扩充。任何实数可对应于起于坐标原点的一维数轴 Ox 上的一个点；在一平面上的 Oxy 直角坐标系中，将 Ox 表示实数轴，Oy 表示虚数轴，这样的平面称为复平面。复数 $z=a+ib$ 与复平面上一点 $A(a,b)$ 一一对应（见图 2·1-1），所有有限复数都与复平面上的点一一对应。

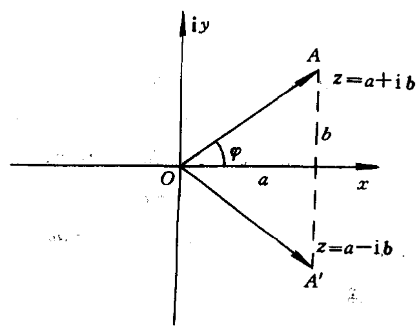


图 2·1-1 复数坐标表示法

2. 矢量表示法 实数 a 与 b 分别对应于矢量 $\overline{OA}$ 在 Ox 轴与 Oy 轴上的投影，复平面上任一矢量对应于一个确定的复数 $z=a+ib$，矢量 $\overline{OA'}$ 表示共轭复数 $\bar{z}=a-ib$（见图 2·1-1）。两矢量的长度相等、方向相同时，称两矢量相等；因此两个复数当且仅当它们的实部与虚部分别相等时才称两复数相等。故

$$a_1+ib_1=a_2+ib_2$$

相当于 $\qquad a_1=a_2 \qquad b_1=b_2$

复数 $a+ib$ 为零，即 $a+ib=0$，必然是 $a=0$ 和 $b=0$。

3. 三角表示法

$$z=|z|(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$
$$=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\quad(r>0)$$

4. 指数表示法

$$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

当 $r=1$ 时，有欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

5. 极坐标表示法（有时简称为极型）

$$z=a+\mathrm{i}b=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=r\angle\varphi$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2},\varphi=\arctan\frac{b}{a}$$

1·3·3 复数的运算

1. 虚数单位的乘方与开方

$\mathrm{i}=\sqrt{-1}\quad \mathrm{i}^2=-1\quad \mathrm{i}^3=-\mathrm{i}\quad \mathrm{i}^4=1$

$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}\quad \mathrm{i}^{4n}=1$

因为 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，所以 $\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\mathrm{i}^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

2. 代数式运算

$(a+\mathrm{i}b)\pm(c+\mathrm{i}d)=(a\pm c)+\mathrm{i}(c\pm d)$

$(a+\mathrm{i}b)\times(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)$

$(a+\mathrm{i}b)\div(c+\mathrm{i}d)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

3. 三角式运算

$$z_1\times z_2=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)\times r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

$z^n=[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)$（$n$ 为正整数）

当 $r=1$ 时，得到德莫弗公式

$$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$$

$$z^{\frac{1}{n}}=[r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^{\frac{1}{n}}$$
$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$
$$[k=0,1,2,\cdots,(n-1)]$$

4. 指数式运算

$$z_1\times z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\times r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$$

$z^{\frac{1}{n}}=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$ [n 为正整数，$k=0,1,2,\cdots,(n-1)$]

由此，实数 1 可表示为复数的指数形式，即 $1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+2k\pi)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi},1^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}$。

5. 共轭复数的运算 复数 $z=a+\mathrm{i}b=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的共轭复数为 $\bar{z}=a-\mathrm{i}b=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$，以下关系成立：

$z+\bar{z}=2a\qquad z-\bar{z}=\mathrm{i}2b$

$z\bar{z}=|z|^2\qquad \bar{\bar{z}}=z$

$|z|=|\bar{z}|=|z\bar{z}|^{\frac{1}{2}}\qquad z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\arg\bar{z}=-\arg z\qquad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2\qquad (\overline{z_1/z_2})=\bar{z}_1/\bar{z}_2\quad(z_2\neq0)$

1·4 数列与简单级数

1·4·1 定义

数列 依照某种规律排列而成的一列数称为数列，如 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，记作 $\{a_n\}$。

级数 将数列的各项用和号联接起来，得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，称为级数。$a_n$ 称为该数列或相应级数的通项（一般项）。级数都含有无穷项，前 n 项之和称为部分和。

1·4·2 等差、等比与调和级数

1. 等差级数 由数列

$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,\cdots$ （d 为常数）

构成的级数称为等差级数，又称算术级数，d 称为公差。

通项 $a_n=a_1+(n-1)d$

前 n 项之和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$

$$=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$$

等差中项 $a_k=\dfrac{a_{k-r}+a_{k+r}}{2}(k>r)$

2. 等比级数 由数列

$a_1,a_1q,a_1q^2,a_1q^3,\cdots$ （q 为常数）

构成的级数称为等比级数，又称几何级数。q 称为公比（$q\neq1$）。

通项 $a_n=a_1q^{n-1}$

前 n 项之和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

无穷递减等比级数之和 $S=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\dfrac{a_1}{1-q}\quad(|q|<1)$

等比中项 $a_k^2=a_{k-r}a_{k+r}(k>r)$

3. 调和级数 一数列其各项的倒数之和构成等差级数者，该数列构成的级数称为调和级数。即若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots$为一等差级数，则$a+b+c+\cdots$为调和级数。

调和中项 $b=\frac{2ac}{a+c}$

设A,G,H分别为某两个数的等差中项、等比中项和调和中项，则有

$$AH=G^2$$

1·4·3 高阶等差级数

任何数列中，若接连地由各项减去其前一项，即得到一数列称为原数列的第一阶数列。仿此又可得到第二阶数列，余类推。如果做了r次，得到r阶差完全相等的数列，其以后的阶差均为0，则称为原数列为r阶等差数列，相应地级数称为r阶等差级数。例如

数列	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
一阶差	$d_1=\Delta a_1$	Δa_2	Δa_3	Δa_4	$\cdots$	
二阶差	$d^2=\Delta^2 a_1$	$\Delta^2 a_2$	$\Delta^2 a_3$	$\cdots$		
三阶差	$d_3=\Delta^3 a_1$	$\Delta^3 a_2$	$\cdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
r阶差	$d_r=\Delta^r a_1$	$\Delta^r a_2$				

式中 $\Delta^k a_i=\Delta^{k-1}a_{i+1}-\Delta^{k-1}a_i$

$\Delta^r a_1=\Delta^r a_2=\Delta^r a_3=\cdots$

对于r阶等差数列的通项式为

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{r!}d_r\quad(n>r)$$

式中 d_1——一阶差构成数列的首项；

d_2——二阶差构成数列的首项；

d_r——r阶差构成数列的首项。

前n项之和为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2!}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d_2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{(r+1)!}d_r$$

1·4·4 某些级数的部分和

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}n(4n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

1·5 一元代数方程

1·5·1 一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

根的表达式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

根与系数的关系 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

根的性质由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 决定：

$\Delta>0$，有两个不相等的实根；

$\Delta=0$，有两个相等的实根；

$\Delta<0$，有一对共轭复根。

1·5·2 一元三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

令 $x=y-\dfrac{a}{3}$，上式可化为

$$y^3+py+q=0 \tag{2·1-1}$$

式中 $p=-\dfrac{a^3}{3}+b$

$$q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c$$

方程式（2·1-1）的三个根的表达式为

$y_1=A+B$ $y_2=\omega A+\omega^2B$ $y_3=\omega^2A+\omega B$

式中 $\omega=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ $\omega^2=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

根与系数的关系

$$y_1+y_2+y_3=0$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=-\frac{p}{q}$$

$$y_1y_2y_3=-q$$

根的性质由判别式 $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ 决定。

$\Delta>0$，有一实根和一对共轭复根；

$\Delta=0$，有三个实根，且有重根；

$\Delta<0$，有三个不相等的实根。

1·5·3 一元四次方程

方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根由下述两个二次方程中求得

$$\left(x^2+\frac{a\pm\sqrt{8y+a^2-4b}}{2}\right)+\left(y\pm\frac{ay-c}{\sqrt{8y+a^2-4b}}\right)=0$$

其中，y 是下述方程的任一实根。

$$y^3-\frac{b}{2}y^2+\frac{ac-4d}{4}y+\frac{d(4b-a^2)-c^2}{8}=0$$

1·5·4 一元 n 次方程

方程 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}=0$ 共有 n 个根（实数根，其中可能有些是重根，或成对的共轭复数根）。如果 x_1，x_2，…，x_i，…，x_n 为上述方程的根，根与系数的关系为

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{n}x_ix_j=\frac{a_2}{a_0}$$

$$\sum_{\substack{i<j<k\\ i,j,k=1}}^{n}x_ix_jx_k=-\frac{a_3}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

此处，符号“Π”表示连乘。

阿贝尔定理指出，五次及更高次的代数方程没有一般的用系数表示出来的代数解法，常常只能借助于数值解法。

1·6 行列式

1·6·1 行列式的定义和展开

1. 定义 设有 n^2 个数，排成 n 行（水平方向）和 n 列（垂直方向）的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$；得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2·1-2}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式（2·1-2）的项共有 $n!$ 项。所有这 $n!$ 项的代数和 $\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $D=|A|=\det A=\det(a_{ij})=|a_{ij}|=\Delta(a_{ij})$。式中，$a_{ij}$称为行列式$|A|$的元素，它的第一个下标指明该元素所在的行，而第二个下标则指明所在的列。当 $i=j$ 时，a_{ii}称为主对角线元素；$i\neq j$ 时，a_{ij}称为非对角线元素，一般 $a_{ij}\neq a_{ji}$。

关于一个排列的逆序数 t 的意义，必须加以说明。对于 n 个不同的自然数，可以规定一个标准次序，例如规定由小到大作为标准次序，于是在这 n 个数的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序。一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的总逆序数，简称逆序数。

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数的一个排列，若由小到大定作标准次序，排在元素 p_i（$i=1,2,\cdots,n$）左边且比 p_i 大的元素有 t_i 个，便认为 p_i 的逆序数是 t_i，这个排列的总逆序数就是全体元素逆序数之和，即

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

例如在 312 这一排列中（123 是标准次序），3 排在首位，它的左边没有比它更大的数，故 3 的逆序数为 0，依次类推，1 和 2 的逆序数都是 1，故此排列的总逆序数 $t=0+1+1=2$。

2. 余子式和代数余子式 在 n 阶行列式 D 中任取 k 行与 k 列（$1\leqslant k\leqslant n-1$），由这 k 行与 k 列交点处的元素按其原有的相对位置排列构成的 k 阶行列式称为行列式 D 的 k 阶子式，记作 M'。又若将 k 行和 k 列的元素从 D 中划去后所余下的元素按其原有相对位置排列，而得到的 $n-k$ 阶行列式，称为子式 M' 的余子式，记作 M。显然 M' 也是 M 的余子式，所以在 D 中 M' 与 M 互为余子式。例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

中，两个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\quad,\quad\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24}\\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}$$

是一对互余的子式。

当 $k=1$ 时，得最简单的子式（一阶子式）a_{ij}。一阶子式 a_{ij}的余子式亦称为元素 a_{ij}的余子式，常简称子式，记作 M_{ij}。乘以 $(-1)^{i+j}$，用 A_{ij}表示，称为 a_{ij}的代数余子式，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。代数余子式有时亦称余因子。

3. 行列式的展开 行列式可以按行（或按列）展开。行列式 D 的值等于它的任意一行（或一列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(\text{按 } i \text{ 行})$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(\text{按 } j \text{ 列})$$

推广到 k 阶子式，有拉普拉斯展开定理，即在 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行（或 k 列）后，包含于这些行（或列）中的所有 k 阶子式与它们各自的代数余子式的乘积之和等于 D。

4. 几个特殊行列式

a. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}d_i=d_1d_2\cdots d_n$$

b. 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0\\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

c. 二阶行列式

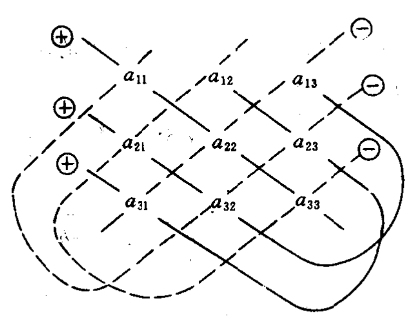
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

d. 三阶行列式（按列展开）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{13}a_{22}$$

展开记忆方法（仅适用于三阶行列式）：



对于四阶和四阶以上的行列式，必须按拉普拉斯展开定理采用逐步降阶的方法展开。

1·6·2 行列式的性质

(1) 若有一行或一列各元素都等于零，则行列式为零。

(2) 若一行或一列只有一个元素（如 a_{ij}）不为零，则行列式等于 $a_{ij}A_{ij}$。

(3) 两行（或两列）位置互换，行列式的值不变但需变号。

(4) 若有两行（或两列）相应元素相等或成比例，则行列式等于零。

(5) 行同列互换，行列式的值不变。

(6) 若以任一数 α 乘行列式的一行（或列）的各元素，其结果等于该数 α 乘此行列式的值。

(7) 将行列式中任一行（或列）的每个元素写成两个量之和，则该行列式可写成两个同阶行列式之和。

(8) 将一行（或列）的各元素乘以同一常数，加到另一行（或列）的相应元素上，行列式的值不变。

1·6·3 克莱姆（Cramer）法则（线性方程组的行列式解法）

克莱姆法则：如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{2·1-3}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$$

则方程组（2·1-3）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}\tag{2·1-4}$$

其中 D_j（$j=1,2,\cdots,n$）是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

克莱姆法则有重大理论意义，除了得求解公式（2·1-4）之外，还可从它导出下列重要结论。

(1) 如果 $D=0$，则方程组（2·1-3）无解或有两个不同的解。

(2) 对于齐次线性方程组（b_1，b_2，…，b_n 全为零），即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{2·1-5}$$

如果系数行列式 $D\neq0$，方程组（2·1-5）没有非零解，只有零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$；反之，如果有非零解，则 D 必为零。

1·7 阶乘、排列与组合

1·7·1 阶乘的定义

设 n 为自然数，则

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

称为 n 的阶乘，且规定 $0!=1$。又定义

$$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)}{2^nn!}=(2n+1)\cdots5\cdot3\cdot1$$

$$(2n)!!=2^nn!=(2n)\cdots6\cdot4\cdot2$$

$$(-1)!!=0\ ,\ 0!!=0$$

1·7·2 排列

1. 全排列 从 n 个不同元素中，每次取出 n 个不同的元素按一定的顺序排列，称为全排列。其排列的种数为

$$P_n=A_n^n=n!$$

2. 有重复的排列 从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个元素（$m<n$），允许重复，这种排列称为有重复的排列。其排列种数为

$$A_n^{\bar{m}}=n^m$$

3. 选排列 从 n 个不同元素中，每次取出 m 个（$m<n$）不同元素，按一定的顺序排列，称为选排列。其排列种数为

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

4. 不尽相异元素的全排列 是在 n 个元素中，分别有 r，s，…，t 个元素彼此相同（$r+s+\cdots+t=n$），这样 n 个元素的全排列。其排列种数为

$$A_{n(r,s,\cdots,t)}^n=\frac{n!}{r!s!\cdots t!}$$

5. 环状排列 是从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个不同的元素沿一圈闭合地排列。其排列种数为

$$A_n^{\widetilde{m}} = \frac{A_n^m}{m}$$

1·7·3 组合

1. 一般组合问题 从 n 个不同的元素中，每次取出 r 个不同的元素，不计其次序地组成一组，称为组合。其组合种数为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad \left[C_n^r \text{ 也记作} \binom{n}{r}\right]$$

2. 允许重复的组合 从 n 个不同的元素中，每次取出 r 个元素（允许重复），不计顺序组成一组，其组合的种数与 $n+r-1$ 个不同的元素每次取 r 个不同元素不允许重复的组合数相同。即

$$C_n^{\tilde r} = C_{n+r-1}^r$$

3. 组合基本关系式

$$C_n^m = C_n^{n-m};\quad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m;\quad C_n^m = \frac{A_n^m}{m!};$$

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n;\quad \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} m C_n^m = 0;$$

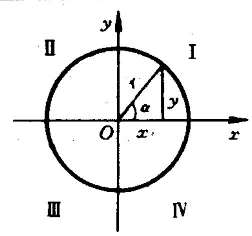
$$C_{n+1}^m = \sum_{j=0}^{m} C_{n-j}^{m-j}。$$

2 三角函数与反三角函数

2·1 三角函数

2·1·1 三角函数的定义（表 2·1-1）

表 2·1-1 三角函数的定义和在不同象限的符号

名称		正弦	余弦	正切	余切	正割	余割	图示
定义		$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	$\cot\alpha=\frac{x}{y}$	$\sec\alpha=\frac{r}{x}$	$\mathrm{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$	
在不同象限的符号	+	Ⅰ，Ⅱ	Ⅰ，Ⅳ	Ⅰ，Ⅲ	Ⅰ，Ⅲ	Ⅰ，Ⅳ	Ⅰ，Ⅱ	
	−	Ⅲ，Ⅳ	Ⅱ，Ⅲ	Ⅱ，Ⅳ	Ⅱ，Ⅳ	Ⅱ，Ⅲ	Ⅲ，Ⅳ	

2·1·2 三角函数基本关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad \sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}\alpha=1 \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1 \quad \mathrm{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha=1$$

2·1·3 诱导公式（表 2·1-2）

表 2·1-2 诱导公式

函数＼角	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$	$n\pi\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\pm(-1)^n\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$(-1)^n\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\pm\tan\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\pm\cot\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\mp\mathrm{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\mathrm{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$(-1)^n\sec\alpha$
cosec	$-\mathrm{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\mp\mathrm{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\mathrm{cosec}\alpha$	$\pm(-1)^n\mathrm{cosec}\alpha$

注：n 为正整数。

2·1·4 某些特殊角的三角函数值（表 2·1-3）

2·1·5 若干三角函数公式

1. 和角与差角的公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

表 2·1-3　某些特殊角的三角函数值

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$0_{\mp 0}$	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

注：$\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$ 表示 $\alpha\to\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 的左、右极限。

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma-\cot\alpha-\cot\beta-\cot\gamma}{\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta-1}$$

2. 和差化积公式(积化和差)

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

3. 倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\sin 4\alpha=8\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

$$\sin 6\alpha=32\cos^5\alpha\sin\alpha-32\cos^3\alpha\sin\alpha+6\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin\alpha=n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\cdots\quad(n\text{ 为正整数})$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$$

$$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$$

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\cdots\quad(n\text{ 为正整数})$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

4. 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sec\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}}$$

5. 降幂公式

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$

$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$

$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$

$$\sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right]$$

$$\sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_{2n+1}^{k}\sin(2n-2k+1)\alpha$$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$

$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$

$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha)$

$$\cos^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right]$$

$$\cos^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{k}\cos(2n-2k+1)\alpha$$

以上式中 n 为正整数。

6. 某些常用的三角级数部分和

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha+k\beta)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$1+\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos(n-1)\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\sin\varphi+\sin2\varphi+\cdots+\sin(n-1)\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{1}{A+\sqrt{AB}}[\sin\varphi-b\sin3\varphi+b^2\sin5\varphi-b^3\sin7\varphi+\cdots]=\frac{\sin\varphi}{A+B-(A-B)\cos2\varphi}$$

$$\frac{1}{A+\sqrt{AB}}[\cos\varphi+b\cos3\varphi+b^2\cos5\varphi+\cdots]=\frac{\cos\varphi}{A+B+(A-B)\cos2\varphi}$$

$$\frac{1}{B+\sqrt{AB}}[\cos\varphi-b\cos3\varphi+b^2\cos5\varphi-b^3\cos7\varphi+\cdots]=\frac{\cos\varphi}{A+B-(A-B)\cos2\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\left[\frac{1}{2}-b\cos2\varphi+b^2\cos4\varphi-\cdots\right]=\frac{1}{A+B-(A-B)\cos2\varphi}$$

$$\frac{2}{A+B+2\sqrt{AB}}[\sin2\varphi-b\sin4\varphi+b^2\sin6\varphi-\cdots]=\frac{\sin2\varphi}{A+B-(A-B)\cos2\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{AB}+2AB/(A+B)}\left[\frac{A-B}{2(A+B)}+\cos2\varphi-b\cos4\varphi+b^2\cos6\varphi-\cdots\right]=\frac{\cos2\varphi}{A+B-(A-B)\cos2\varphi}$$

其中 $b=(\sqrt{B}-\sqrt{A})/(\sqrt{B}+\sqrt{A})$

2·2 反三角函数

2·2·1 反三角函数定义

反三角函数定义与主值范围见表 2·1-4。

表 2·1-4 反三角函数定义与主值范围

函数	定义记号	定义域	主值范围
反正弦	若 $\sin y=x$，则 $y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
反余弦	若 $\cos y=x$，则 $y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
反正切	若 $\tan y=x$，则 $y=\arctan x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<\frac{y}{2}<\frac{\pi}{2}$
反余切	若 $\cot y=x$，则 $y=\mathrm{arccot}\,x$	$-\infty<x<+\infty$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
反正割	若 $\sec y=x$，则 $y=\mathrm{arcsec}\,x$	$x\leqslant-1,\ x\geqslant1$	$0<y<\pi$
反余割	若 $\mathrm{cosec}\,y=x$，则 $y=\mathrm{arccosec}\,x$	$x\leqslant-1,\ x\geqslant1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$

一般反三角函数与主值的关系为

$\mathrm{Arcsin}x=n\pi+(-1)^n\arcsin x$

$\mathrm{Arccos}x=2n\pi\pm\arccos x$

$\mathrm{Arctan}x=n\pi+\arctan x$

式中 n 为任意整数。

2·2·2 反三角函数关系式(表 2·1-5)

表 2·1-5 反三角函数关系式

$\arcsin x=$	$\arccos x=$	$\arctan x=$
$-\arcsin(-x)$	$\pi-\arccos(-x)$	$-\arctan(-x)$
$\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin\sqrt{1-x^2}$	$\mathrm{arccot}\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$	$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$	$\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\arccos(2x^2-1)$	$\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arccot}x$
$\dfrac{1}{2}\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$	$2\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arccot}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\mathrm{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$
$\dfrac{1}{2}\arccos(1-2x^2)$	$2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$	$\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
$2\arctan\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$	$\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}\right)$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$

2·2·3 反三角函数基本公式

$$\sin(\arcsin x)=\cos(\arccos x)=\tan(\arctan x)=x$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos(\mathrm{arccot}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x+\mathrm{arccot}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x\pm\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\right)^{⊖}$$

$$\arccos x\pm\arccos y=\arccos\left[xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]^{⊖}$$

$$\arctan x\pm\arctan y=\arctan\left[\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right]^{⊖}$$

$$\mathrm{arccot}x\pm\mathrm{arccot}y=\mathrm{arccot}\left[\frac{xy\mp 1}{y\pm x}\right]^{⊖}$$

2·3 三角形的一些基本定理

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

式中 R——$\triangle ABC$ 的外接圆半径(见图 2·1-2)。

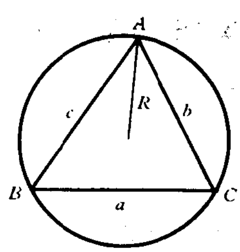


图 2·1-2 说明正弦定理图示

⊖ 等式左边两角之和与差在主值范围内取值时,等式成立。

余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

正切定理 $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$

三角形面积

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}\quad, \quad A+B+C=180°$$

半角与边长的关系式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

以上三式中的a、b、c轮换后可得B、C角的相应关系式。

3 双曲函数与反双曲函数

3·1 双曲函数

3·1·1 双曲函数的定义

双曲正弦 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

双曲余切 $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

双曲正割 $\operatorname{sech}x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

双曲余割 $\operatorname{cosech}x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

3·1·2 双曲函数的基本关系

$\sinh(-x)=-\sinh x$　　$\cosh(-x)=\cosh x$

$\tanh x\coth x=1$　　$\cosh^2x-\sinh^2x=1$

$\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$　　$\coth^2x-\operatorname{cosech}^2x=1$

3·1·3 双曲函数的基本公式

$\sinh(\alpha\pm\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta\pm\cosh\alpha\sinh\beta$

$\cosh(\alpha\pm\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta\pm\sinh\alpha\sinh\beta$

$\tanh(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tanh\alpha\pm\tanh\beta}{1\pm\tanh\alpha\tanh\beta}$

$\coth(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1\pm\coth\alpha\coth\beta}{\coth\alpha\pm\coth\beta}$

$\sinh\alpha\pm\sinh\beta=2\sinh\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cosh\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cosh\alpha+\cos\beta=2\cosh\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cosh\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cosh\alpha-\cosh\beta=2\sinh\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sinh\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\tanh\alpha\pm\tanh\beta=\dfrac{\sinh(\alpha\pm\beta)}{\cosh\alpha\cosh\beta}$

$\coth\alpha\pm\coth\beta=\pm\dfrac{\sinh(\alpha\pm\beta)}{\sinh\alpha\sinh\beta}$

$\sinh2\alpha=2\sinh\alpha\cosh\alpha$

$\sinh3\alpha=3\sinh\alpha+4\sinh^3\alpha$

$\cosh2\alpha=\sinh^2\alpha+\cosh^2\alpha$

$\cosh3\alpha=4\cosh^3\alpha-3\cosh\alpha$

$\tanh2\alpha=\dfrac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha}$

$\coth2\alpha=\dfrac{1+\coth^2\alpha}{2\coth\alpha}$

$\sinh^2\alpha=\dfrac{1}{2}(\cosh2\alpha-1)$

$\cosh^2\alpha=\dfrac{1}{2}(\cosh2\alpha+1)$

$\sinh\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{\cosh\alpha-1}{2}}$，$\alpha>0$，取“+”，$\alpha<0$，取“—”。

$\cosh\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{\cosh\alpha+1}{2}}$

$\tanh\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\cosh\alpha-1}{\sinh\alpha}=\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+1}$

$\coth\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha-1}=\dfrac{\cosh+1}{\sinh\alpha}$

$(\cosh\alpha\pm\sinh\alpha)^n=\cosh n\alpha\pm\sinh n\alpha$，$n$为正整数。

3·2 反双曲函数

3·2·1 反双曲函数的定义

反双曲正弦　若$x=\sinh y$，则$y=\operatorname{arsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

反双曲余弦　若$x=\cosh y$，则$y=\operatorname{arcosh}x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，$(x\geqslant1)$

反双曲正切　若$x=\tanh y$，则$y=\operatorname{artanh}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$(|x|<1)$

反双曲余切　若$x=\coth y$，则$y=\operatorname{arcoth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，$(|x|>1)$

反双曲正割 若 $x=\operatorname{sech}y$，则 $y=\operatorname{arsech}x=\pm\frac{1}{2}\times\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$，$(0<|x|<1)$

反双曲余割 若 $x=\operatorname{cosech}y$，则 $y=\operatorname{arcoseh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，$(x\neq0)$

3·2·2 反双曲函数基本公式

$$\operatorname{arsinh}x=\pm\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}x=\pm\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\operatorname{artanh}x=\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\operatorname{arcoth}x=\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\operatorname{arsinh}x\pm\operatorname{arsinh}y=\operatorname{arsinh}\left(x\sqrt{1+y^2}\pm y\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\operatorname{arsinh}x\pm\operatorname{arcosh}y=\operatorname{arcosh}\left[xy\pm\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$$

$$\operatorname{artanh}x\pm\operatorname{artanh}y=\operatorname{artanh}\frac{x\pm y}{1\pm xy}$$

3·3 双曲函数与三角函数的关系

$\sin ix=i\sinh x$	$\cos ix=\cosh x$
$\tan ix=i\tanh x$	$i\cot ix=\coth x$
$\sinh ix=i\sin x$	$\cosh ix=\cos x$
$\tanh ix=i\tan x$	$i\coth ix=\cot x$
$\arcsin ix=i\operatorname{arsinh}x$	$\arccos x=-i\operatorname{arcosh}x$
$\sinh ix=i\arcsin x$	$\operatorname{arcosh}x=i\arccos x$

4 解析几何

4·1 坐标系与坐标变换

4·1·1 平面坐标系及其变换

1. 笛卡儿直角坐标系 由平面上两条互相垂直的直线（数轴），用以建立点与数的一一对应关系，平面上任意一点的位置可用两个有序数决定。Ox 为横轴，Oy 为纵轴，$P(x,y)$表示 P 点的坐标，此种坐标称为笛卡儿直角坐标系（见图 2·1-3）。

2. 极坐标系 由平面上一定点为极点与由极点引一射线为极轴，用以建立点与数的一一对应关系，平面上任意一点的位置可用矢径 r 与极角两个有序数决定，$P(r,\theta)$表示 P 点的坐标，此种坐标称为极坐标系（见图 2·1-4）。

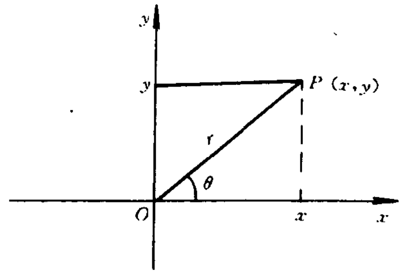


图 2·1-3 笛卡儿坐标

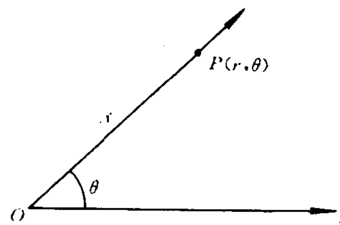


图 2·1-4 极坐标

3. 直角坐标与极坐标之间的转换关系 由图 2·1-3可见，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x>0)\\ \pi+\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x<0)\end{cases}$$

4. 坐标轴的平移与旋转 坐标轴的平移见图 2·1-5。当新坐标系 $Ox'y'$ 对旧坐标系 Oxy 平移 (a, b) 时，有

$$\begin{cases}x=x'+a\\ y=y'+b\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=x-a\\ y'=y-b\end{cases}$$

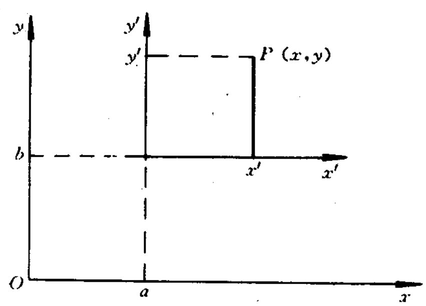


图 2·1-5 坐标平移

坐标轴的旋转见图 2·1-6。当新坐标系 $Ox'y'$ 与旧坐标系 Oxy 的原点重合但旋转 α 角时，有

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

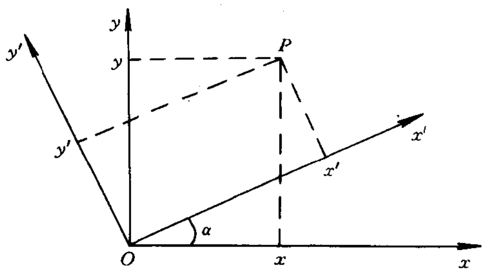


图 2·1-6　坐标轴的旋转

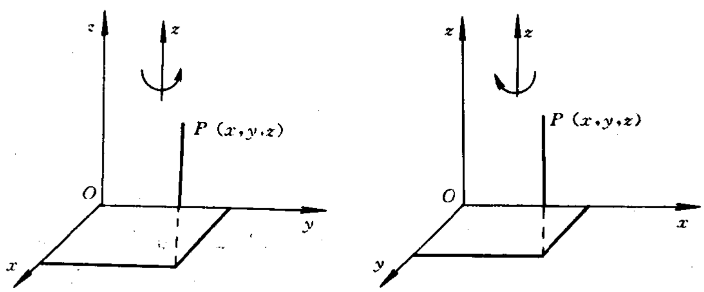
一般变换时，当新坐标系 $Ox'y'$ 对旧坐标系 Oxy 平移（a，b）同时又旋转 α 角时，有

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

4·1·2　空间正交坐标系及其变换

1. 三维笛卡儿直角坐标系　由空间一定点 O 引出的三条相互正交的直线作为数轴，用以建立点与数的一一对应关系，使空间任意一点的位置可用三个有序数决定。Ox 为横轴，Oy 为纵轴，Oz 为竖轴。P（x，y，z）表示 P 点的坐标，此种坐标称为三维笛卡儿直角坐标系，它有左手系与右手系两种，一般都采用右手系（见图 2·1-7a 和 b）。



a)　　　　b)

图 2·1-7　三维直角坐标

a）右手系　b）左手系

2. 圆柱面坐标系　由 Oxy 平面上的极坐标的矢径与方位角及竖轴的坐标三个有序数决定空间任意一点位置的坐标系称为圆柱面坐标系。P（r，θ，z）表示 P 点的坐标（见图 2·1-8）。这里 $0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<\infty$。

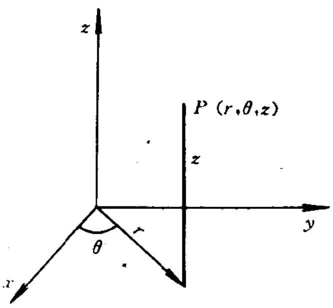


图 2·1-8　圆柱坐标

3. 球面坐标系（空间极坐标系）　由空间一定点 O 引至空间任一点 P 的矢径长 r、$\overline{OP}$ 与 $\overline{Oz}$ 轴所构成的角度 α（倾角）以及 $\overline{OP}$ 在 Oxy 平面上的投影与 $\overline{Ox}$ 轴的夹角 θ（方位角）三个有序数决定空间点 P 的坐标系称为球面坐标系（见图 2·1-9）。$P(r,\alpha,\theta)$ 表示 P 点的坐标。这里，$0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$。

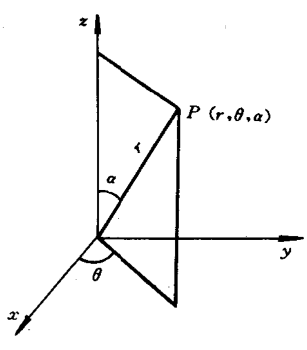


图 2·1-9　球面坐标

4. 圆柱面坐标与直角坐标之间的转换关系（右手系）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$