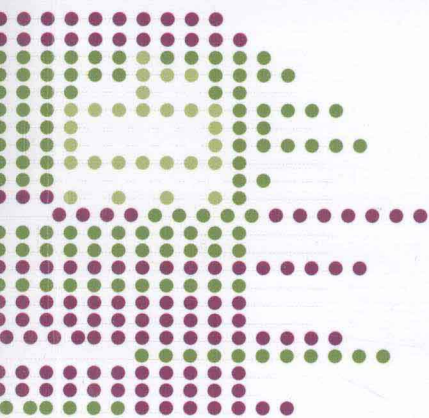




中学数学校本课程丛书

点可点 非常点

中学数学中的格点问题



清华大学附属中学

杨青明 徐蓉 主编



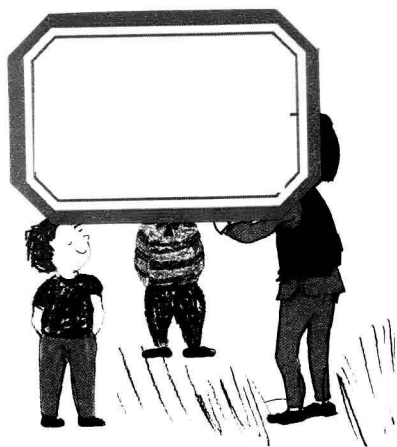
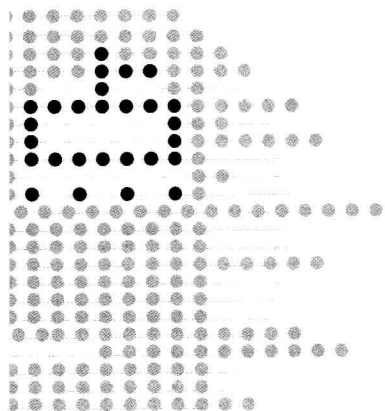
北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



中学数学校本课程丛书

点可点 非常点——

中学数学中的格点问题



清华大学附属中学

主编 杨青明 徐蓉

编委 向永红 张波 张娜 张钦



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

点可点 非常点:中学数学中的格点问题/杨青明,徐蓉主编. —北京:北京大学出版社,2011. 8

(中学数学校本课程丛书)

ISBN 978-7-301-19219-1

I. ①点… II. ①杨… ②徐… III. ①数学课-初中-升学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 136045 号

书 名: 点可点 非常点——中学数学中的格点问题

著作责任者: 杨青明 徐 蓉 主编

责任编辑: 潘丽娜

标准书号: ISBN 978-7-301-19219-1/O · 0848

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

880 毫米×1230 毫米 A5 7.25 印张 133 千字

2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 16.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

孤事孤根

几个孤点

如哉！

林青

2011/6/20

几何直观太重要

能解释代数就更好

求衣宗流

二〇一六年十月

序

在中学教育中,体现一个学校特色和水平很重要的方面,就是学校能否开设出丰富的、满足学生需求、符合学生特点、适合学生学习的校本课程.清华大学附属中学(以下简称“清华附中”)历来重视校本课程的开发,多年来,在广大教师的共同合作和努力下,陆续开设出了一批高水平的校本课程.这些校本课程的开发,不仅为学生丰富学科知识、夯实学科基础、提高学科学习能力和水平等方面发挥了很大的作用,而且充分显示出了清华附中教师的专业水平、研究能力和创新精神.

为了稳定和规范校本课程的教学质量,也使那些没有机会选修更多校本课程的学生,能利用课余时间学习和了解更多的学科知识,我们决定陆续编辑和出版“中学数学校本课程丛书”.本丛书的出版,也有利于兄弟学校师生之间的交流和学习,是一件很有意义的事情.实际上,每个校本课程的教材本身就是一本独立的面向中学生的课外读物.阅读和学习这些读物,对于学生拓宽知识、增加兴趣、锻炼思维、掌握方法是十分有益的.

本丛书的第一本《点可点 非常点——中学数学中的格点问



题》是清华附中初中数学组的部分教师,从学生的实际出发,根据自己不断积累的资料和研究成果合作编写而成的.数学的学习和研究,不在于内容是多是少、是否深奥,而在于是否有思想、有方法、有智慧的启迪,在于是否能体现数学的奇妙、有趣.因此,看似小选题的格点问题,力争达到上述效果和要求.

我仔细阅读了这本书,感觉到很有意思,兼顾趣味性和知识性.书中的许多问题,设计精巧,构思独特,解法奇妙,充满创造,是一本很适合中小学生学习阅读的书,对于提高中小学生学习数学的兴趣和能力很有意义.我期待着后续的校本课程教材也能尽快与广大中小学师生见面.

由于我们的水平所限,所编辑出版的校本课程教材肯定还不成熟.我们会不断修订,同时也热忱欢迎兄弟学校的同行批评指正.

王殿军

2011年7月于清华大学

(王殿军为清华大学附属中学校长)

前 言

平面几何说：“点是不定义的概念”，“点动成线，线动成面，面动成体”。

“道德经”说：“道可道，非常道”，“天下万物生于有，有生于无”。

生活实践中，成功的人是有“良好起点”，是在“工作一线”能“独挡一面”“自成体系”的人。

我们认为平面几何中的“点”和“道德经”中的“道”是相通的，而且与生活中的“起点”也是相通的。

“点”和“道”的相通，正如本书标题“点可点，非常点”与“道可道，非常道”。后者的含义是：“道”是可以说出来的，而说出来的“道”就不是真正意义上的“道”了；“点可点，非常点”说的是：平面上的“点”是可以“点”出来的，而能够“点”出来的“点”就不是真正数学意义上的“点”了。再如，“天下万物生于有，有生于无”，而“平面几何生于线，线生于点”。

在几何学习过程中，有的同学解决难题得心应手，有的同学面对问题束手无策，他们的区别在于能否找到关键“点”，即能否



找到“良好起点”.笛卡尔之所以伟大,不是因为他发明了什么著名的定理,也不是他证明了什么世界难题,而是他无意中发现了“点”的伟大.他把描述“形”的“点”用一个有序数对 (x, y) 来表示,从而把数学上的两大部分“几何”与“代数”从根本上联系起来了.

因此,我们认为应该给“点”以充分的重视.要像“道德经”反复研究“道”一样去反复研究“点”.本书就是在这个认识下编写的.

为了帮助大家充分理解“点”的含义,掌握“点”的方法,本书安排如下:

在第一章,我们通过格点作图、格点构造、格点计算、格点计数、格点探索、无网格“点”等章节,带领大家逐步走向“点”的王国.我们还引进了“正格点”、“准格点”、“泛格点”和“无格点”的概念,希望大家通过“有格”的学习,最终能够掌握“无格”的思想,引领读者开启几何学习的大门.

格点问题是近几年来中考试题和竞赛试题中的新颖、热点题型,在本书的第二、三章中我们分门别类地整理了部分真题.这些真题意在为读者提供解题思路和学习方法,其中的练习帮助读者巩固夯实,每节最后给出参考答案供读者选用.数学方法和数学思想是相通的,所以每一节的题目也无法做严格意义上的分类,但求有思想方法上的代表性.

在第四章格点趣谈中呈现了一些以网格为载体或原型的数

学几何问题供大家阅读和研究,也可以看做多变的、不规则的网格问题,意在突出数学趣味和数学文化. 此类问题展开需要大量篇幅和更多的数学知识,所以该章中我们结合初中数学教学课标,精选了课本中出现的、初中生可以理解的问题加以阐述.

由于我们能力和精力有限,本书肯定会有一些不足之处,希望大家批评指正.

编者语

2011. 6. 25

目 录

第一章 格点探究	(1)
第一节 格点作图	(4)
第二节 网格拼分	(33)
第三节 格点构造	(37)
第四节 格点计算	(42)
第五节 格点计数	(49)
第六节 格点探索	(55)
第七节 无网格“点”	(60)
第八节 回顾与反思	(71)
 第二章 格点中考	 (75)
第一节 格点中的作图问题	(77)
第二节 格点中的计算问题	(87)
第三节 格点中的计数问题	(97)
第四节 格点中的坐标问题	(104)
第五节 格点中的其他问题	(114)



第三章 格点竞赛	(131)
第一节 格点中的作图问题	(133)
第二节 格点中的计算问题	(142)
第三节 格点中的计数问题	(153)
第四节 格点中的坐标问题	(166)
第五节 格点中的其他问题	(170)
 第四章 格点趣谈	 (183)
第一节 格点多边形的面积问题	(185)
第二节 网格中的染色问题	(188)
第三节 分割问题	(194)
第四节 平面镶嵌问题	(200)
第五节 拼图问题	(204)
第六节 用几何画板制作可调控矩形网格 的问题	 (209)
 后记	 (215)

第一章

格点探究

平面几何中的点是无处不在的,掌握点的特点和作用对于学习平面几何起着至关重要的作用.本章首先把点限制在标准的网格里,即由边长为 1 的正方形构成的网格里,通过网格中最基本的作图——垂直和平行,加深对点的认识;然后通过引进准格点和泛格点,逐步放宽网格的要求,从而也放宽了点的限制;最后我们彻底去掉网格,让点自由地翱翔在平面几何的图形里,展示它无穷的魅力!

什么是格点?

一张方格纸上,上面画着两组相互垂直的纵横平行线,相邻平行线之间的距离都相等,这样两组纵横平行线的交点,就是所谓格点,如图 1 所示.

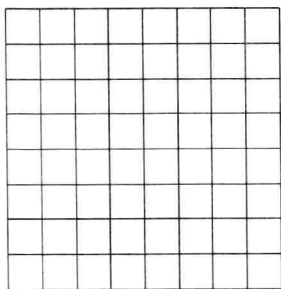


图 1

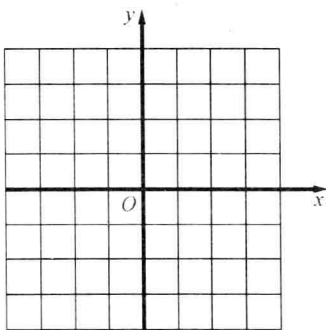


图 2

在一个网格上,如果取其中的一个格点做原点 O ,取通过这个格点的横向和纵向两直线分别做横坐标轴和纵坐标轴,并



取原来方格边长做单位长,就可以在网格上建立一个直角坐标系.这时网格中的格点,显然就是横、纵两坐标都是整数的那些点,因此我们又叫格点为**整点**.

第一节 格点作图

(一) 垂线和平行线的格点作图

作平行线和垂线是基本的几何作图,由于它们比较简单,因此常常不被大家重视,在这里我们利用格点来完成平行线和垂线的作图,并通过线段连续和首尾相连来增加问题的趣味性和挑战性.

我们把正方形网格中长为 a , 宽为 b 的矩形叫做 $a \times b$ 形, 要求 $a \times b$ 形的顶点是格点, 这里还要求 a, b 都是正整数. 如图 3 所示, 矩形 $ABCD$ 就是 2×3 形, 矩形 $BEFG$ 就是 2×1 形.

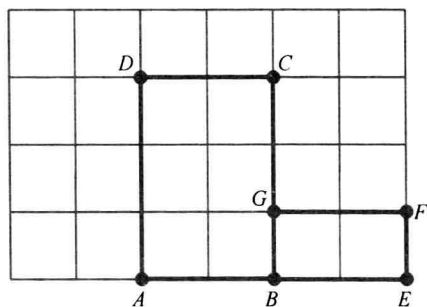


图 3

由三角形的全等和相似我们很容易得到：

【结论 1】 $a \times b$ 形与 $mb \times ma$ 形的对角线构成两对互相垂直的直线,这里要求 a, b, m 都是正整数.

如图 4 所示,在 2×3 形 $ABCD$ 与 3×2 形 $EFGH$ 中,
 $AC \perp EG, BD \perp FH$;在 2×4 形 $ANKM$ 与 2×1 形 $APQM$ 中,
 $AQ \perp MN$ 等.

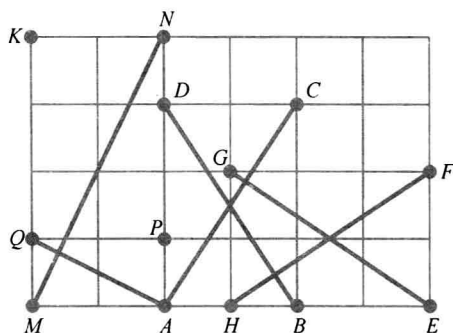


图 4

【结论 2】 $a \times b$ 形与 $ma \times mb$ 形的对角线构成两对互相平行的直线,这里要求 a, b, m 都是正整数.

如图 5 所示,在 2×1 形 $ABCD$ 与 4×2 形 $AEFG$ 中, $AC \parallel EG, BD \parallel AF$.