现代数学译丛

常微分方程

〔苏〕B. И. 阿诺尔德 著

科学出版社

内容简介

本书用现代数学观点阐述常微分方程论中的一些基本问题．全书共五章：基本概念，基本理论，线性系统，基本定理的证明和流形上的微分方程．本书特点是注重几何和定性的考察，并且特别强调在力学中的应用．本书论述严谨，深入浅出，并有大量图形、例题和问题，书后附有典型练习题，有助于读者深入理解本书的内容．

本书译稿经北京师范学院都长清同志校订．

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师及其他数学工作者参考．

V. I. Arnold
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
Massachusetts Institute of Technology, 1973

现代数学译丛
常微分方程
〔苏〕В. И. 阿诺尔德 著
沈家骐 周宝熙 卢亭鹤 译
责任编辑 吕 虹 张鸿林
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1985 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1985 年 5 月第一次印刷 印张：9 3/8
印数：0001—13,600 字数：244,000

统一书号：13031・2883
本社书号：3972・13—1
定价： 2.65 元

译 者 前 言

B. И. 阿诺尔德的《常微分方程》是用现代观点阐述常微分方程中的一些基本问题，它不同于通常的常微分方程书籍．本书的主要精神是把常微分方程理论中的一些结果都表述成不依赖于坐标系选择的形式，并且多处采用了拓扑学术语，从而可以推广到流形上去．因此我们认为，本书是一本较好的参考书，特译成中文出版．

在翻译过程中，对已发现的原书中的错漏作了必要修改，一般不另作说明．

本书是我们在读书报告基础上翻译的．参加工作的还有：金均、赵显华、蒋伟成和肖福铨同志．最后由沈家骐同志负责整理和校对．

作者于 1978 年出版了《常微分方程的续篇》[1]，也值得读者注意和参考．

由于我们水平有限，译文中难免还有不少缺点和错误，热诚欢迎批评指正．

沈家骐 周宝熙 卢亭鹤

1981 年 3 月

1) В. И. Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1978. ——译者注

序　　言

在选择本书题材时，我试图把范围限制在必不可少的绝对必要的材料上．贯穿本书的是两个中心思想及其衍生结果，即向量场直化定理（等价于通常解的存在、唯一性和可微性定理）和单参数线性变换群理论(即线性自治系统理论)．因此，我武断地省略了在常微分方程教材中通常包含的若干更专门的论题．例如，初等积分法，关于导数不可解方程，奇解，斯图谟 (Sturm)-刘维尔(Liouville) 理论，一阶偏微分方程等．最后两个论题，我认为最好放在偏微分方程或变分法教程中，而其他若干内容则安排在习题中更为适当．

另一方面，常微分方程在力学中的应用要比通常课程研究得更为详细．因而单摆方程在本书一开始就出现，而且全书中引入的各种概念和方法的功效，都依次应用此例进行检验．在这一方面，能量守恒定律在首次积分部分出现，小参数方法则从关于参数微分定理推出，而具有周期系数的线性微分方程理论，自然地导致秋千的研究(参数共振)．

本书对许多论题的处理方式，与传统方式迥然不同．在每一论题中，我都试图强调所考察现象的几何和定性方面．根据这个原则，本书有许多图，而不包含任何特别复杂的公式；另一方面，还引入了大量基本概念，它们在传统的坐标基方法中很少论及(例如相空间和相流，光滑流形和切丛，向量场和单参数微分同胚群)．如果这些概念可以看作是已知的，那么本书就可以大为缩减了．但遗憾的是，目前在分析或几何课程中都没有包含它们，因此，我不得不对这些概念作较为详细的介绍，并假定读者的知识不超出分析和线性代数标准课程的范围．

（下略）　　　　　　　　　　B. И. 阿诺尔德

常 用 记 号

R 实数集合（群，域）.

C 复数集合（群，域）.

Z 整数集合（群，环）.

$\varnothing$ 空集.

$x \in X \subset Y$ 集合 Y 的子集合 X 的元素 x.

$X \cup Y$，$X \cap Y$ 集合 X 和 Y 的并集和交集.

$X \backslash Y$，$X \backslash a$ 在 X 但不在 Y 的元素的集合，集合 X 减去元素 $a \in X$.

$f\colon X \to Y$ 集合 X 映入集合 Y 的映射.

$x \longmapsto y$ 把点 x 映入点 y.

$f \circ g$ 两映射（先作用 g）的（合成）积.

$\exists, \forall, \Rightarrow$ 存在，对每一个，推出.

定理 0.0 在 § 0.0 唯一的定理.

▌ 证明结束记号.

* 可供任意选择的（较困难的）问题或定理.

$\mathbf{R}^n$ 在域 **R** 上的 n 维线性空间.

$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ 空间 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 的直和.

$GL(\mathbf{R}^n)$ $\mathbf{R}^n$ 的线性自同构群.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 上，人们也可以考虑另外一些结构，例如，仿射结构或欧几里得结构，甚至或者是 n 条直线的直积的结构．这时，通常将其全部内容清楚地写出来，例如，“仿射空间 $\mathbf{R}^n$”，“欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$”，“坐标空间 $\mathbf{R}^n$” 等等.

线性空间的元素称为向量，通常用粗体文字（$\mathbf{v}$，$\boldsymbol{\xi}$ 等等）表示．空间 $\mathbf{R}^n$ 的向量被认为和 n 个数的集合一致．例如，我们写 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$，此处 n 个向量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的集合称为在 $\mathbf{R}^n$ 中的基．在欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{v}$ 的模

(长度)用 $|\mathbf{v}|$ 表示；两向量 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ 的纯量积用 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 表示．因此

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n,$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

我们经常处理称为时间的实参数 t 的函数．关于 t 的微分(产生速度或变化率)通常用放在上面的一个小点表示，例如，

$$\dot{x} = dx/dt.$$

目　　录

第一章 基本概念

§1 相空间和相流

常微分方程理论是数学科学的基本工具之一．这一理论使我们能够研究具有确定性、有限维性和可微性的各种类型的发展过程．在给出严格的数学定义之前，我们先研究几个实例．

1.1 发展过程的实例

一个过程称为是确定的，如果它的整个未来的和整个过去的行程能由它的现在的状态唯一决定．一个过程的所有可能状态的集合称为它的相空间．

例如，古典力学研究系统的运动，这个运动的过去与未来由这个系统中所有点的初始位置和初始速度唯一确定．力学系统的相空间刚好是这样的集合，它的典型元素是这一系统的所有质点的瞬时位置和瞬时速度的集合．

在量子力学中，质点的运动不是由确定的过程所描述．热传导是半确定过程，它的未来是由它的现在所确定，而不是由它的过去所确定．

一个过程称为是有限维的，如果它的相空间是有限维的，即用来描述它的状态的参数的个数是有限的．例如，由有限个质点或刚体所组成的系统的古典的（牛顿）运动，即可归入这一标题内．事实上，n 个质点的系统的相空间的维数正好是 $6n$，而 n 个刚体的系统的维数为 $12n$．我们引用水力学研究的流体运动，弦和膜的振动以及光学和声学中的波传播，作为不能用有限维相空间来描述的过程的实例．

一个过程称为是可微的，如果它的相空间具有可微流形的结

构，而且它的状态随时间的改变是由可微函数来描述的．例如，一个力学系统的质点的坐标和速度随时间以可微方式改变，但在激波理论中所研究的运动不具有可微性质．同理，在古典力学中系统的运动可以用常微分方程来描述，但在量子力学、热传导理论、水力学、弹性力学、光学、声学和激波理论中，则需要另外的工具．

放射性衰变过程和在营养充足的培养基中的细菌繁殖过程，提供了另外两个确定的有限维的可微过程的实例．在这两种情形中，相空间都是一维的，即过程的状态由物质的量或细菌的数目所确定，而且在这两种情形，过程都由常微分方程描述．

应该注意，过程的微分方程形式和我们首先处理确定的有限维的可微过程这一事实，只能由实验来确定，因而只能具有某种程度的精确性．但是，以后这种情况将不一一着重指出，相反，我们将谈及实际过程就好象它们真实地符合我们理想化的数学模型．

1.2 相流

刚才所介绍的一般原则的精确陈述，需要更抽象的相空间和相流的概念．为了熟悉这些概念，我们研究由 H. H. 康斯坦丁诺夫（Константинов）提出的实例，这里引进相空间的简单办法，使我们解决了困难问题．

问题 1 从 A 城到 B 城有两条不相交的路（图 1）．假设已知

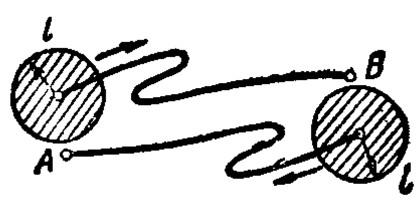

图 1 马车的初始位置．

用长度小于 $2l$ 的绳子相连接的两辆汽车从 A 城沿着不同的道路开到 B 城而不会弄断绳子．有两辆半径为 l 的圆形马车，它们的中心分别沿着两条路向相反方向移动，试问它们能否彼此通过而

不相碰撞?

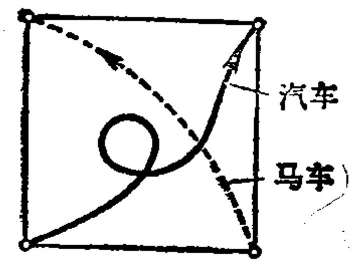

图 2 一对车辆的相空间.

解 研究正方形

$M=\{(x_1, x_2): 0\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$(图 2). 两车辆的位置(一辆在第一条道路上,另一辆在第二条道路上)能用正方形 M 上的点来表示,为此我们只需用 x_i 表示车辆沿着第 i 条道路从 A 到 B 的距离的一段,也就是从 A 到车辆间的距离. 明显地,这对车辆的每一可能位置均有正方形 M 上一点与之对应. 正方形 M 称为相空间,而它上面的点称为相点.

这样一来,每一相点对应着这对车辆的一个确定位置(暂时不管它们的连结情况),车辆的每一运动均可由相空间的一个相点的运动来表示. 例如,在 A 城的汽车的初始位置对应着正方形的左下角 ($x_1=x_2=0$), 汽车从 A 到 B 的运动用引向正方形对角(右上角)的曲线来表示. 同样,马车的初始位置对应于正方形的右下角 ($x_1=1,\ x_2=0$), 马车的运动由引向正方形对角(左上角)的曲线来表示, 但是正方形中连接不同对角的每一对曲线必相交. 因此,不管马车怎样移动,总归有一个时刻到来,在这一时刻,这对马车所出现的位置刚好是那对汽车在某时刻所出现的位置. 在这一时刻,两马车的中心之间的距离将小于 $2l$,因此马车不能彼此互相驶过.

虽然,在上例中微分方程没有起作用,可是它所包含的内容却与我们以后所关心的内容十分相似. 过程的状态用适当的相空间的点来描述常常被证明是特别有效的.

我们回到过程的确定性、有限维性和可微性的概念. 确定过程的数学模型是相流,它可用下列直观的术语来描述:设 M 是相

空间而 $x \in M$ 是过程的初始状态，又设 $g^t x$ 表示初始状态为 x 的过程在时刻 t 的状态．对于每一实数 t 它确定相空间 M 到它自身的一个映射

$$g^t: M \to M.$$

此映射 g^t 称为 t 推进映射，它将每一状态 $x \in M$ 映入新的状态 $g^t x \in M$．例如，g^0 是恒等映射，它将 M 的每一点留在它原来的位置．而且

$$g^{t+s} = g^t g^s,$$

因为 x 经过时间 s 后进入状态 $y = g^s x$（图 3），y 经过时间 t 后

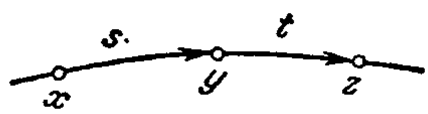

图 3　时间变动时过程的状态的改变．

进入的状态 $z = g^t y$ 与 x 经过时间 $t + s$ 后进入的状态 $z = g^{t+s} x$ 是相同的．

假定我们固定一个相点 $x \in M$，即固定过程的一个初始状态．在时间变动时，此过程的状态将改变，而点 x 在相空间 M 中描出一条相曲线 $\{g^t x,\ t \in \mathbf{R}\}$．由于每个相点沿着它自己的相曲线运动，因此 t 推进映射族 $g^t: M \to M$ 正好构成相流．

现在我们转入严格的数学定义．在每种情形 M 都是一个任意集合．

定义　一个由所有实数组成的集合（$t \in \mathbf{R}$）所标记的，由集合 M 到它自身的映射族 $\{g^t\}$ 称为 M 的单参数变换群，如果对于所有的 $s, t \in \mathbf{R}$ 满足

$$g^{t+s} = g^t g^s \tag{1}$$

而且 g^0 是恒等映射（它使每点固定）．

问题 2　证明单参数变换群是交换群，且每个映射 $g^t: M \longrightarrow M$ 是一对一的．

定义　由集合 M 和由 M 变到它自身的单参数变换群 $\{g^t\}$ 所组成的偶（M，$\{g^t\}$）称为相流．集合 M 称为相流的相空间，而它

的元素称为相点.

定义 设 $x \in M$ 是任何相点,考虑实直线到相空间的映射

$$\varphi: \mathbf{R} \to M,\ \varphi(t) = g^t x \tag{2}$$

(图 4),则映射(2)称为相流 $(M, \{g^t\})$ 作用下点 x 的运动.

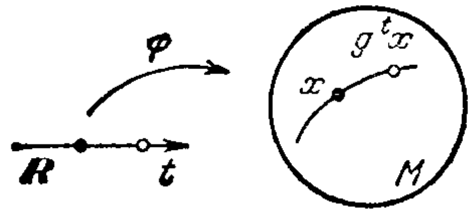

图 4 在相空间 M 中相点的运动.

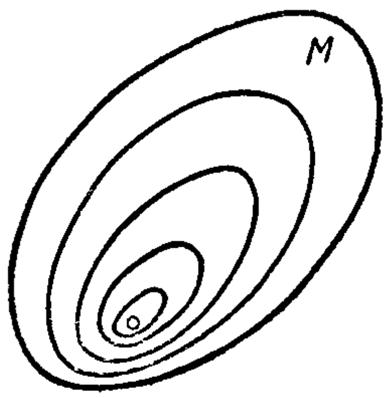

图 5 相曲线.

定义 在映射(2)下 $\mathbf{R}$ 的象称为相流 $(M, \{g^t\})$ 的相曲线. 因此相曲线是相空间的子集(图 5).

问题 3 证明经过相空间的每一点有且仅有一条相曲线.

定义 所谓相流 $(M, \{g^t\})$ 的平衡位置或静止点 $x \in M$ 指的是一个相点,而这个相点本身又是一条相曲线:

$$g^t x = x \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

扩张相空间和积分曲线的概念是与映射 φ 的图形相联系的. 首先我们想到给定的两个集合 A 和 B 的直积 $A \times B$ 定义为所有有序偶 (a, b) 的集合,其中 $a \in A$, $b \in B$. 而映射 $f: A \to B$ 的图形定义为直积 $A \times B$ 的子集,此子集由所有点 $(a, f(a))$ 组成,其中 $a \in A$.

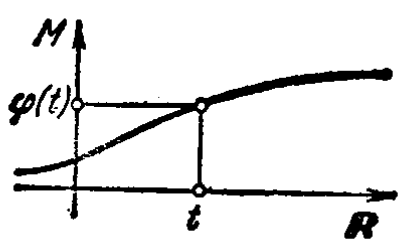

图 6 扩张相空间中的积分曲线.

定义 所谓相流 $(M,\{g^t\})$ 的扩张相空间指的是实 t 轴和相空间M的直积 $\mathbf{R}\times M$. 运动(2)的图形称为相流 $(M,\{g^t\})$ 的积分曲线(图 6).

问题 4 证明经过扩张相空间的每一点有且仅有一条积分曲线.

问题 5 证明当且仅当 x 是平衡位置时,水平直线 $\mathbf{R}\times x$, $x\in M$ 是一条积分曲线.

问题 6 证明扩张相空间沿着时间轴的移动变换

$$h^s:(\mathbf{R}\times M)\longrightarrow(\mathbf{R}\times M),\ h^s(t,x)=(t+s,x)$$

将积分曲线变为积分曲线.

1.3 微分同胚

上述诸定义构成了确定过程的概念. 相应地建立有限维和可微性概念需要相空间是有限维的微分流形和相流是这一流形上的单参数微分同胚群.

现在我们来弄清楚这些术语. 微分流形的例子有欧几里得(Euclid)空间和欧几里得空间的开集、圆、球、环面等等. 它的一般定义将在第五章给出,暂时可以认为我们谈及的是欧几里得空间的一个(开)区域.

所谓定义在具有坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的区域U上的可微函数 $f\colon U\to\mathbf{R}$, 我们是指 r 次连续可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$, 此处 $1\leqslant r\leqslant\infty$. 在大多数情形中, 我们对 r 的精确值是不感兴趣的,因此将不指明, 如果需要的话, 我们将指明"r 次可微"或函数类 C^r.

所谓坐标为 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的区域U到坐标为 $y_1,\cdots,y_m$ 的m维欧几里得空间 $\mathbf{R}^m$ 的区域V的可微映射 $f:U\to V$, 是指由可微函数 $y_i=f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 所给定的一个映射. 这意味着: 如果 $y_i\colon V\to\mathbf{R}$ 是V中的坐标,则 $y_i\circ f\colon U\to\mathbf{R}$ 是U中的可微函数$(1\leqslant i\leqslant m)$.

所谓微分同胚 $f:U\to V$,我们指的是一个一对一的映射,使得 f 与 $f^{-1}:V\to U$ 二者都是可微映射.

问题 1 下列函数中那一些是指定为由直线到直线上的微分同胚 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

$$f(x) = 2x,\ x^2,\ x^3,\ e^x,\ e^x + x?$$

问题 2 证明：若 $f:U\to V$ 是微分同胚，则以区域 U 和 V 为子集的欧几里得空间具有相同的维数.

提示 应用隐函数定理.

定义 所谓流形 M（它可以认为是欧几里得空间内的一个区域)上的单参数微分同胚群 $\{g^t\}$，指的是直积 $\mathbf{R}\times M$ 到M的映射

$$g:\mathbf{R}\times M\to M,\ g(t,x)=g^t x,\ t\in\mathbf{R},\ x\in M$$

满足

1）g 是可微映射；

2）对每个 $t\in\mathbf{R}$，映射 $g^t:M\to M$ 是微分同胚；

3）族 $\{g^t, t\in\mathbf{R}\}$ 是M的单参数变换群.

例 1 $M=\mathbf{R}$，$g^t x = x + vt(v\in\mathbf{R})$.

注 性质 2)是性质 1)和 3)的结果(为什么？).

1.4 向量场

设 $(M,\{g^t\})$ 是相流，它由欧几里得空间的流形M上的一个单参数微分同胚群所给定.

定义 所谓相流 g^t 在点 $x\in M$（图 7)的相速度 $\mathbf{v}(x)$ 是指表

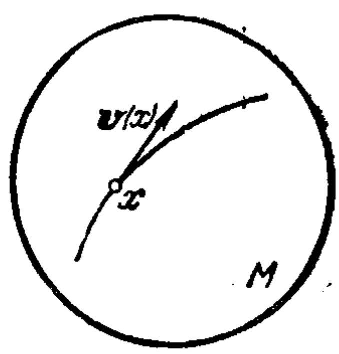

图 7 相速度向量.

示相点运动速度的向量，即

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = \mathbf{v}(x). \tag{3}$$

(3)的左边常用 $\dot{x}$ 表示．注意这个导数是有定义的，因为运动是欧几里得空间内一个区域的可微映射．

问题 1 证明

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} g^t x = \mathbf{v}(g^\tau x),$$

即在每一瞬时，表示相点运动速度的向量等于表示在给定时刻运动点在相空间所占据的那一点的相速度的向量．

提示 见公式(1)，解在 §3.2 中给出．

若 $x_1, \cdots, x_n$ 是我们考虑的欧几里得空间的坐标，因此 $x_i: M \to \mathbf{R}$，则速度向量 $\mathbf{v}(x)$ 由 n 个函数 $v_i: M \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 所指定，这 n 个函数 v_i 称为速度向量的分量：

$$v_i(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x_i(g^t x).$$

问题 2 证明：若单参数群

$$g: \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$$

是 C^r 类的，则 v_i 是 C^{r-1} 类的函数．

定义 设 M 是具有坐标 $x_1, \cdots, x_n (x_i: M \to \mathbf{R})$ 的欧几里得空间内的一个区域，又假定每一点 $x \in M$ 都伴随有一个从 x 点出发的向量 $\mathbf{v}(x)$．这就在 M 上定义了一个向量场 $\mathbf{v}$，在 x_i 坐标系中此向量场由 n 个可微函数

$$v_i: M \to \mathbf{R}$$

所指定．

这样一来，相速度向量的集合在相空间 M 上形成了一个向量场，即相速度场 $\mathbf{v}$（图 8）．

问题 3 证明：若 x 是相流的静止点，则 $\mathbf{v}(x) = 0$．

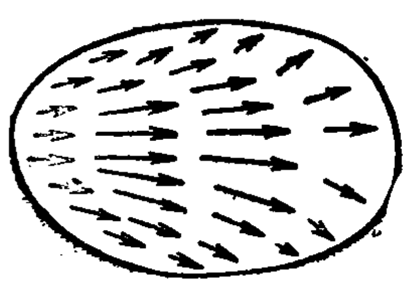

图 8 向量场．

在给定的向量场中，向量等于零的点称为该向量场的奇点[1]。因此相流的平衡位置是相速度场的奇点. 其逆也真，但证明却并不那么容易.

1.5 常微分方程理论的基本问题

常微分方程理论的基本问题在于研究 1) 流形 M 上单参数微分同胚群 $\{g^t\}$, 2) 在M上的向量场，3)研究 1)与 2) 之间的关系. 我们已经看到：根据公式(3)群 $\{g^t\}$ 定义了一个 M 上的向量场，即相速度 $\mathbf{v}$ 的场. 反之，可以证明向量场 $\mathbf{v}$ 唯一地决定相流(在下面给定的某种条件下).

简而言之，我们可以说相速度的向量场给出了一个过程发展的局部规律，而常微分方程理论的任务是从对这一过程发展的局部规律的认识来重新构造这个过程的过去和预知其未来.

1.6 向量场的例子

例 1 由实验得知在任何给定的时刻，放射性衰变的速率与现有物质的数量 x 成比例. 此处相空间是半直线$M=\{x:x>0\}$ (图 9)，而所指出的实验事实意味着

$$\dot{x}=-kx,\ \mathbf{v}(x)=-kx,\ k>0, \tag{4}$$

即在半直线上的向量场 $\mathbf{v}$ 指向 0 而且相速度向量的大小与 x 成比例.

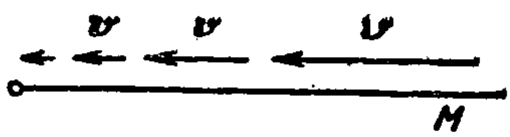

图 9 放射性衰变的相空间.

例 2 由实验得知在任何给定时刻有足够食物的条件下细菌繁殖的速率与现有细菌的数量成比例. 相空间 M 仍是半直线

---

1) 注意在奇点，场的分量没有奇异性，而且在事实上是连续可微的. 术语"奇点"来源于下列事实：奇点附近场的向量的方向的改变一般是不连续的.