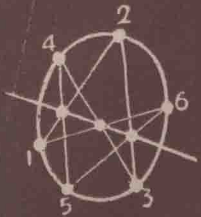
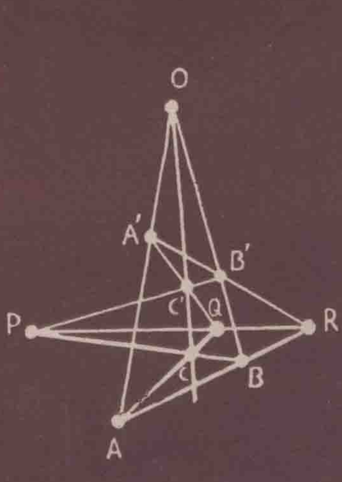


赵宏量主 编

几何教学探索



西南师范大学出版社

几何教学探索

赵宏量主编

西南师范大学出版社

几何教学探索(Ⅰ)

赵宏量　主编

西南师范大学出版社出版
(重庆　北碚)
新华书店重庆发行所发行
中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：7.5 插页：2 字数：160千
1989年10月第一版　　1989年10月第一次印刷
印数：1—2,500
ISBN 7—5621—0291—0/O·27
定价：2.05 元

前　言

《几何教学探索》第一册选辑了全国部分高师院校、师专、教院教师的教学经验、教学方法和有关几何教育方面的若干文章汇编而成。这套书的目标，主要为广大数学教师提供教科书上难于寻求到的，但又是教师应该知道或是对提高教学质量，拓广学生知识视野，联系教学和生产实际，进行教学改革等方面都是十分有用的东西。

长期以来，几何教学方面的参考材料，由于历史的原因，出版的甚少，而我国各种层次的几何教学都面临一个如何加强基础，精选内容，逐步更新以及尽快提高学生独立思维、自学和实践的三种能力。

这套书的第一册，重点针对高等几何的教学和研究，以后还将继续编辑出版有关几何学的其它各个分支的教学探索，为广大师生服务。

本书确是一份针对性很强的好材料，它的问世是广大数学教师教学探索的产物。例如射影几何的特色，射影空间与无穷远元素，交比理论，变换群与几何，有限几何，二阶曲线的射影理论，高等几何与初等几何，巴斯加构形的研讨，伽利略几何与闵柯夫斯基几何等等，都会使你倍感亲切，新奇，气壮河山，磅礴宇宙。

本册的撰文者，大多是我国当前高等几何教学科研方面，经验丰富的高级职称教师，他们大多数人有几十年的教学实践；他们从事过各方面的教学尝试，积累整理，精心撰写的这些文章，对提高我国的几何教学质量，无疑是一份可喜的贡献，也实在是我国教育改革的一项尝试。正如有的专

家指出："这份材料的出版，对解决我国数学教育的继承和发展，肯定会发挥良好的作用。"

本书群策群力，来自不知多少师生的艰苦辛勤的实践，内容丰富，层次多样，可适应各种不同层次读者的需要，相信会受到广大读者的欢迎。

编　者

1988年9月于西南师大

目　录

* * * * * * *

（一） 高等几何学的特色

变换群与几何学

（西南师大·赵宏量）

（1） 高等几何学的特色

由于高等几何中引入了无穷远元素，这就使它和其余数学课程有了显著的特点，更由于它在提高学生观点上面，具有独特的作用。在培养学生思考问题方面，具有巧妙、灵活的特点。在联系初等几何与解析几何方面又具有直接的渊源。它在某些方面甚至可以说是其它课程无法谈到而作为一个中学数学教师又是应该了解的，因此，它在师范院校来说，是学生应该学好的一门基础课。

在强调它的特色方面，我认为应该紧紧抓住射影空间的构造、对偶原理、射影变换、变换群与几何学等这些基本东西，在射影几何里无穷远元素应该认为是实有其物，而且应该与通常元素一视同仁。它们之间没有任何本质上的区别，通常元素与无穷远元素都是射影空间的有机组成部分，对于这一点，教师应当特别向学生提出并应着重阐明。虽然在初等几何里，我们也经常引用无穷远元素，但是在那里使用它实质上只是限制在几何事实的特别的文字表达方式上（例如说把园柱当做有无穷远顶点的园锥，不说直线平行而说它们相交于无穷远点等等），因为在欧氏空间里，实际上是没有所谓的无穷远元素的。

当我们比较一下初等几何与射影几何的研究对象时，就

会明显地看出上述所谈差别的原因，因为初等几何的主要内容是研究图形的度量性质，而在射影几何中，由于图形的度量性质不是射影几何的对象，所以上面提到的无穷远元素和通常元素之间的差异就失去了力量。另外，在中心射影法之下，无穷远元素和通常元素之间可相互转变，因此，在射影几何里无穷远元素和通常元素之间并不存在任何射影地不同的差别。

无穷远元素的观念在很早就产生了。通常元素与无穷元素的平等性，从射影几何学的观点来看似乎是很自然的。但是当我们用初等几何的方法来研究射影几何时，却往往会留下错觉，以为无穷远元素和通常元素之间终究还是存在着差别，须知射影几何与初等几何一样也有它自己的公理体系，如果不从欧氏几何出发而使用近代公理法来定义射影空间，则根本不会有无穷远元素这样的东西掺杂其中，对于这一点，初学者应当细心去体会。

当我们利用初等几何的方法，利用度量的方法来研究射影几何时，就必须十分强调有限元素（通常元素）与无穷远元素在射影几何学中的平等性，这样才能对射影几何学的概念具有正确的理解，对于初次学习射影几何的人来说，认真地体会这一点是十分有益的。

还有一个特点就是对射影直线和射影平面的理解，这在教学中也是一个值得重视的问题。由于射影直线是封闭的，射影平面也是封闭的，它们与欧氏的直线和平面存在着差异，因此，恰当地对它们进行解释，或者说给出它们的直观模型，这在教学中是十分必要的。

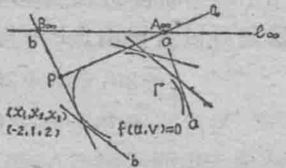
再一个十分重要的东西就是对偶原理，因为它是射影几何所特有的，它在射影几何学里的重要性是十分明显的，因

为根据它可以使得对射影几何的研究收到事半功倍的效果。

然而在教学中常常发现学生往往不能正确地画出一个图形的对偶图形，不能正确地叙述一个命题的对偶命题，这在很大程度上取决于教师的重视和必要的练习。例如在教学中选取下列一题作为课堂练习，却常常表示出了较好的效果。

〔题目〕设有线坐标方程 $u_1u_3=u^2{}_2$，求通过点(−2，1，2）的该曲线的切线上的无穷远点的方程。

解：要解决此问题可考虑使用对偶原理，



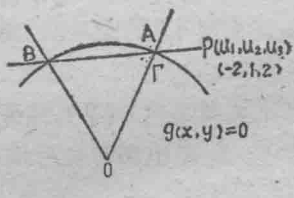
(图 1)

要求切线上的无穷远点的方程，可转变为其对偶来解决，如图 1 所示，

已知曲线Γ: u_1u_3

$=u^2{}_2$，

p(−2，1，2）为Γ外一点，现在经过点p引曲线Γ的切线（显然，这些切线就是过点p且属于构成曲线Γ的直线族中的直线）。另外，这些切线上的无穷远点，就是这些切线与无穷远直线的交点，图 1 中说无穷远直线为l_∞，其交点为A_∞和B_∞。



(图2)

这样一来，上面的题目就可以转化为：

求通过点p且属于曲线Γ的直线a，b与无穷远直线L_∞的交点的问题。

利用对偶原理可将此问题改述为：

对于给定的点曲线Γ：$x_1x_3=x^2{}_2$，求直线P:(−2,1,2)与曲线Γ的交点A,B与原点O的连线(见图2)，但是这个问题可以由P与Γ的齐次方程：

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+2x_3=0\\ x_1x_3-x_2^2=0\end{cases}\qquad (*)$$

共同消去x_3而得到直线oA和oB的方程而解决。所以此问题也就是可以直接由点P和曲线Γ的齐次方程：

$$\begin{cases}-2u_1+u_2+2u_3=0\\ u_1u_3-u_2^2=0\end{cases}\qquad (**)$$

共同消去u_3而得到点A_∞和B_∞的方程是一回事，因此由(**)式解之得：

$$2u_2^2-u_1u_2-2u_2^2=0$$

此式即为所求无穷远点之方程，

因为 $$u_1=\frac{u_2\pm\sqrt{u_2^2-4\times2(-2u_2^2)}}{2\times2}=\frac{(1\pm\sqrt{17})}{4}u_2$$

故又可得知所求无穷远点的线坐标为$(1\pm\sqrt{17},\ 4,\ 0)$。

(2) 变换群与几几学

1. 关于变换群观点下“几何空间”概念的涵义问题。

“几何空间”概念的形成，有它的历史发展进程。其中，特别值得一提的是十九世纪末叶。1899年希尔伯特《几何基础》发表之后诞生的现代“抽象空间”的概念。

按照希尔伯特的观点，所谓“几何空间”是叫做几何“元素”的对象的集合，它们的相互关系满足一定的公理的要求。

例如，提到“欧几里得空间”，可以看作是从属于欧几里得几何公理的要求的元素集合；而提到“罗巴切夫斯基空间”，则可以看作是从属于罗巴切夫斯基几何公理的要求 的 元 素 集合。这种公理化观点，对近代几何学以至整个数学的发展带来了深远的影响。

差不多同时（1872年），卓越的数学家克莱因提出了用变换群来分类几何的思想，这是在十九世纪末叶几何空间概念发展过程中的又一个占有重要地位的思想。

按照克莱因的观点，“空间”这个对象的含义包括了一个点集S和该点集到自身的一个变换群G，即它的内涵是 一 个偶对（S，G）.例 如，我 们所说的“欧氏平 面（空 间）”这个概念。事实上包括了两个内容，即它是一个点集，同时又是具有正交变换群之下的不变性质的点集。这就 是 说，“某种几何空间（点集）。它之所以能跟其他的“别种几何空间（点集）”区别开来，是跟其点集到自身的变换群密切相关的。

可以看出，上述公理化观点和变换群观点之下 的”几 何空间”概念，有一个相同之处，即在给“几何空间”下定义时，不仅必须包含叫做几何元素的对象的集合，而且还必须包含能揭示这种集合的特有性质的几组公理，或者包含能揭示这种集合的特定结构的某种变换群G（即包含能给出该 集 合 中图形的分类方法的变换群G）。

目前我们所使用的《高等几何》教材，在给“射影平面（二维射影空间）”、“仿射平面（二维仿射空间）”、“欧氏平面（二维欧氏空间）”下定义时，一般仅仅指出了这些空间所包含着的几何元素集合（点集S），而略去了这些空间还应包含 着 的变换群G。例如，关于“射影平面（二维射影空 间）”的解析定义：“除零类以外的所有类〔X〕的集，称为射影 平 面。”或 其

直观的定义："在欧氏平面上添加一条无穷远直线，并且对于有穷远元素与无穷远元素同等看待而不加区分即得到射影平面。"都属于这种情况。在显而易见或不致发生混淆的情况下，可以说这种定义是一种粗略的定义。就如同我们给"度量空间"下定义时，常常把偶对(R^n, ρ)中的度量$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$略而不提。径称$R^n$为n维欧氏空间一样。

但在教学中，为了使学生加深对克莱因变换群观点的理解，指出变换群观点下的"几何空间"概念还必须包括变换群G这个内涵，却是很有必要的。这有两方面的原因：

其一，仅仅指出"空间"的几何元素是什么集合(如某种点集S)，并不能显示出该点集S究竟有怎样的特定结构。按照克莱因的变换群观点，只有同时给出了该点集S到自身的变换群G之后，S才成其为一种"空间"。这是因为群G是S上的变换群，只有它才给出了点集S中的图形(即点组)的一个分类法，即给出区分S中等价图形或不等价图形的标准。这样的分类给点集S以一种结构，使S成为一个"空间"。例如，在射影变换下，所有的简单四点形在射影平面上都是等价图形，所有的常态二次曲线在射影平面上也都是等价图形，这就显示出了射影平面的一种特定结构——射影结构，使它区别于仿射平面和欧氏平面。

所以，从这种意义上来说，在仅仅揭示"射影平面(二维射影空间)"的点集S的定义中，实际上它仅仅给出了射影平面上的"点场"的成员。"点场"并不等于"二维射影空间"；我们常说的在同一射影平面上有不同的"点场"，也并不是指其点集S成员的不同或其射影结构的不同，而是指在成员不变的条件下点集S在平面上的组合情况的不同。因此，在同一"射

影平面”上可以有各式各样的“点场”。

其二，对于有相同拓扑结构的仿射平面（二维仿射空间）和欧氏平面（二维欧氏空间）来说，其上的点集S应该理解为“相等”的，因为它们的成员完全相同。在这种情况下，“二维仿射空间”和“二维欧氏空间”涵义的不同，就完全体现在其偶对(S，G)中的变换群G的不同。

事实上也是如此。仿射变换使这样的点集S具有仿射结构，即它使射影平面上原所有等价的简单四点形能再区分出一类等价的平行四边形和一类等价的梯形，又使射影平面上原所有等价的常态二次曲线能区分出一类椭圆，一类双曲线和一类抛物线。在这种情况下，点集S就有了一种区别于射影结构的仿射结构，亦即仿射变换群G使点集S成了“二维仿射空间”。而正交变换则使同一点集S具有欧氏结构，即它更进一步使点集S中出现各种不同类的平行四边形，矩形，菱形，正方形，各种不同类的梯形，以及各种不同类的圆，椭圆，双曲线，抛物线等等图形。正因为如此，尽管点集S此时还是同一点集，然而它却成了“二维欧氏空间”。

综上所述，我们可以给出仿射平面（或称二维仿射空间）的解析定义如下：假设一个点集，它的元素（称为点）P跟实数有序偶(x，y)之间存在着一一对应；而且存在着该点集到自身的变换群，群中的任一变换由表达式

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所决定，其中(x，y)与(x′，y′)表示点集在该变换之下一对对应元素的有序偶；我们称满足上述条件的点集和变换群的全体是一个“仿射平面”（或“二维仿射空间”）。该变换群称为二维仿射变换群。我们称满足上述条件的有序偶是仿射平面