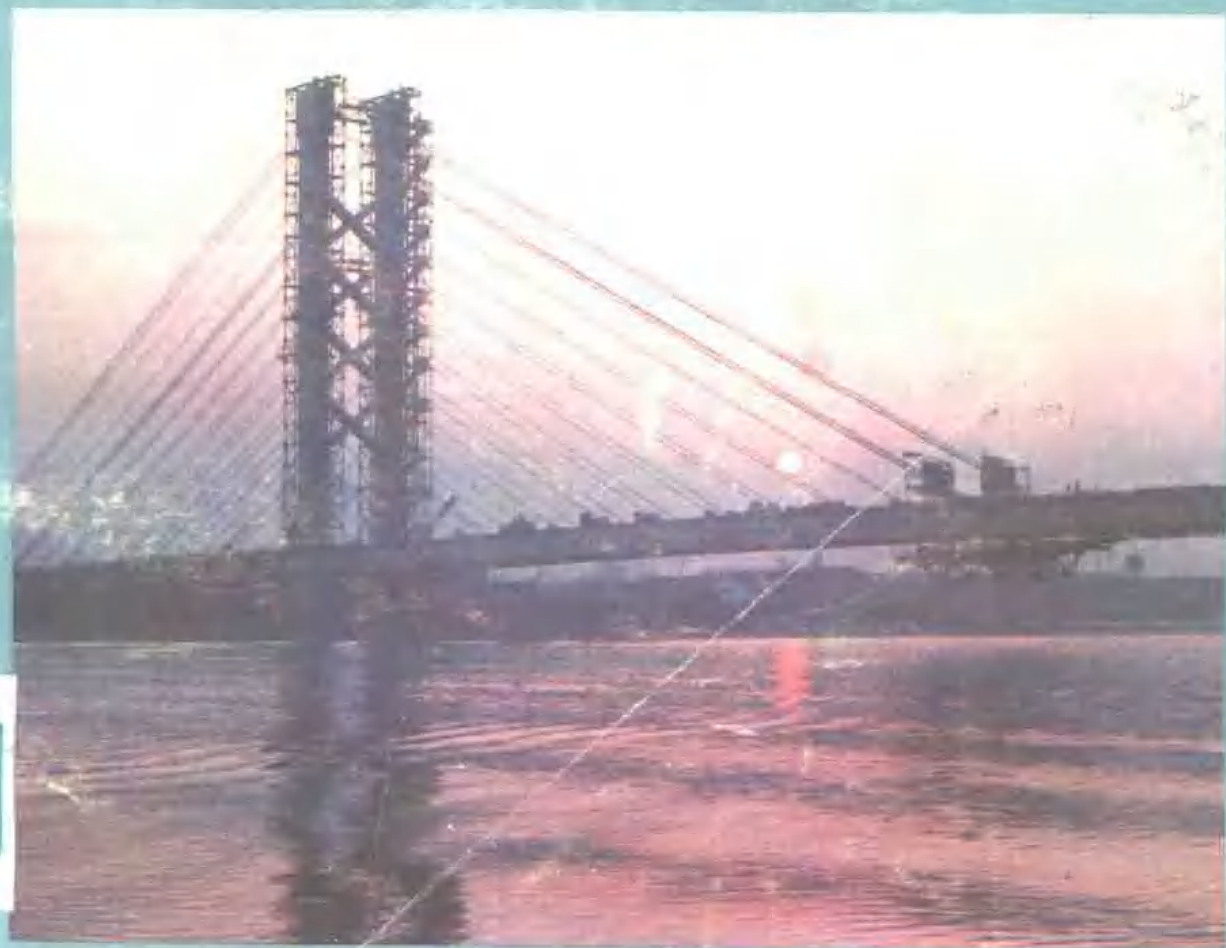


城市道路 与桥梁

Roads & Bridges



总第1期
试刊



29

5-4



北京市三元立交桥(牛王庙立交桥)

《城市道路与桥梁》编辑委员会

主任委员 刘作霖

付主任委员 王文俊 杨鸿远

委员 华尔巽 佟克正 吴国泰

杨祖东 范俊秋

《城市道路与桥梁》

(内部刊物)

试刊 第1期

(总第1期)

1984年12月

编辑、发行 《城市道路与桥梁》编

上海圆明园路133号

(上海市市政工程设计所)

印刷

上海长城绘图印刷厂

上海四川北路1963号

0181

5-4

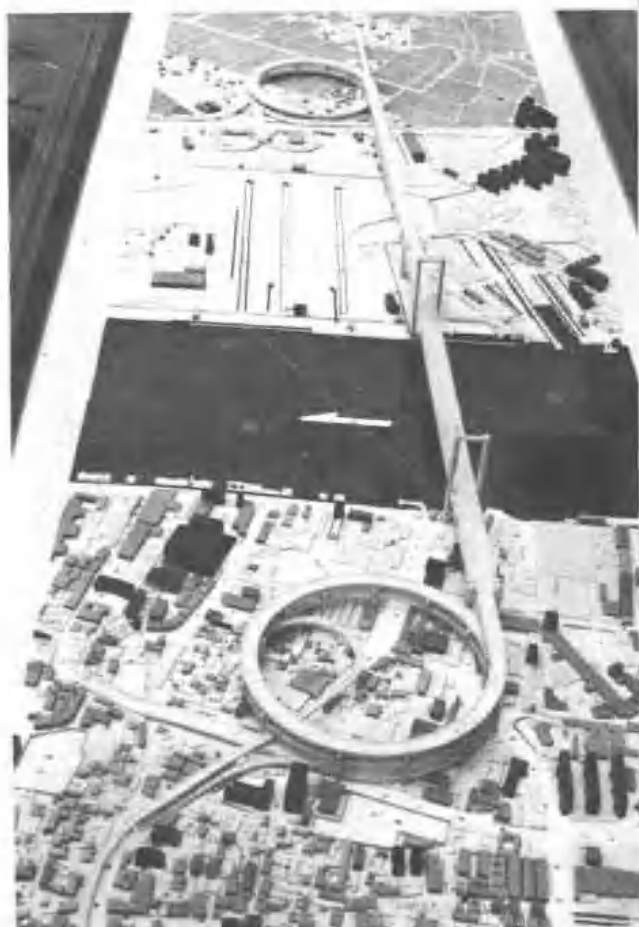


上海市区黄浦江桥 推荐方案模型照片

A引桥方案▶



◀B引桥方案



海南岛汽车试验场

各种试验路段



▲作动力性能试经的直线跑道



▲每百米长由9332块石块砌成的块石路段
(比利时路)



▲卵石路面



▲扭曲路段



▲片石路段



▲搓板路段

《城市道路与桥梁》(内部刊物)

试刊 1985年 第1期 (总第1期)

1984年12月出版

目 录

发刊词	本刊编辑部(2)
采用三角形有限元解算水泥混凝土路面版	高拥民(3)
汽车试验场工程设计	崔健球 崔致强 陆锦隆 顾荣官(34)
上海市区黄浦江大桥工程可行性研究	徐兴玉 侯引程 窦文俊 崔致强(48)
板、梁式弯桥的空间计算	谢万春(59)
重庆长江大桥空间计算	张介望 高荣强(79)
广州市典型人行天桥振动测试报告	广东省地震学会(103)
重建胡德(HOOD)水道浮桥	李何芳 译(111)

简讯

《城市桥梁、隧道设计准则》编制简讯	(118)
上海市南北快速有轨交通线工程可行性研究正在进行	(118)
南宁邕江二桥动工兴建	(119)
塔顶设观光厅的独塔斜拉桥——在建中的广东南海西樵大桥	(120)
香港拟修建跨海峡大桥	(121)
安纳西斯斜拉桥	(121)
国际桥梁结构协会第二届委员会	(122)

读者、作者与编者

征稿启事	本刊编辑部(121)
征求订户启事	本刊编辑部(126)

封面 上海市泖港大桥
封二 上海市区黄浦江大桥推荐方案模型照片
封三 海南汽车试验场部分试验路面照片
封底 北京市三元立交桥

发 刊 词

随着我国国民经济建设的迅猛发展，城市人口急增，市区不断扩大，城市交通问题日益尖锐，作为主要改善措施之一的市政道路与桥梁建设，因此受到更大重视。一些城市因地制宜改造旧路，增辟新路，新建立体交叉、地下铁道、高速公路，增修过江桥梁、隧道、缆车、人行天桥、地道以及研讨轻轨交通等，以疏散、分流、渠化交通，提高运输效率，保障人车安全，使情况初步有所改善，但还有大量工作等待进一步研究实践。为了交流工程技术经验，活跃学术思想，互通信息，特创办本刊，为广大城市道路与桥梁科研、设计、施工、维修养护和教学等单位的科技、管理人员提供切磋的园地，以促进我国城市道路与桥梁建设事业的发展。

由于我们水平有限、经验不足，缺点和错误在所难免，尚希读者多提改进意见，并欢迎各方大力支持、踊跃投稿，使本刊能为城市道路与桥梁建设事业的进一步发展更好地服务。

本刊编辑部

采用三角形有限元解算水泥混凝土路面板

高 拥 民

(天津市市政工程勘测设计院)

一、前 言

自七十年代初,国内外开始研究用有限元法解算混凝土路面板,但是由于普遍采用矩形单元,这就给可分析的混凝土路面板的形状带来一定的局限性。此外,由薄板理论出发对板角,开孔板孔边及中厚板的计算会带来较大的误差,因此,对水泥混凝土路面板的研究,虽然经过了半个多世纪,但是关于板角,特别是斜板板角及开孔板孔边应力等,尚未得到较好的解决。

本文根据 Mindlin 厚板理论,采用了适用薄板及中厚板的九个自由度的三角形有限元,并按温克勒和弹性半空间二种地基假设进行了推导。计算及试验的结果表明,其精度比划分同样网格的板由薄板理论出发的矩形元的精度要高。同试验结果吻合也较好。

二、计算公式的推导

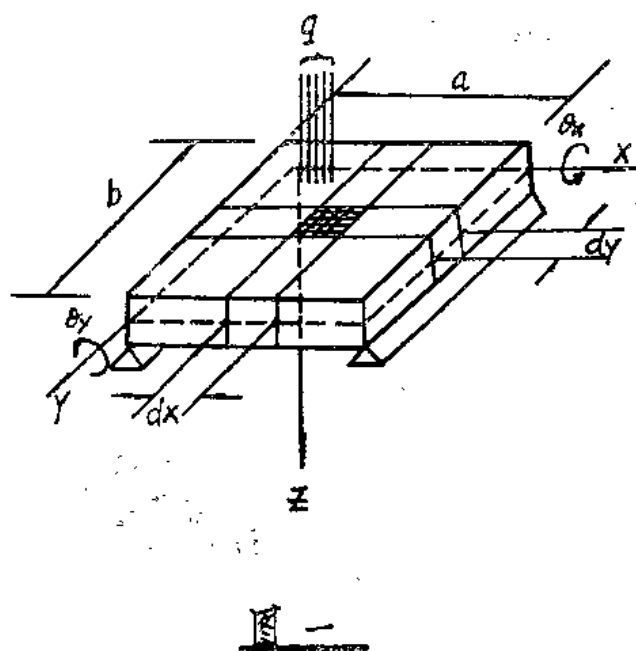
(一)板刚度矩阵的形成

1. 平面弯曲的基本方程:

根据 Mindlin 厚板理论[1](注)建立平板弯曲的基本方程,以板中面(X, Y 面)建立右手直角坐标系 OXYZ,并保留中面法线在变形后仍为直线的假设。设中面上任意点的挠度为 $W(x, y)$, 该点处中面法线绕 X 轴及 Y 轴的转角分别为 $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ 。详见图一。

由中面法线转角计算平板沿 X 向的曲率: $\eta_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$, 沿 Y 向的曲率:

$\eta_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$, 沿 x, y 向的扭率:



注: [1] 括号内数为本文引用参考文献编号, 以下同。

$$\eta_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x}.$$

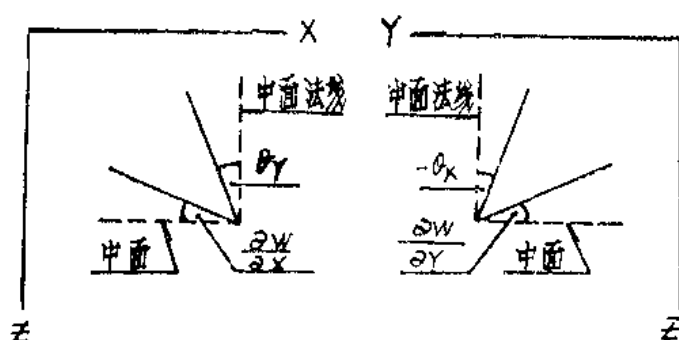
用 $\{X\}$ 表示板弯曲的形变列阵:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

距中面Z处的应变为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= Z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \epsilon_y &= -Z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ r_{xy} &= Z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

中面处的横向剪应变如图二所示, 图二中虚线表示中面和中法线变形前的位置, 实线表示变形后的位置。



图二

因此, 不难看出沿xz向的剪应变为:

$$r_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y, \text{ 沿YZ向的剪应变为:}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_x$$

$$\text{写成列阵: } \left\{ \tau \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_x \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$\left\{ \tau \right\}$ 为横向剪应变列阵。

板弯曲内力与弯曲变形间的关系同薄板经典理论。设板中面任一点对应的弯矩和扭矩分别为 M_x , M_y , M_{xy} 。则:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

式中: σ_x , σ_y , τ_{xy} 为距中面 z 处一点的应力。

再根据虎克定律, 将(4)式中的应力用应变表示, 将式(2)代入并做沿板厚积分, 可得:

$$\begin{aligned} M_x &= E_h \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \mu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ M_y &= E_h \left(\mu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ M_{xy} &= \frac{E_h (1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

式中: $E_h = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$, E , μ 分别为材料弹性模量和波桑系数; H 为板厚度。

剪力也可以用剪应变表示, 进而用位移表示。

设板中面一点处对应的剪力为 Q_x , Q_y ,

$$\text{则有: } Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dz \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot dz$$

式中 τ_{xz} , τ_{yz} 为距中面为Z处一点的剪应力。应注意到, 我们已假定中面法线变形后仍为直线, 所以剪应变沿板厚不变。根据虎克定律变换(6)式并沿板厚积分

$$\text{则有: } \left. \begin{aligned} Q_x &= E_m \left(\frac{\partial W}{\partial X} + \theta_y \right) \\ Q_y &= E_m \left(\frac{\partial W}{\partial Y} - \theta_x \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式中 $E_m = \frac{E_h}{2(1+\mu)m}$, m 为横向剪应力沿厚度均匀分布时的折算系数。按能量相当, 取

$m = 1.2$

将上述五个内力未知量: $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ 和三个位移未知量: W_x, θ_x, θ_y 之间的关系写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_h & \mu E_h & 0 & 0 & 0 \\ \mu E_h & E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_h(1-\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_x \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{令: } \{\sigma\} = [M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} E_h & \mu E_h & 0 & 0 & 0 \\ \mu E_h & E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_h(1-\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

则式(8)可简写为:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \dots\dots\dots(12)$$

式中 $\{\epsilon\}$ 称为板弯曲问题的应变列阵。

$[D]$ 称为板弯曲问题的弹性矩阵。可写成分块形式:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

其中:

$$[D_{11}] = \begin{bmatrix} E_h & \mu E_h & 0 \\ \mu E_h & E_h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_h(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$[D_{21}] = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

2. 位移函数

采用有限元法位移求解, 重要的问题是对位移变量选择合适的位移模式。由薄板变形后的几何条件可知, $W(x, y)$ 较 $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ 高出一次数, 而 Q_x , Q_y 所含的自变量中应保证必要的低次项为原则, 因此可以采用以下的位移模式

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ \theta_x(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ \theta_y(x, y) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

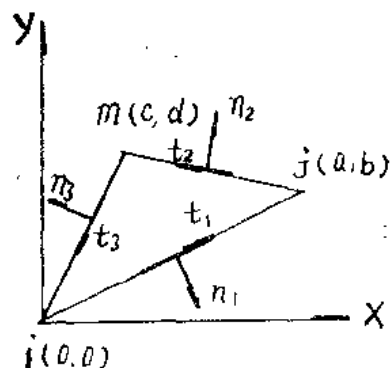
可以看出, 要独立确定(16)式中的12个待定系数, 三角形单元三个结点提供的九个位移条件是不够的, 因此补用了〔2〕中对单元的约束条件, 即沿三角形单元每边建立切向与法向坐标轴 $t-n$ (图三示)

设约束条件为沿每边剪力 Q_t 为常量, 按式(7)可以写出:

$$Q_t = E_m \left(\frac{\partial W}{\partial t} - \theta_n \right) \dots\dots\dots (17)$$

其中 $\frac{\partial W}{\partial t}$ 为三角形边上一点处挠度 W 沿坐标 t 的方向导数,

θ_n 为该处的中面法线绕 n 轴的转角。由方向导数公式则有:



$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \cos(x, t) + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \cos(y, t) \dots\dots\dots (18)$$

同时 θ_n 与 θ_x , θ_y 有此下关系:

$$\theta_n = \theta_x \cdot \cos(x, n) + \theta_y \cos(y, n) \dots\dots\dots (19)$$

式中: $\cos(x, n)$, $\cos(y, n)$ 为轴 n 的方向余弦。令 $\cos(x, n) = L$, $\cos(y, n) = m$, 并注意到 $\cos(x, t) = -\cos(y, n)$, $\cos(y, t) = \cos(x, n)$

将式(18), (19)代入(17)式, 则有:

$$Q_t = E_m \left[- \left(\frac{\partial W}{\partial X} + \theta_y \right) m + \left(\frac{\partial W}{\partial Y} - \theta_x \right) L \right] \dots\dots\dots(17)$$

由于沿单元每边剪力为常量，则：

$$\frac{\partial Q_t}{\partial t} = E_m \left[- \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right) m + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right) L \right] = 0 \dots\dots\dots(18)$$

由方向导数的公式可知：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} &= - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} m + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} L \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} &= - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} m + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} L \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial t} &= - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} m + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} L \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial t} &= - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} m + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} L \end{aligned} \dots\dots\dots(20)$$

将式(20)代入式(18)，再将(16)式代入则有：

$$(\alpha_4 + \frac{1}{2}\gamma_2)m^2 + (\frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_3) - \alpha_5)lm + (\alpha_6 - \frac{1}{2}\beta_3)L^2 = 0 \dots\dots\dots(21)$$

对于单元的每条边均可写出一个(21)式这样的条件，

$$\left. \begin{matrix} m_1^2 & l_1 m_1 & l_1^2 \\ m_2^2 & l_2 m_2 & l_2^2 \\ m_3^2 & l_3 m_3 & l_3^2 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha_4 + \frac{1}{2}\gamma_2 & & 0 \\ \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_3) - \alpha_5 & = & 0 \\ \alpha_6 - \frac{1}{2}\beta_3 & & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

这是一个齐次线性方程组，由解析几何可知系数行列式不等于零，因此有：

$$\left. \begin{matrix} \alpha_4 = -\frac{1}{2}\gamma_2 \\ \alpha_5 = \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_3) \\ \alpha_6 = \frac{1}{2}\beta_3 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

将(22)式代入(16)式则有：

$$\begin{aligned}
 W(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y - \frac{1}{2} \gamma_1 x^2 + \frac{1}{2} (\beta_2 - \gamma_3) xy + \frac{1}{2} \beta_3 y^2 \\
 \theta_x(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\
 \theta_y(x, y) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (23)$$

此时，已变成了一个九个自由度的单元，式(23)中九个待定系数可由三角形单元顶点九个位移函数确定。三角形顶点坐标按图四所示，显然这比采取增加三边中点为结点方法未知量个数少，总刚度体积小，计算也较简便。

三角形单元三顶点的结点位移如图五所示则结点位移列阵为：

$$\begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} W_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, W_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, W_m, \theta_{xm}, \theta_{ym} \end{bmatrix}^T \quad \dots\dots\dots (24)$$

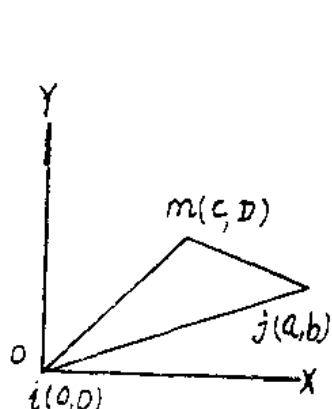


图 四

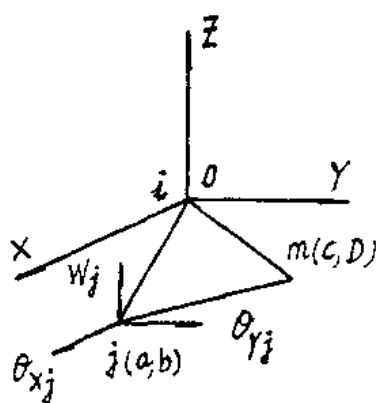


图 五

在式(23)中，当 x, y 取结点坐标时，等号左边为相应的结点位移，从而可以定出其九个待定系数，将求得待定系数代回式(23)即可得到以形函数和结点位移表示的位移模式：

$$\begin{aligned}
 W &= N_i W_i + N_j W_j + N_m W_m + L_i \theta_{xi} + L_j \theta_{xj} + L_m \theta_{xm} + K_i \theta_{yi} + K_j \theta_{yj} + K_m \theta_{ym} \\
 \theta_x &= N_i \theta_{xi} + N_j \theta_{xj} + N_m \theta_{xm} \\
 \theta_y &= N_i \theta_{yi} + N_j \theta_{yj} + N_m \theta_{ym}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots\dots (25)$$

式中 $N_i, N_j, N_m, L_i, L_j, L_m, K_i, K_j, K_m$ 为形函数

其中: $N_1 = 1 + \frac{b-d}{2\Delta} x + \frac{c-a}{2\Delta} y$

$$N_2 = \frac{d}{2\Delta} x - \frac{c}{2\Delta} y$$

$$N_3 = -\frac{b}{2\Delta} x + \frac{d}{2\Delta} y$$

.....(26)

$$L_1 = \frac{1}{2} y + \frac{b-d}{4\Delta} xy + \frac{c-a}{4\Delta} y^2$$

$$L_2 = \frac{1}{4\Delta} (-bdx + bcy + dxy - cy^2)$$

$$L_3 = \frac{1}{4\Delta} (bdx - ady - bxy + ay^2)$$

$$K_1 = -\frac{1}{2} x - \frac{b-d}{4\Delta} x^2 - \frac{c-a}{4\Delta} xy$$

$$K_2 = \frac{1}{4\Delta} (adx - acy - dx^2 + cxy)$$

$$K_3 = \frac{1}{4\Delta} (-bcx + acy + bx^2 - axy)$$

△ 为三角形面积

三、计算结果及精度

根据上述推导公式用 FORTRAN(IV) 语言编写了电算程序, 并在引进的日本M—160机进行了调试。为了与矩形元精度做一比较, 计算时采取了与文献[5]相同的参数。即: 路面板的弹性模量 $E_s = 2.1 \times 10^5$ 公斤/厘米²; 泊桑比 $\mu_c = 0.15$; 板厚为 $h = 20$ 厘米; 路基的弹性模量 $E_m = 800$ 公斤/厘米², 地基反力系数 $K = 5.5$ 公斤/厘米², 泊桑比 $\mu_s = 0.30$; 集中荷载 $P = 4500$ 公斤; 均布荷载单位压力 $P = 5$ 公斤/厘米², 接触面积 0.41×0.41 , l 为相对刚度半径。

板网格划分见图六

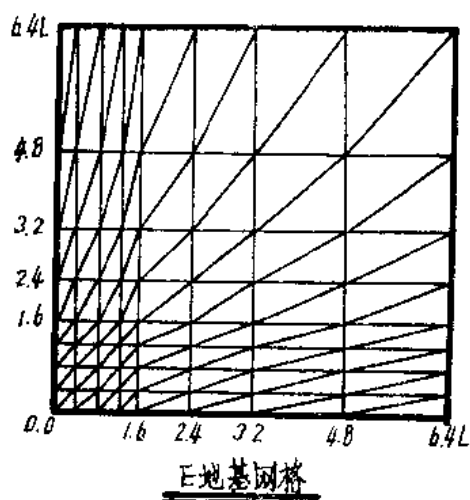
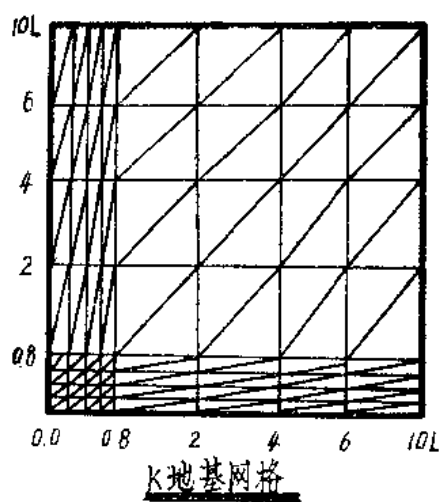


图 6

(一) K—地基上板

集中荷载作用于板中，沿对称轴 x (或 y 轴) 的挠度系数 $W = \frac{k l^2}{\rho}$ ，弯矩系数 $M = \frac{M}{\rho}$ ，其计算结果示于表3、表4、表5。

均布荷载作用于板中时，其计算结果示于表6、表7、表8。

K—地基板中集中荷载下的挠度系数 $\bar{W}$

表 3

$\frac{x}{l}$	精 确 解 $\bar{W}$	矩形有限元解		三角形有限元解	
		W	相对误差%	$\bar{W}$	相对误差%
0	0.12500	0.11501	- 8.0	0.124	- 0.8
0.2	0.12065	0.11061	- 8.3	0.116	- 3.9
0.4	0.11200	0.10202	- 8.9	0.106	- 5.4
0.6	0.10145	0.09170	- 9.6	0.095	- 6.4
0.8	0.09015	0.08079	- 10.4	0.084	- 6.8
1.0	0.07878	0.07005	- 11.1	0.073	- 7.3
1.4	0.05758				
1.8	0.03970				
2.0	0.03223	0.02658	- 17.5	0.03	+ 2.4
2.4	0.02010				
3.0	0.00814				
4.0	- 0.00035	- 0.00017			
6.0	- 0.00115	- 0.00081			
10.0		0.00078		0.000039	