工程数学

3

陆传务 主编

华中理工大学出版社

目　录

第六篇　复变函数与积分变换

引言 …… (3)

6.1　复数与复变函数 …… (5)

§6.1-1　复数及其代数运算 …… (5)

§6.1-2　复变函数及其代数运算和极限运算 …… (13)

习题1 …… (19)

6.2　复变函数的微分学——解析函数、平面场的复势 …… (22)

§6.2-1　解析函数 …… (22)

§6.2-2　一些初等解析函数 …… (33)

§6.2-3　解析函数与平面场的复势 …… (41)

习题2 …… (48)

6.3　复变函数的积分学 …… (51)

§6.3-1　复变函数积分的定义和算法 …… (51)

§6.3-2　解析函数的积分 …… (56)

§6.3-3　Cauchy 积分公式及高阶导数 …… (61)

习题3 …… (66)

6.4　解析函数的幂级数展开式 …… (69)

§6.4-1　幂级数 …… (69)

§6.4-2　Taylor级数 …… (76)

§6.4-3　Laurent级数 …… (82)

习题4 …… (91)

6.5　留数及其应用 …… (93)

§6.5-1　函数孤立奇点的分类 …… (93)

§6.5-2　留数及其应用 …… (97)

习题5 …… (113)

6.6 保角映射……………………………………………………（115）
§6.6-1 保角映射的概念………………………………………（115）
§6.6-2 分式线性映射…………………………………………（117）
§6.6-3 幂函数和指数函数所表示的映射……………………（129）
习题6……………………………………………………………（136）
6.7 积分变换……………………………………………………（139）
§6.7-1 Fourier变换………………………………………（140）
§6.7-2 Laplace变换………………………………………（158）
习题7……………………………………………………………（177）

第七篇 数学物理方程与特殊函数

引言……………………………………………………………（185）
7.1 概论…………………………………………………………（187）
§7.1-1 偏微分方程的一般概念………………………………（187）
§7.1-2 一些典型的数理方程的推导…………………………（189）
§7.1-3 定解条件和定解问题适定性概念……………………（196）
习题1……………………………………………………………（201）
7.2 分离变量法…………………………………………………（204）
§7.2-1 弦的自由振动问题……………………………………（204）
§7.2-2 非齐次方程的求解问题………………………………（216）
§7.2-3 非齐次边界条件的处理………………………………（218）
§7.2-4 解热传导方程的混合问题……………………………（221）
§7.2-5 解圆域上Laplace方程的Dirichlet 问题…………（227）
习题2……………………………………………………………（231）
7.3 Cauchy问题…………………………………………………（235）
§7.3-1 一维波动方程的Cauchy问题………………………（235）
§7.3-2 高维波动方程的Cauchy问题………………………（242）
*§7.3-3 热传导方程的Cauchy问题…………………………（249）
习题3……………………………………………………………（258）
7.4 应用积分变换解数学物理问题……………………………（262）

§7.4-1 用Fourier变换解数理方程举例……（262）
§7.4-2 应用Laplace变换解数理方程……（266）
•§7.4-3 有限积分变换及其应用……（272）
习题4……（279）
7.5 边值问题……（283）
§7.5-1 场位方程的几种解法……（283）
§7.5-2 Green公式、调和函数的基本性质……（287）
§7.5-3 Green函数……（297）
§7.5-4 Poisson方程解法……（307）
习题5……（310）
7.6 特征值问题……（313）
•§7.6-1 Sturm-Liouville问题……（313）
§7.6-2 特征函数及特征值的性质……（315）
习题6……（317）
7.7 高维问题的分离变量法……（319）
§7.7-1 Bessel函数……（319）
§7.7-2 Legendre多项式及其应用……（331）
§7.7-3 高维的热传导方程与波动方程……（343）
•§7.7-4 应用有限Hankel变换求解数学物理问题……（347）
习题7……（350）
***7.8 二阶线性偏微分方程的分类**……（354）
§7.8-1 二阶方程的分类……（354）
§7.8-2 常系数方程……（361）
习题8……（363）

第八篇 最优化方法

引言……（367）
8.1 线性规划……（371）
§8.1-1 线性规划问题的数学模型的矢量表示……（371）
§8.1-2 线性规划问题的图解法……（375）

§8.1-3　线性规划问题的一些基本概念……………（378）
§8.1-4　线性规划的对偶问题……………（383）
§8.1-5　单纯形法……………（385）
§8.1-6　灵敏度分析……………（395）
§8.1-7　整数线性规划……………（402）
习题1……………（410）
8.2　非线性规划……………（415）
§8.2-1　非线性规划问题的分析解法——Kuhn-Tucker条件……………（417）
§8.2-2　非线性规划问题的一些数值解法……………（427）
习题2……………（445）
复变函数与积分变换习题答案……………（447）
数理方程与特殊函数习题答案……………（458）

《工程数学》第三册

第 六 篇

复变函数与积分变换

刘国钧　曹诗珍　编

引 言

复变函数与多元函数微积分学关系密切，可以说后者是前者的基础，同时由于复变函数的发展，多元函数的微积分学也得到了相应的发展。

复变函数的产生和发展过程充分说明了数学科学一方面是按它的内在规律发展的，另一方面是由生产决定的。例如18世纪，由于流体力学、弹性理论和势论的发生和发展，促使了复变函数理论的迅速发展，当时Euler是用复变函数理论来解决流体力学问题的能手，他还把复变函数论用于地图制图学。复变函数研究的一个主要内容是解析函数，它是在19世纪奠定的，主要作者是Cauchy，Riemann和Weierstrass等。解析函数论应用广泛，因此，20世纪以来，复变函数的理论已发展成为数学科学的一个较完整的庞大的数学分支。

这里着重介绍复变函数论中最基本的内容，即解析函数、级数和保角变换，它们在力学和场论中有着广泛应用。

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数的相应内容在复数域中的推广和发展。因此，在学习过程中，要勤于思考，善于比较，既要注意两者共同点，更要弄清其不同点，这样才能抓住问题的本质，达到融会贯通的目的。

6.1 复数与复变函数

这节主要介绍复数与复变函数的代数运算和复变函数的极限概念，并着重指出它与实数、多元函数微分学的联系。因此在学习时应注意分析、掌握如何将复变函数的运算转化为实二元函数的运算，要善于比较它们的相同点和不同点。

§6.1-1 复数及其代数运算

一 复数

数的发展经历了漫长的历史过程，先是自然数即正整数，然后是整数（包括0）、有理数、无理数、实数，最后才是复数。

从数发展的内在规律性来说，复数是由解代数方程而产生的。早在公元前2000年左右，人们就会解一元二次方程.对于方程 $x^2+1=0$，解得 $x=\pm\sqrt{-1}$。但是"数 $\sqrt{-1}$"在实数系内是不存在的，因为在实数系内任一数的平方不会等于负数。人们在很长的时期内未能找到"数 $\sqrt{-1}$"的实际意义，便称它为**虚数**，至今还一直沿用这个称呼，称 $i=\sqrt{-1}$ 为**虚数单位**，并有性质：

$$i^2=-1,\qquad i=\sqrt{-1}.$$

于是便产生了复数，记为 $z=x+iy$，式中 x、y 均为实数，分别称为 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

可见复数是实数的扩充，当 $y=0$ 时，复数 z 就是实数 x。复数有两个不同的单位，即实数单位1和虚数单位 $i=\sqrt{-1}$。

复数既然是作为实数的推广，因此它的代数运算法则应该对

实数也成立。为了介绍复数的代数运算法则，我们需先弄清复数的几何意义。

二 复数的表示法

在平面直角坐标系中，设P点的坐标为(x, y)（图6-1），则点$P(x,y)$就与复数$x+iy$成一一对应，即

$$P(x,y) \longleftrightarrow z=x+iy.$$

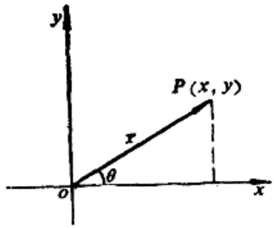

图 6-1

又由平面矢量知道，位置矢量$\overrightarrow{oP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，于是就有关系式

$$P(x,y) \longleftrightarrow z=x+iy \longleftrightarrow \overrightarrow{oP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

上面关系式表示一一对应。这说明，一个复数z既可表示xoy平面上的一个点P，又可表示该平面上的一个位置矢量$\overrightarrow{oP}$。反之亦真。这就是复数的几何意义，这时xoy平面称为**复平面**。这点对于复数的代数运算是具有启发性的。

这里注意式中i与$\boldsymbol{i}$的区别，一个是纯虚数的单位（$i=\sqrt{-1}$），它相当于实数的单位1，另一个$\boldsymbol{i}$是x轴上的单位矢量，二者不可混淆。

由复数$z=x+iy$与平面上点$P(x,y)$和位置矢量之间的一一对应关系，便不难得到以下诸结论。

点$P(x,y)$到原点的距离为$\sqrt{x^2+y^2}$，它也是位置矢量$\overrightarrow{oP}=\boldsymbol{r}$的长度，叫复数$z$的**绝对值**或**模**，记为$r=|z|=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$；$\boldsymbol{r}$与$x$轴正方向的夹角$\theta$，叫$z$的**幅角**（**或相位**），记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z;$$

这样，复数$z=x+iy$也可用极坐标表示为

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta,\ r\geqslant0,$$

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

式中 $\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}$，$x^2+y^2=r^2=|z|^2=|\boldsymbol{r}|^2$. 这里 $r\geqslant 0$ 被唯一确定，而θ不是唯一的，它有无穷多个值，一般写成$\theta=\alpha+2k\pi$，$k=0$，± 1，± 2，…，$-\pi<\alpha\leqslant\pi$，角α称为$\mathrm{Arg}z$的**主值**，记为$\arg z$，即$\alpha=\arg z$， $\theta=\mathrm{Arg}z$.

又如两复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$相等，就有

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2\longleftrightarrow\overrightarrow{oP_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}=\overrightarrow{oP_2}$$
$$=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$$

因此就有$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，即两复数相等，等价于两复数的实部相等和虚部相等。

设有复数 $z=x+iy$和$\overline{z}=x-iy$，则称$\overline{z}$为z的**共轭复数**.它们分别表示的两点$P(z)$和$P(\overline{z})$，对称于实轴，于是有$\overline{\overline{z}}=z$.

复数的加减法应如何定义呢？由于复数可以表示矢量，而且二者具有一一对应关系，故两个复数进行加减运算时，应该是它们相应的实部和虚部分别进行加减. 也就是说当$z_1=x_1+iy_1\longleftrightarrow\overrightarrow{oP_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$z_2=x_2+iy_2\longleftrightarrow\overrightarrow{oP_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$时，则有

$$\overrightarrow{oP_1}+\overrightarrow{oP_2}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}\longleftrightarrow z_1+z_2$$
$$=z=x+iy=\overrightarrow{oP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

其中$x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$，$\overrightarrow{oP}$是以$\overrightarrow{oP_1}$和$\overrightarrow{oP_2}$为二邻边的平行四边形的对角线矢量，故复数的线性运算（即加减法和实数乘）法则定义如下：

三 复数的运算

设有复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则定义

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),$$
$$az_1=a(x_1+iy_1)=ax_1+iay_1,\ a$$

为实数。

两复数不能比较大小，这正如两矢量不能比较大小一样，但复数的绝对值可以比较大小，因为矢量可比较其长度。

另外，由$|z|$的定义，以及上面的复数与矢量的对应关系，不难得到不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad |z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|.$$

前面为了说明复数的几何意义，我们把复数$z=x+iy$与位置矢量$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$建立起一一对应关系，并得到复数的线性运算，它同矢量的线性运算一样，即符合矢量线性运算的平行四边形法则，这也就是复数线性运算的几何意义。

下面介绍复数的乘法和除法法则。

设复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则有

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2),$$

由分配律及$i^2=-1$，得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=x_1x_2+i^2y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),\end{aligned}$$

这就是说复数z_1与z_2的积仍为一复数，其实部为$x_1x_2-y_1y_2$，虚部为$x_1y_2+x_2y_1$，它就是两复数相乘的运算法则。

复数的乘法运算和实数一样，适合交换律，结合律和分配律。

设$z=x+iy$，则$\overline{z}=x-iy$，于是得

$$\begin{aligned}\overline{z}\,z&=(x+iy)(x-iy)=(x^2+y^2)+i(xy-xy)\\&=x^2+y^2=|z|^2.\end{aligned}$$

由此不难得到两复数的除法法则。

设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2\neq0$，则

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\&=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i\text{。}$$

这就是两个复数相除时的运算法则。

复数除了可以表示平面矢量外，还可以表示二阶矩阵，而且它的代数运算法则与这类矩阵的相应运算法则也是一致的。

设有复数$z=x+iy$，作二阶矩阵

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$，则$z$与矩阵$A$之间便有一一对应关系，

即 $z=x+iy\longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$。

设

$$A_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}\longleftrightarrow z_1=x_1+iy_1,$$

$$A_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}\longleftrightarrow z_2=x_2+iy_2,$$

则有 $$A_1+A_2=\begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -y_1-y_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}\longleftrightarrow(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)=z_1+z_2,$$

$$aA_1=\begin{pmatrix} ax_1 & ay_1 \\ -ay_1 & ax_1 \end{pmatrix}\longleftrightarrow ax_1+iay_1=az_1,$$

$$A_1A_2=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_1y_2 & x_1y_2+x_2y_1 \\ -(x_1y_2+x_2y_1) & x_1x_2-y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$=A_2A_1\longleftrightarrow z_1z_2\text{。}$$

设 $z_2=x_2+iy_2\neq0\longleftrightarrow A_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}$，

则 $\det A_2=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{vmatrix}=x_2^2+y_2^2=|z_2|^2\neq0$。可见

$$A_2^{-1}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\begin{bmatrix}x_2 & -y_2\\ y_2 & x_2\end{bmatrix}\longleftrightarrow\frac{1}{|z_2|^2}(x_2-iy_2)$$

$$=\frac{1}{z_2\cdot\bar{z}_2}\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}=z_2^{-1},$$

$$A_1A_2^{-1}=A_2^{-1}A_1=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} & \dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\\ -\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} & \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\end{bmatrix}\longleftrightarrow\frac{z_1}{z_2}$$

$$=z_1z_2^{-1}.$$

复数模型的多样化正说明了复数应用的广泛性。

从上面复数的代数运算可以看出，复数 $z=x+iy$ 的这种表示法（叫直角坐标表示式）对乘除法的运算是不太方便的。

设复数 z_1、z_2 的极坐标表示式分别为

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则 $z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，而由三角恒等式

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2,$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2,$$

便得 $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$；

同样可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]\quad(z_2\neq0).$$

可见这时的运算比在直角坐标表示下相应的运算要简单些。

例1 化简 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}$，其中 x 是实数，$|x|\geqslant1$。

解 因 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}$ 是个复数，故设

$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}=X+iY$，两边平方得

$$1+2x\sqrt{x^2-1}\,i=(X^2-Y^2)+2XYi,$$

即有 $X^2-Y^2=1$，$XY=x\sqrt{x^2-1}$

由此求得$X=\pm x$，$Y=\pm\sqrt{x^2-1}$，

故 $$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\,i}=\pm(x+i\sqrt{x^2-1})。$$

例2 设$z=x+iy$，试证明

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

证 因$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{(|x|+|y|)^2}=|x|+|y|$，

又 $$2|z|^2=2(|x|^2+|y|^2)\geqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2$$
$$=(|x|+|y|)^2,$$

故 $$|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}},$$

从而 $$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

例3 设 $z_1=1+i$，$z_2=1-\sqrt{3}\,i$，求z_1；z_2；$z_1\cdot z_2$；$\frac{z_1}{z_2}$；$\frac{z_2}{z_1}$的极坐标表示式。

解 因$|z_1|=\sqrt{2}$，$|z_2|=\sqrt{4}=2$，$\arg(z_1)=\frac{\pi}{4}$

$\arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}$，故得

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$z_1z_2=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right];$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right],$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right].$$

下面介绍复数的指数表示式。

由Euler公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,不难得到:

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta,$$

由此二式解得

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}),\quad \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}).$$

于是有 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$,
这就是复数的指数表示式,这种表示法对复数的乘方和开方运算是方便的。因为这时就有公式

$$z^n=r^ne^{in\theta},\qquad \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}},$$

这里要特别注意$\sqrt[n]{r}$是取算术根,故只有一个值,而$e^{i\frac{\theta}{n}}$则有n个不同的值,因 $\theta=\alpha+2k\pi$, $\alpha=\arg z$ ($k=0$, ±1, ±2, $\cdots$),故当k取$0,1,\cdots,n-1$时,即得n个不同的 $e^{i\frac{\theta}{n}}$: $e^{i\alpha}$, $e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)}$, $e^{i\left(\alpha+2\frac{\pi}{n}\right)}$, $\cdots$, $e^{i\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}$. 当 n 取其他值时,所得的 $e^{i\theta}$必等于上述n个值中的某一个,故在复数中,凡开n次方就得n个方根,这种情况同实数中的开方不同。

例4 求$\sqrt[4]{1+i}$及$(1+i)^4$。

解 因$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,

故 $$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}},\ (k=0,1,2,3).$$