



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

丛书主编 钟承奎

理工科

高等数学

第三册 线性代数

罗彦锋 编著



兰州大学出版社



理工科

高等数学

第三册 线性代数

罗彦锋 编著



兰州大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

线性代数/罗彦锋编著. —兰州:兰州大学出版社,
2009.7

(高等数学/钟承奎主编)

ISBN 978-7-311-03105-3

I. 线… II. 罗… III. 线性代数—高等学校—教材
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 127625 号

策 划 陈红升
责任编辑 陈红升 丁武蓉
封面设计 张友乾

书 名 高等数学(理工科)
第三册 线性代数
作 者 罗彦锋 编著
出版发行 兰州大学出版社 (地址:兰州市天水南路 222 号 730000)
电 话 0931-8912613(总编办公室) 0931-8617156(营销中心)
0931-8914298(读者服务部)
网 址 <http://www.onbook.com.cn>
电子信箱 press@onbook.com.cn
印 刷 天水新华印刷厂
开 本 787×1092 1/16
印 张 19
字 数 317 千
版 次 2009 年 8 月第 1 版
印 次 2009 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-311-03105-3
定 价 28.00 元

(图书若有破损、缺页、掉页可随时与本社联系)

《高等数学》系列教材编审委员会

名誉主任：范先令

主 任：钟承奎

副 主 任：张和平 罗彦锋 李万同 张国凤

委 员：(按姓氏排序)

李效虎 李自珍 陆 凡

罗彦锋 张国凤 张志强

总 序

《高等数学》系列教材为教育部“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”，共四册：《一元微积分》、《多元微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。主要供非数学专业对数学要求更高一些的专业（需要一类数学的专业）与基地班的本科大学生使用，其他专业与班级在使用本套教材时可对教材内容进行适当选择。

关于数学在其他科学中的重要作用，有一些人常用“数学是科学的工具”这样的术语来描述，其实这样的描述并不确切，有的人甚至把这句话理解为数学只不过是科学发展的一个居于次要的、仆从地位的、可用可不用的工具而已，这就更大错特错了。现代科学（尤其是物理学）发展中的许多事例已经确凿地表明，如果一定要说“数学是科学的工具”，那么数学也是科学发展中特别重要的、不可或缺与不可替代的、而且在很多时候占据主导地位与起着决定性作用的工具。其实这里我们想说的是，数学不是科学的一个一般的、普通的工具，数学对于科学的重要性，无论给予多么高的评价都不会过分。现代科学的发展史同样也表明，对于科学的发展来说，不光数学理论是重要的，而且数学特有的思维方法也特别重要。在一定意义上可以说，每门学科的发展史都是该学科的数学化程度逐渐提高的历史。我们看到，当今数学化程度最高的一些学科已经和数学密不可分，并逐渐和数学融为一体。在这些学科中的伟大的科学家无一例外地同时也是数学家，数学和科学的统一必将是个大趋势。对于非数学专业的大学生而言，数学素养是专业素养中的重要组成部分。另外，数学还是一种文化，学习数学对于促进人的全面发展与人格的完善具有积极的意义。总之，数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。作为非数学专业的大学生一定要下决心努力学好高等数学这门课程。因为数学对于同学们在校期间的专业课程的学习和本科毕业后的继续学习、工作以及生活都是非常重要的。

我们编写这套教材的目的和任务就是，要使同学们能较好地掌握各相关专业所必需的高等数学领域中的最基本、最重要的理论知识，并且能较好地掌握其中所体现的一些重要的数学思想和方法，使同学们在获取数学知识的同时切实提高数学素养，特别是增强数学思维能力与创新意识，从而为后续专业

课程的学习与深造以及今后的工作打下坚实的数学知识与思维方法方面的基础。

一部好的教材无疑会对教学效果起到十分重要的作用。本套教材是在吸收和借鉴国内外同类教材,特别是近几年出版的一批“面向二十一世纪课程”教材和国家“十五”规划教材以及我校出版的四套高等数学教材优点的基础上,结合教学实际情况,按照新的教学要求和教学任务,组织具有较高学术水平且有丰富教学经验的教师认真编写而成的。在编写中我们特别注意了以下几个方面。

第一,与时俱进,与数学和其他学科的发展现状相适应。例如,由于很多学科对数学知识内容需求的扩大,以前仅限于微积分内容的传统的高等数学教材显然不能满足现在的需要,因此本套教材中增加了线性代数和概率论与数理统计的内容;再如,微积分学是牛顿和莱布尼兹等人于17世纪末创立的,属于经典数学的范畴,对于这些内容,本教材力求用现代数学的思想观点去统帅与处理,这样可以使同学们能够站在更高的层次上对这些内容的本质与作用有更深入一些的理解,也便于与现代数学的衔接;还有,计算机的诞生和迅速发展对各门学科均有很大影响,数学更是首当其冲,高等数学应当作出相应的响应。

第二,重点突出,各学科所需要的数学知识实在是太多了,把它们全写入教材,既不可能也无必要。一方面,在知识内容上重点突出,我们力求选择那些最基本、最重要、最有用的内容编入教材,并把这些重点内容下大力气写好;另一方面,使学生能较好地掌握一些重要的数学思想和方法。因此在教材的编写中结合有关的具体内容突出重点并力求写好,这方面在帮助学生理解诸如“数学家是怎样抽象出这些重要的数学概念的?”、“数学家是怎样猜想出这些定理的?”、“这些定义和定理究其实质是怎么回事?”等问题方面能起到画龙点睛的作用。

第三,深入浅出,通俗易懂,便于自学。对于重要的数学概念与定理,除了解释清楚它们的物理意义与几何意义外,还从多种角度出发并用通俗易懂形象直观的语言揭示出它们的本质。此外,教材中的例题和习题的选取与配备适应了教学目的的需要。例题有典型性与启发性,习题难易得当、类型多样,能适应不同的需要,特别是增加了一些有助于较高水平的学生提高分析与解决问题能力和创新能力的思考题。

在这里我们还要特别强调一下的是,虽然在兰州大学相关专业试用本套教材的本科生考研过关率有较大的提高,但是我们认为,在本科生教材的编写与使用上一定不要按照应试教育那一套去片面追求考研率。否则就会舍本求

末,高分低能,后患无穷。本套教材重在培养厚基础与高素质的人才,至于考研率的提高,只不过是一种水到渠成的副产品而已。我们希望并相信绝大多数使用本教材的本科生在毕业后能够实现考取研究生的愿望,而且是高分高能、后劲十足,将来能成为有较大作为的栋梁之材。

虽然本套教材的编写人员尽了最大的努力,但难免还会存在不足之处,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

兰州大学《高等数学》系列教材编审委员会

2009年7月于兰州大学

前 言

代数学是数学的一个重要的基础分支,随着科学技术的发展,代数学的重要性日益显现,它的许多内容已成为大学诸专业的基础课程,大学代数是高等数学教育的最基本最重要的内容之一.《高等数学》系列教材的线性代数部分是在吸收和借鉴国内外同类教材优点的基础上,根据教育部对非数学专业《线性代数》课程的新要求和教学任务,结合作者多年教授高等代数和线性代数的经验编写而成的.

线性代数是以讨论线性空间与线性变换理论为主的课程,它的主要内容包括:行列式、矩阵代数、线性方程组理论、线性空间(欧几里德空间)与线性变换、特征值与特征向量、矩阵对角化、二次型等.线性代数概念多、结论多,理论性、系统性和逻辑性强;一方面它包含有抽象的代数理论,另一方面它的系统而成熟的思想、方法在诸多领域都有广泛的应用.一本较适用的线性代数教材,一方面应当具有足够的理论深度,以满足现代自然科学和工程技术的需要;另一方面又应当尽可能由浅入深、由具体到抽象,使初学者感到学习线性代数并不太难,从而提高他们深入学习和掌握其基本理论和基本方法的信心.此外,一本好的线性代数教材还应该高质量、高水平的配套习题,通过做题可使读者对新概念、新理论从模糊而被动的了解转化为主动的掌握.

本教材正是基于上述认识编写而成的.在编写过程中,特别注重以下几个方面:

1. 注重教材的理论深度,注重学生的数学素质和数学能力,特别是创新能力的培养.成熟的思想方法来源于系统而成熟的理论.本教材包括了综合大学数学专业线性代数课程的绝大部分内容,在内容组织上也保持了数学专业教材应有的理论性和逻辑的严密性.必要的理论有利于以较高的观点揭示问题的本质,从而把散乱的问题统一化,把抽象的问题具体化,把复杂的问题简单化.读者只有系统地学习和掌握线性代数的基本理论,才能接触和体会其包含的代数学思想,才能理解和掌握线性代数的思想方法,并将其用于解决实际问题.在组织教材内容时,力求以提出问题、分析问题、解决问题的方式展开教学内容,引入思想,剖析方法,致力于培养学生分析问题、解决问题的能力;注重展示由具体到抽象的概括与总结,建立一般理论,再将理论用于解决实际问题的过程,致力于培养学生的创新能力.

2. 注重深入浅出, 通俗易懂. 考虑到非数学专业学生和非数学专业工作者的特点, 对于线性代数基本概念的引入, 坚持从几何(物理)背景和具体实例入手; 对基本结论的阐述尽可能详尽, 由浅入深, 由具体到抽象; 对于重要的概念和结论, 从多角度、多观点揭示它们的本质. 坚持难点分散的原则, 力求做到通俗易懂, 不使初学者望而生畏. 在读者理解和掌握了基本概念和方法后, 再逐步加深内容, 使之达到适当的理论深度. 同时, 还特别注重理论的背景和理论的应用, 显示了抽象的必要性和威力. 行文上尽力做到清楚明白, 通俗易懂, 使大学一年级的学生都能看懂, 即使自学也能掌握.

3. 精心组织配套的习题, 题型多样化, 涵盖面广. 每节后都附有足够的习题, 这些习题都是基本的, 对于理解和掌握线性代数的基本理论、基本思想和基本技能具有重要的作用. 每章后还附有一定数量的总复习题, 其中的部分题有一定的难度. 习题收录了国内外同类教材中部分具有启发性的习题以及近年来的部分考研试题. 习题的遴选力求做到既能激发读者的做题热情, 又使他们经过努力能够完成.

本书共六章, 教学内容按照 72 学时设计, 适合于非数学专业线性代数课程. 如果选作教材, 那么教师可以根据课时数以及学生的情况适当选取其中的一部分内容进行讲授. 例如, 课时数较少时, 可以简要介绍一般线性空间理论, 略去线性变换的有关内容. 书中加“*”的部分供读者参考, 可以略去不讲.

本书是在原兰州大学教务处处长、兰州大学《高等数学》系列教材编审委员会主任钟承奎教授的支持和鼓励下编写而成的. 在编写过程中, 得到了兰州大学数学与统计学院的领导和有关老师的支持和帮助. 雷鹏、杨东两位老师阅读了原稿并遴选、编写了习题; 赵敦教授、郑兵副教授仔细阅读了原稿, 尤传华教授、姚海元博士、雷鹏以及汪帆老师使用过它的初稿, 他们都提出很好的修改建议; 雷鹏老师、博士研究生张文婷、侯海龙参与了书稿的录入, 周宇斌教授提供了 $\text{\TeX}$ 等技术支持. 在此, 作者向他们表示诚挚的谢意. 同时, 本书的出版也得到了兰州大学教务处和兰州大学出版社的大力支持和帮助, 作者表示衷心的感谢.

限于作者水平, 书中难免有不妥之处, 敬请读者批评指正.

罗彦锋

2009年7月于兰州大学

目 录

前言	i
第一章 行列式	1
§ 1.1 数域和矩阵	1
习题 1.1	4
§ 1.2 二阶与三阶行列式	4
习题 1.2	8
§ 1.3 n 阶排列	9
习题 1.3	11
§ 1.4 n 阶行列式的定义	12
习题 1.4	17
§ 1.5 行列式的性质	18
习题 1.5	24
§ 1.6 行列式按行(列)展开	26
习题 1.6	38
§ 1.7 行列式的计算	39
习题 1.7	42
§ 1.8 克莱姆(Cramer)法则	44
习题 1.8	49
总复习题一	50
第二章 矩阵代数	55
§ 2.1 n 维向量	55
习题 2.1	58
§ 2.2 向量的线性相关与线性无关、向量组的秩	59
习题 2.2	69

§ 2.3 矩阵的运算	70
习题 2.3	84
§ 2.4 矩阵的初等变换及其等价标准形	85
习题 2.4	92
§ 2.5 矩阵的秩	93
习题 2.5	100
§ 2.6 可逆矩阵	100
习题 2.6	105
§ 2.7 分块矩阵及其应用	106
习题 2.7	112
§ 2.8 初等变换与初等矩阵	113
习题 2.8	120
总复习题二	122
第三章 线性方程组	128
§ 3.1 消元法	128
习题 3.1	132
§ 3.2 线性方程组有解判定定理	133
习题 3.2	137
§ 3.3 线性方程组解的结构	137
习题 3.3	147
总复习题三	149
第四章 线性空间与线性变换	155
§ 4.1 集合与映射	155
习题 4.1	160
§ 4.2 线性空间的定义及基本性质	161
习题 4.2	164
§ 4.3 维数、基与坐标	165

习题 4.3	174
§ 4.4 线性子空间	175
习题 4.4	182
§ 4.5 线性空间的同构	183
习题 4.5	187
§ 4.6 欧氏空间	188
习题 4.6	195
§ 4.7 标准正交基	196
习题 4.7	206
§ 4.8 线性变换及其运算	206
习题 4.8	211
§ 4.9 线性变换的矩阵	212
习题 4.9	220
§ 4.10 正交变换与对称变换	221
习题 4.10	224
总复习题四	225
第五章 特征值与特征向量、矩阵的对角化	229
§ 5.1 特征值与特征向量	229
习题 5.1	236
§ 5.2 矩阵的对角化	238
习题 5.2	243
§ 5.3 实对称矩阵的对角化	245
习题 5.3	249
总复习题五	250
第六章 二次型	255
§ 6.1 二次型及其矩阵表示	255
习题 6.1	260

§ 6.2 标准形	260
习题 6.2	271
§ 6.3 规范形	272
习题 6.3	276
§ 6.4 正定二次型与正定矩阵	276
习题 6.4	286
总复习题六	287
 参考文献	 291

第一章 行列式

解方程(组)是代数学的一个基本的,也是非常重要的内容,特别是在中学代数中,解方程(组)占有非常重要的地位.在中学代数中,我们已经学过用消元法求解一元、二元乃至四元的一类特殊的一次方程组,即所谓的线性方程组.线性方程组的理论不仅在数学学科中是重要的基本内容,而且在其它学科,如物理学、计算机科学、经济学、金融学等学科中都有广泛的应用.本章主要将中学代数中求解线性方程组的方法和结果推广到多元线性方程组的情形.对于这一类特殊的线性方程组的求解,行列式在其中占有非常重要的地位.为此,我们需要引入行列式的概念并得到有关行列式的一些基本结果.

关于一般线性方程组的研究将留待第三章进行,这里关于线性方程组的结果是一般线性方程组理论的基础.

§ 1.1 数域和矩阵

我们知道,数是数学的一个最基本的概念.自然界的许多“量”可以用数或数的推广形式来描述.例如一个数量的大小可以用数来表示;由平面解析几何的知识可知,平面上一个点(或向量)可用一个二元有序实数组刻画.不同的问题所涉及的数的取值往往有所限制或不同,根据所讨论的问题,我们常常需要明确规定所考虑的数的取值范围.以前我们碰到的数的范围有全体自然数、全体整数、全体有理数、全体实数和全体复数,像这些由数组成的集合常称为数集.我们知道任意两个整数的商未必是整数,也就是说,在整数范围内,除法并不总是可以进行,但是在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以进行.事实上,在有理数范围内,加、减、乘、除(除数不为零)四则运算总是可以进行,在实数和复数范围内也是如此.通常把关于数的加、减、乘、除等运算的性质称为数的代数性质.有时我们还会碰到一些与全体有理数、实数和复数具有某些公共代数性质的数集,为方便起见,我们引入数域的概念.

定义 1.1.1 设 F 是由包含 0 和 1 的复数组成的数集.如果 F 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 F 中的数,那么就称 F 为一个数域.

所有有理数组成的数集 $\mathbb{Q}$ 是一个数域,称为有理数域.所有实数的集合 $\mathbb{R}$ 和所有复数的集合 $\mathbb{C}$ 也都是数域,分别称为实数域和复数域.而所有整数的集

合 $\mathbb{Z}$ 不是数域, 因为并不是任意两个整数的商都是整数.

如果一个数集 P 中任意两个数关于某一运算的结果都在 P 中, 那么我们称数集 P 关于这一运算是封闭的. 于是, 数域就是关于数的四则运算(除法时除数不为零)封闭的包含 0 和 1 的数集.

例 1.1.1 数集

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

是一个数域.

证明 显然, $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 对任意的 $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 有

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

和

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

进一步, 若 $c + d\sqrt{2} \neq 0$, 则 c, d 不全为零, 且有

$$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} &= \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} \\ &= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

综上所述, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是一个数域.

例 1.1.2 所有形如

$$\frac{a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n}{b_0 + b_1\pi + \cdots + b_m\pi^m}$$

的数组成一个数域, 其中 m, n 为任意非负整数, a_i, b_j ($i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$) 都是整数. 留给读者自己验证.

定理 1.1.2 有理数域是最小的数域.

证明 只需证明任意数域必包含有理数域即可. 设 F 是任意一个数域. 则 $0, 1 \in F$. 因为 F 对加法和减法封闭, 所以对任意正整数 n , 有

$$n = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^n \in F$$

和

$$-n = 0 - n \in F.$$

于是 F 包含所有整数. 又因为 F 对除法封闭, 所以 F 包含所有的有理数.

以上我们建立了数域的概念, 今后在讨论问题时, 就可以限定所涉及的数是取自于某一个数域 F 中的数, 这些数经过四则运算后的结果仍然是数域 F 中的数.

矩阵是线性代数课程研究的中心内容, 将贯穿整个线性代数课程. 我们从第二章开始对矩阵进行系统的研究, 为方便起见, 本章首先引入矩阵的概念.

定义 1.1.3 设 F 是一个数域, m, n 是正整数, a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) 是数域 F 中的数. 称长方形数表, 通常用圆括号或方括号括起来

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为数域 F 上的一个 $m \times n$ 矩阵 (F -矩阵), 其中数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) 称为矩阵的元素, i 称为 a_{ij} 的行指标, j 称为 a_{ij} 的列指标. 显然元素 a_{ij} 在矩阵中的位置由其行指标和列指标确定.

通常我们用大写的英文字母表示一个矩阵, 用小写的英文字母表示矩阵的元素, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

相应地, 称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

为矩阵 A 的第 i 行和第 j 列; 称 m 和 n 分别为矩阵 A 的行数和列数. 因此一个 $m \times n$ 矩阵也称为一个 m 行, n 列的矩阵. 用 $m \times n$ 表示矩阵的型, 即它的行数和列数. 一个 $n \times n$ 矩阵, 即有相同行数和列数的矩阵, 称为 n 阶方阵, 或简称为方阵. 通常用下列符号表示矩阵:

$$A_{m \times n}, (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } (a_{ij}).$$

例 1.1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

为有理数域上的一个 2×3 矩阵 (2×3 有理矩阵).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 1+i & 1 & -3i \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为复数域上的一个 3 阶方阵 (3 阶复方阵).

习 题 1.1

1. 设 P 是至少含有两个数的数集. 若 P 中任意两个数的差及商 (除数不为零) 属于 P , 则 P 必为数域.

2. 判断下列数集是否为数域:

(1) $P_1 = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\};$

(2) $P_2 = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}, \mathbb{R} \text{ 是实数域}\};$

(3) $P_3 = \{\frac{m}{2^n} \mid m, n \text{ 都为整数}\};$

(4) $P_4 = \{a\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{Q}\};$

(5) $P_5 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$

§ 1.2 二阶与三阶行列式

本节我们将通过两个重要实例: 求平行四边形面积和解线性方程组, 引入二阶和三阶行列式.