COMPLÉMENTS
DE MATHÉMATIQUES
À L'USAGE DES
INGÉNIEURS DE L'ÉLECTROTECHNIQUI
ET DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
PAR
ANDRÉ ANGOT

内 容 提 要

本书主要是向从事电工、电信及其它弱电工程的读者介绍在一般工科数学分析教程中很少注意到，但在实际工作中又往往是十分需要的一些数学工具的书。全书共十章，内容包括：一、复变函数，二、傅里叶级数和傅里叶积分；三、矢量运算；四、矩阵计算；五、张量的基本概念及其应用；六、微分方程积分法；七、常用的特殊函数；八、运算微积；九、概率论及其应用；十、图解及数值计算。本书按一至六章和七至十章分成上下册出版。它要求读者应具备大学数学分析的基本知识。虽然本书的主要读者对象是电气科技人员，但是它对从事某些应用物理研究的读者来说也是很有用的。

电工、电信工程师数学

下 册

〔法〕安德烈·安戈 著
谢祥麟 陆志刚 译 曾德汲 校

*
人民邮电出版社出版
北京东长安街27号
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
*
开本：850×1168 1/32　1979年9月第一版
印张 21 4/32 页数：338 1979年9月北京第一次印刷
字数：554 千字 插页：1 印数 1—91,000 册
统一书号：15045·总2297-综206
定价：2.35元

目　录

第一类及第二类贝塞耳函数

运算法则

常用函数的变换式

反变换公式的应用

间断函数的象函数。应用

变换函数表

用傅里叶展开式的有限项作逼近。调和分析

第七章　常用的特殊函数

7.0.1. 渐近展开

考虑通常说来为发散的级数

$$a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

设 $S_n(z)$ 是前 $n+1$ 项的和。按照庞加莱（Poincaré）* 的证明，在一定的 arg z 变化区域内，如果表达式

$$R_n(z)=z^n\{f(z)-S_n(z)\}$$

满足条件　　$\lim_{|z|\to\infty}R_n(z)=0$ （n 固定），

甚至，这时如果有　$\lim_{n\to\infty}|R_n(z)|=\infty$（$z$ 固定），

则这个级数将代表函数 $f(z)$ 的一个渐近展开式。

我们写为　　$f(z)\approx a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$

按照渐近展开式的定义，由此可得，令 ε 为任意小的正数，对于充分大的 $|z|$（这时 n 为固定的）就有

$$|z^n\{f(z)-S_n(z)\}|<\varepsilon.$$

我们用一个例子来说明这类发散级数在对函数作数值计算时所显出的优点。

考虑由下式确定的函数 $f(x)$

$$f(x)=\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}dt,\quad x>0.$$

逐次作分部积分，

* H. Poincaré, «Acta mathematica» Ⅷ(1886) 第 295 页。

$$f(x)=\left[-\frac{1}{t}e^{x-t}\right]_x^{\infty}-\int_x^{\infty}t^{-2}e^{x-t}dt=\frac{1}{x}-\int_x^{\infty}t^{-2}e^{x-t}dt$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+2!\int_x^{\infty}t^{-3}e^{x-t}dt,$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-3!\int_x^{\infty}t^{-4}e^{x-t}dt=\cdots,$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+(-1)^{n+1}(n+1)!\int_x^{\infty}t^{-n-2}e^{x-t}dt.$$

如果我们考虑一个级数，它的前 $n+1$ 项的和是

$$S_n(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

我们有

$$|R_n(x)|=|x^n\{f(x)-S_n(x)\}|=x^n(n+1)!\int_x^{\infty}t^{-n-2}e^{x-t}dt.$$

因 $x>0$ 及 $t>x$，即有 $e^{x-t}<1$ 及 $|R_n(x)|<x^n(n+1)!\int_x^{\infty}\frac{dt}{t^{n+2}}=\frac{n!}{x}$。于是当 x 无限增长时，$R_n(x)$趋于零。因此，$S_n(x)$表示$f(x)$的渐近展开式的前 $n+1$ 项。

利用这个发散级数来计算 $f(10)$。一般项$(-1)^n n!/10^{n+1}$的绝对值先减小直到 $n=10$，然后增加到无穷大。

因此取 S_{10} 作为 $f(10)$的值，所产生的误差将小于

$$\frac{10!}{10^{11}}=0.0000362\cdots$$

S_n 的数值准确到小数后第六位列于下表，图 7-1 则表明了前 n 项和的减少及增加情况：

$S_0=0.1$	$S_{10}=0.091582\ldots$
$S_1=0.09$	$S_{11}=0.091543\ldots$
$S_2=0.092$	$S_{12}=0.091591\ldots$
$S_3=0.0914$	$S_{13}=0.091529\ldots$

$S_4=0.09164$

$S_5=0.091520$

$S_6=0.091592$

$S_7=0.091542..$

$S_8=0.091582..$

$S_9=0.091546..$

$S_{14}=0.091616..$

$S_{15}=0.091485..$

$S_{16}=0.091695..$

$S_{17}=0.091345..$

$S_{18}=0.091985..$

....

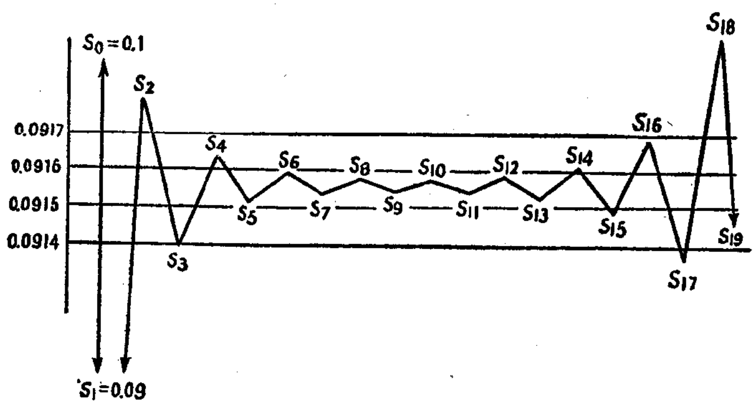

图 7-1

如果一个函数有一个渐近展开式，那末这个式一定是唯一的。事实上，在渐近式存在的条件下，依次地使 $n=1,2,\cdots$，即有

$$a_0=\lim_{|z|\to\infty}f(z),\quad a_1=\lim_{|z|\to\infty}z\{f(z)-a_0\},$$

$$a_2=\lim_{|z|\to\infty}z^2\left\{f(z)-a_0-\frac{a_1}{z}\right\},\cdots$$

反之，两个不同的函数可以有一个同样的渐近展开式。一个典型的例子是相差为 e^{-z} 其中 $\Re(z)>0$ 的两个不同的函数。事实上，用上述公式计算 e^{-z} 的渐近级数的展开式的系数全都等于零。

若两个函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 可以渐近展开为

$$f(z)\approx\sum_{n=0}^{\infty}a_n/z^n,\quad g(z)\approx\sum_{n=0}^{\infty}b_n/z^n,$$