

COMPLÉMENTS  
DE MATHÉMATIQUES  
À L'USAGE DES  
INGÉNIEURS DE L'ÉLECTROTECHNIQUE  
ET DES TÉLÉCOMMUNICATIONS  
PAR  
ANDRÉ ANGOT

内 容 提 要

本书主要是向从事电工、电信及其它弱电工程的读者介绍在一般工科数学分析教程中很少注意到,但在实际工作中又往往是十分需要的一些数学工具的书。全书共十章,内容包括:一、复变函数,二、傅里叶级数和傅里叶积分;三、矢量运算;四、矩阵计算;五、张量的基本概念及其应用;六、微分方程积分法;七、常用的特殊函数;八、运算微积;九、概率论及其应用;十、图解及数值计算。本书按一至六章和七至十章分成上下册出版。它要求读者应具备大学数学分析的基本知识。虽然本书的主要读者对象是电气科技人员,但是它对从事某些应用物理研究的读者来说也是很有用的。

电工、电信工程师数学

下 册

[法] 安德烈·安戈 著

谢祥麟 译

曾德汲 校

陆志刚 校

\*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

\*

开本: 850 × 1168  $\frac{1}{32}$  1979年9月第一版

印张 21  $\frac{4}{32}$  页数: 338 1979年9月北京第一次印刷

字数: 554 千字 插页: 1 印数 1—91,000 册

统一书号: 15045·总2297-综206

定价: 2.35元

# 目 录

<b>第七章 常用的特殊函数</b> .....	1
7.0.1. 渐近展开 .....	1
<b>7.1. 双曲线函数</b> .....	4
7.1.1. 定义 .....	5
7.1.2. 反函数 .....	6
7.1.3. 应用。布朗法。布朗台-肯涅利图 .....	7
7.1.4. 函数 $\operatorname{sh} x$ , $\operatorname{ch} x$ , $\operatorname{th} x$ 的图形 .....	9
7.1.5. 指数函数及双曲线函数表 .....	9
<b>7.2. 正弦积分函数及余弦积分函数</b> .....	10
7.2.1. 定义 .....	10
7.2.2. 幂级数展开 .....	11
7.2.3. 渐近级数展开 .....	12
7.2.4. 函数 $\operatorname{Si} x$ 及 $\operatorname{Ci} x$ 的图形 .....	12
7.2.5. $\operatorname{Si} x$ 及 $\operatorname{Ci} x$ 函数表 .....	13
7.2.6. 函数 $\operatorname{Ci} x$ 及 $\operatorname{Si} x$ 的极大值或极小值表 .....	15
<b>7.3. 误差函数</b> .....	16
7.3.1. 定义 .....	16
7.3.2. $\Theta(x)$ 的级数展开 .....	17
7.3.3. $1-\Theta(x)$ 的渐近展开 .....	17
7.3.4. $1-\Theta(x/2)$ 的柯西积分表达式 .....	18
7.3.5. $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 的数值表 .....	19
7.3.6. 函数 $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 的图形 .....	20
7.3.7. 菲涅耳积分 .....	20
<b>7.4. 阶乘函数</b> .....	22

7.4.1. 定义	22
7.4.2. 阶乘函数的性质	24
7.4.3. $\Gamma(z)$ 的一些值得注意的数值	26
7.4.4. 阶乘函数的对数导数	26
7.4.5. 用柯西积分表示阶乘函数	27
7.4.6. 第一类及第二类欧拉函数间的关系《倍加公式》	28
7.4.7. 函数 $y=\Gamma(x+1)$ 的图形	30
7.4.8. $\Gamma(1+x)$ 数值表	31
7.5. 贝塞耳函数	32

### 第一类及第二类贝塞耳函数

7.5.1. 第一类函数的求法	32
7.5.2. $J_\nu(z)$ 和 $J_{-\nu}(z)$ 间的关系	34
7.5.3. 第二类贝塞耳函数的求法	35
7.5.4. 递推公式	37
7.5.5. 应用递推公式计算某些积分	38
7.5.6. 洛美尔积分	40
7.5.7. 指标相差为整数的两个函数间的关系	42
7.5.8. 应用洛美尔积分把一个函数展开成贝塞耳函数的级数	43
7.5.9. 第一类及第二类贝塞耳函数在指标取特殊值时值得注意的形式。指标等于一个奇数的一半 $\nu=n+1/2$ 的情形	44
7.5.10. 应用于计算菲涅耳积分	46
7.5.11. 指标等于一个整数 $\nu=n$ 的情形	47
7.5.12. 用定积分表示 $J_\nu(z)$	49
7.5.13. 用柯西积分表示 $J_\nu(z)$	50
7.5.14. 加法公式	51
7.5.15. 第三类贝塞耳函数或汉克尔函数。定义	52
7.5.16. 渐近展开式	52
7.5.17. 贝塞耳函数的数字计算。例题	53
7.5.18. $z$ 值很大时贝塞耳函数的极限形式	54
7.5.19. 贝塞耳函数的零点	55
7.5.20. 曲线 $y=J_0(x), J_1(x), J_2(x), \dots$	56

7.5.21. 曲面 $z=f(x, y)=J_\nu(x)$ 及其说明 .....	57
7.5.22. 曲线 $y=J_{-1/2}(x), J_{-3/2}(x), \dots$ .....	61
7.5.23. 曲线 $y=Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x), \dots$ .....	61
7.5.24. 曲面 $z=f(x, y)=Y_\nu(x)$ .....	62

### 第一类及第二类变态贝塞耳函数

7.5.25. 第一类变态贝塞耳函数 .....	63
7.5.26. 第二类变态贝塞耳函数 .....	63
7.5.27. 渐近展开式 .....	64
7.5.28. 递推公式 .....	65
7.5.29. 各种公式 .....	65
7.5.30. 曲线 $I_0(x), I_1(x), \dots, K_0(x)$ 及 $K_1(x)$ .....	67

### 开耳文函数

7.5.31. 零阶开耳文函数 .....	68
7.5.32. $\nu$ 阶开耳文函数 .....	70
7.5.33. 用模及辐角表示开耳文函数 .....	70
7.5.34. 开耳文函数的导数 .....	71
7.5.35. 函数 $\text{ber}z, \text{bei}z, M_0(z), \theta_0(z)$ 的图形 .....	72

### 能化成贝塞耳微分方程的微分方程

7.5.36. 主要类型 .....	73
--------------------	----

### 应用贝塞耳函数的一些例子

7.5.37. 一端悬住的有重量的线的摆动 .....	77
7.5.38. 拉普拉斯方程所确定的某些运动的研究 .....	79
7.5.39. 均匀张紧膜的振动 .....	80
7.5.40. 圆形膜片的情形 .....	81
7.5.41. 回转圆柱形空腔的电磁固有振荡 .....	82
7.5.42. 电磁波在无穷长回转圆柱内部的传播 .....	87
7.5.43. 同轴波导情形 .....	89
7.5.44. 交流通过回转圆柱导体的趋肤效应 .....	91
7.5.45. 调频波的频谱 .....	93

### 贝塞耳函数的数值表

7.5.46. 函数 $J_0, J_1, Y_0, Y_1$ .....	98
---------------------------------------	----

7.5.47. 贝塞耳函数 $J_2, J_3, \dots, J_9$ .....	104
7.5.48. 贝塞耳函数 $J_{10}, J_{11}, \dots, J_{17}$ .....	105
7.5.49. 函数 $J'_n(z), J_n(z)$ 的前几个根值表 .....	106
7.5.50. 贝塞耳函数 $J_{1/2}, J_{3/2}, \dots, J_{13/2}$ .....	109
7.5.51. 贝塞耳函数 $J_{-1/2}, J_{-3/2}, \dots, J_{-13/2}$ .....	110
7.5.52. 函数 ber, bei, ker, kei 及它们的导数 .....	111
7.5.53. 函数 $M_0, \theta_0, M_1, \theta_1$ .....	116
7.5.54. 参考文献 .....	118
<b>7.6. 勒让德函数</b> .....	<b>118</b>
7.6.1. 引言 .....	118
7.6.2. 展开成幂级数 .....	119
7.6.3. 勒让德多项式 .....	122
7.6.4. 勒让德多项式的母函数 .....	122
7.6.5. 勒让德多项式举例 .....	125
7.6.6. 用定积分表示勒让德多项式。拉普拉斯公式 .....	126
7.6.7. 递推公式 .....	127
7.6.8. 罗德里吉公式 .....	128
7.6.9. 勒让德多项式的正交性 .....	129
7.6.10. 勒让德多项式的一些值 .....	131
7.6.11. 勒让德多项式的根 .....	132
7.6.12. 薛拉夫里积分 .....	132
7.6.13. 广义勒让德多项式。盖根包尔多项式 .....	132
7.6.14. 第一类勒让德函数 .....	133
7.6.15. 曲面 $y = P_\nu(\cos\theta)$ 的描绘 .....	136
7.6.16. 第一类勒让德函数的零点 .....	137
7.6.17. 递推公式 .....	138
7.6.18. 用柯西积分所定义的第一类勒让德函数 .....	139
7.6.19. 第二类勒让德函数。定义 .....	141
7.6.20. 用柯西积分所定义的第二类勒让德函数 .....	144
7.6.21. 勒让德关联函数 .....	145
7.6.22. 指标是正整数时的勒让德关联函数 .....	147

7.6.23. 递推公式 .....	150
7.6.24. 勒让德关联函数的正交性 .....	152
7.6.25. 勒让德关联函数的一些值 .....	153
7.6.26. 球面调和函数 .....	155
7.6.27. 第一类勒让德函数的图形 .....	156
7.6.28. 第二类勒让德函数的图形 .....	156
7.6.29. 前7个勒让德多项式的数表 .....	157
7.6.30. 第一类规格化勒让德关联函数的图形 .....	161
7.6.31. 应用。球形空腔的电磁振荡 .....	163
7.6.32. 参考文献 .....	166
7.7. 马修函数 .....	166
7.7.1. 整数指标的马修函数 .....	167
7.7.2. 整数指标马修函数的正交性 .....	168
7.7.3. 展开成傅里叶级数 .....	168
7.7.4. 特征方程 .....	170
7.7.5. 函数 $ce_m(z, q)$ 及 $se_m(z, q)$ 的性态 .....	171
7.7.6. 整数指标变态马修函数 .....	172
7.7.7. 任意 $a$ 及 $q$ 的马修函数 .....	172
7.7.8. 用贝塞耳函数的级数展开式 .....	175
7.7.9. 第二类马修函数 .....	176
7.7.10. 参考文献 .....	177
7.8. 韦伯-厄密特函数。厄密特多项式 .....	177
7.8.1. 韦伯-厄密特函数或抛物柱面函数 .....	177
7.8.2. 厄密特多项式 .....	180
7.8.3. 母函数及正交性 .....	182
7.9. 切贝雪夫多项式 .....	185
7.9.1. 定义 .....	185
7.9.2. $T_n(\omega)$ 及 $U_n(\omega)$ 的图形 .....	188
7.9.3. 切贝雪夫多项式的主要性质 .....	189
7.9.4. 切贝雪夫多项式的基本性质 .....	194
7.9.5. 应用 .....	196

7.10. 赫尔维茨多项式及正实函数 .....	201
7.10.1. 引言 .....	201
7.10.2. 赫尔维茨多项式系数的符号 .....	202
7.10.3. 赫尔维茨多项式偶部与奇部之比的性质 .....	202
7.10.4. 赫尔维茨多项式偶部与奇部之比的零点的性质 .....	203
7.10.5. 罗特-赫尔维茨准则 .....	204
7.10.6. 近似赫尔维茨多项式 .....	207
7.10.7. 正实函数 .....	208
7.10.8. 正实函数的极点与零点 .....	208
7.10.9. 正实函数的准则 .....	209
7.10.10. 参考文献 .....	213
7.11. 拉格尔多项式 .....	213
7.11.1. 定义 .....	213
7.11.2. 母函数 .....	214
7.11.3. 递推关系 .....	215
7.11.4. 拉格尔多项式的正交性 .....	216
7.11.5. 函数展开成拉格尔多项式的级数 .....	217
7.11.6. 广义的拉格尔多项式 .....	218
7.11.7. 参考文献 .....	220
<b>第八章 运算微积 .....</b>	<b>221</b>
8.1. 引言 .....	221
8.1.1. 应用范畴的限制 .....	221
8.1.2. 稳定状态的计算 .....	222
8.1.3. 瞬变状态的计算 .....	223
8.1.4. 单位阶跃函数 .....	224
8.2. 亥维赛电路理论 .....	225
8.2.1. 瞬变响应的定义。弗希定理 .....	226
8.2.2. 瞬变响应的计算 .....	228
8.3. 运算微积 .....	232
8.3.1. 拉普拉斯变换。卡生变换 .....	232

## 运算法则

8.3.2. 加法 .....	236
8.3.3. 比例尺的改变 .....	239
8.3.4. 函数 $h(t)$ 的导数 .....	241
8.3.5. 函数 $h(t)$ 的积分 .....	241
8.3.6. 变量 $p$ 的平移 .....	242
8.3.7. 函数 $h(t)$ 的平移 .....	242
8.3.8. 函数 $F(p)$ 的导数 .....	243
8.3.9. 函数 $F(p)$ 的积分 .....	244
8.3.10. 卷积定理或波莱尔定理 .....	244
8.3.11. 其他公式 .....	246
8.3.12. 亥维赛展开定理 .....	248
8.3.13. 展开定理在电路中的应用。直流情形 .....	249
8.3.14. 交流情形 .....	250
8.3.15. 重根的情形 .....	252

### 常用函数的变换式

8.3.16. 有理函数的原函数 .....	254
8.3.17. 整数阶贝塞耳函数的象函数 .....	256
8.3.18. $\ln t$ 的象函数 .....	260
8.3.19. 正弦及余弦积分的象函数 .....	260
8.3.20. 误差函数的象函数 .....	261
8.3.21. 单位脉冲的象函数 .....	263

### 反变换公式的应用

8.3.22. 梅林—傅里叶定理 .....	265
8.3.23. 应用反变换公式的注意点 .....	268
8.3.24. 亥维赛展开定理的推广 .....	273

### 间断函数的象函数。应用

8.3.25. 引言 .....	274
8.3.26. 非周期的间断函数的象函数 .....	275
8.3.27. 周期的间断函数的象函数 .....	277

### 变换函数表

8.3.28. 引言 .....	281
------------------	-----



8.3.29. 连续函数 .....	282
8.3.30. 间断函数 .....	289
8.4. 运算微积在电路中的应用 .....	292
8.4.1. 振荡回路 .....	293
8.4.2. 在具有两个耦合回路的系统中的应用示例 .....	296
8.4.3. 在起始时间电路并不处在平衡状态的情形 .....	301
8.4.4. 滤波电路 .....	302
8.4.5. 低通滤波器 .....	304
8.4.6. 高通滤波器 .....	307
8.4.7. 无失真低通滤波器 .....	308
8.4.8. 负反馈放大器。关于稳定的奈奎斯特判别准则。用极点位置的方法来判断稳定 .....	310
8.4.9. 由开关的断路或短接所引起的过渡现象的计算 .....	314
电扰动沿传输线的传播	
8.4.10. 概述 .....	318
8.4.11. 无穷长线或终端接特性阻抗的线路 .....	323
8.4.12. 无损耗线 .....	324
8.4.13. 无失真的线 .....	324
8.4.14. 地下电缆 .....	325
8.4.15. 完全绝缘的传输线 .....	325
8.4.16. 一般情形。任意的传输线 .....	327
8.4.17. 有限长的传输线 .....	329
8.4.18. 漏电及自感都可忽略的传输线(地下电缆)有一端短接的情形 .....	330
8.4.19. 终端接一个电阻的有限长的无损耗传输线 .....	332
8.4.20. 在起点有一个阻抗的情况 .....	335
8.4.21. 传输线中有障碍 .....	336
8.4.22. 热的传导 .....	337
8.5. 运算微积的数学应用 .....	340
8.5.1. 应用运算微积计算定积分 $\int_0^{\infty} h(t)dt$ , $\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t} dt$ , $\int_0^{\infty} t^n h(t)dt$ .....	340

## 应用运算微积解线性微分方程

8.5.2. 常系数线性微分方程 ..... 344

8.5.3. 代数变元系数的线性微分方程 [范德波尔方法] ..... 347

## 应用运算微积解某些积分方程

8.5.4. 线性积分方程 ..... 350

8.5.5. 非线性积分方程 ..... 352

8.5.6. 积分微分方程 ..... 353

8.5.7. 应用运算微积研究函数 ..... 354

8.5.8. 在求渐近级数展开式中的应用 ..... 359

8.6. 注 解 ..... 362

8.6.1. 关于亥维赛运算微积的注 ..... 362

8.6.2. 运算微积中的符号 ..... 364

8.6.3. 参考文献 ..... 365

**第九章 概率论及其应用** ..... 367

9.1. 随机变量 ..... 367

9.1.1. 概率的定义 ..... 367

9.1.2. 独立事件。概率的乘法定理 ..... 368

9.1.3. 互斥事件。概率的加法定理 ..... 369

9.1.4. 斯蒂林公式 ..... 370

## 分 布

9.1.5. 不连续分布 ..... 372

9.1.6. 连续分布 ..... 374

9.1.7. 特征函数 ..... 376

9.1.8. 两个随机变量的分布 ..... 377

9.1.9. 独立随机变量之和的特征函数 ..... 379

## 一些基本的分布规律

9.1.10. 二项律 ..... 380

9.1.11. 二项律的特征函数 ..... 382

9.1.12. 拉普拉斯公式。高斯分布律 ..... 384

9.1.13. 拉普拉斯—高斯律的特征函数 ..... 388

9.1.14. 贝尔努利定理 ..... 388

9.1.15. 关于二项律过渡到正态律的注 .....	389
9.1.16. 泊松分布律 .....	390
9.1.17. 泊松律的特征函数及矩 .....	391
9.1.18. 在自动电话问题中的应用 .....	392
9.1.19. 观察数据与理论概率分布的配合。格兰姆—却里尔 展开式 .....	401
9.1.20. 正态分布的特殊情形 .....	403
测量误差及最小二乘方	
9.1.21. 测量误差及正态分布 .....	405
9.1.22. 最小二乘方原理 .....	407
9.1.23. 误差的线性组合 .....	408
9.1.24. 综合测量的精确度 .....	409
9.1.25. 精确度参数的最可能值 .....	410
9.1.26. 观察的权 .....	412
9.1.27. 错误观察值的判别 .....	412
9.1.28. 函数的概差 .....	413
9.1.29. 经验公式 .....	413
9.2. 随机函数概念 .....	416
9.2.1. 随机函数概念导论 .....	416
9.2.2. 分布函数 .....	421
收敛问题	
9.2.3. 引言 .....	425
9.2.4. 贝尔努利意义下的收敛 .....	426
9.2.5. 概率收敛 .....	426
9.2.6. 均方收敛 .....	428
9.2.7. 殆必收敛 .....	431
平稳随机函数：稳态的研究	
9.2.8. 引言 .....	432
9.2.9. 二阶矩研究。定义 .....	434
二阶平稳随机函数的一般性质	
9.2.10. 相关函数 .....	436
9.2.11. 连续性。可导性 .....	438

9.2.12. 能谱 .....	441
9.2.13. 线性系统的能量传输 .....	448
9.2.14. 二阶相关函数研究中的不足之处 .....	453
拉普拉斯-高斯平稳随机函数。在散弹效应上的应用	
9.2.15. 概述 .....	455
9.2.16. 现象的时间关系 .....	460
9.2.17. 非线性系统中的起伏 .....	461
9.2.18. 计算受直流散弹效应影响的线性放大器输出端的相关函数 .....	464
9.3.1. 参考文献 .....	467
<b>第十章 图解及数值计算</b> .....	468
10.1. 代数及超越方程的解 .....	468
10.1.1. 图解 .....	468
10.1.2. 牛顿近似方法及比例近似方法 .....	469
10.1.3. 叠代法 .....	472
10.1.4. 两个联立方程的近似解法 .....	475
10.2. 代数方程的解 .....	480
10.2.1. 一个数的 $n$ 次根的数值解 .....	480
10.2.2. 三次及四次方程式的数值解 .....	481
10.2.3. 霍尔诺方案 .....	484
10.2.4. 列耳作图 .....	486
10.2.5. 拉格朗日法 .....	487
10.2.6. 格拉也夫-且达林法 .....	488
10.2.7. 巴尔斯托方法 .....	499
10.3. 函数之逼近 .....	501
用多项式逼近函数	
10.3.1. 引言 .....	501
10.3.2. 不规则分布的自变量。拉格朗日插值多项式 .....	502
10.3.3. 等差级数分布的自变量。差分表 .....	506
插值多项式	
10.3.4. 牛顿插值多项式 .....	509
10.3.5. 斯蒂林插值多项式 .....	512

10.3.6. 贝塞耳插值多项式 .....	514
10.3.7. 牛顿、贝塞耳、斯蒂林插值公式的应用范围 .....	516
10.3.8. 牛顿、斯蒂林及贝塞耳插值公式的误差上限 .....	517
10.3.9. 用由最小二乘方判据所确定的函数线性组合作逼近 .....	517
10.3.10. 用由最小二乘方判据所确定的多项式作逼近 .....	518
用傅里叶展开式的有限项作逼近。调和分析	
10.3.11. 按解析式给定的函数 .....	525
10.3.12. 经验函数 .....	526
10.3.13. 实用的计算步骤 .....	528
10.3.14. 用指数函数的线性组合逼近经验函数 .....	532
10.3.15. 切贝雪夫逼近法 .....	536
10.3.16. 关于函数逼近的附注 .....	539
10.4. 导数的数值计算 .....	540
10.5. 函数积分的数值计算 .....	543
10.5.1. 贝尔努利数 .....	543
10.5.2. 贝尔努利多项式 .....	545
10.5.3. 欧拉公式 .....	547
10.5.4. 梯形公式 .....	552
10.5.5. 辛普森公式 .....	553
10.5.6. 韦德尔公式 .....	555
10.5.7. 格雷果里公式 .....	556
10.5.8. 牛顿-柯脱斯、切贝雪夫、高斯方法 .....	558
10.5.9. 牛顿-柯脱斯法 .....	559
10.5.10. 切贝雪夫法 .....	562
10.5.11. 高斯法 .....	564
10.5.12. 牛顿插值多项式的使用 .....	566
10.5.13. 例外情形 .....	568
10.6. 微分方程的近似解 .....	570
10.6.1. 引言 .....	570
10.6.2. 一阶微分方程的近似解 .....	571
10.6.3. 泰勒级数法 .....	572

10.6.4. 亚当法 .....	574
10.6.5. 一个便捷的方法 .....	583
10.6.6. 龙格及库塔法 .....	585
10.6.7. 一阶微分方程组的近似解 .....	589
10.6.8. 泰勒展开法 .....	590
10.6.9. 牛顿降幂插值多项式法 .....	590
10.6.10. 皮卡尔方法 .....	592
10.7. 矩阵数值计算。应用 .....	595
10.7.1. 一个矩阵分解成两个三角矩阵的乘积 .....	595
10.7.2. 在求解一阶方程组方面的应用 .....	596
10.7.3. 三角矩阵的逆矩阵 .....	600
10.7.4. 一个矩阵的逆矩阵 .....	604
10.7.5. 分解成三角矩阵的特殊情况。对称矩阵的情况 .....	604
10.8. 微分方程的图解法 .....	607
10.8.1. 一阶微分方程。等斜线法 .....	607
10.8.2. 用曲率半径方法作二阶微分方程的图解 .....	611
10.9. 偏微分方程的数值解 .....	613
10.9.1. 平面问题 .....	613
10.9.2. 迴转问题 .....	618
10.10. 诺谟图 .....	620
10.10.1. 引言 .....	620
10.10.2. 定义 .....	620
10.10.3. 直线点列诺谟图 .....	623
10.10.4. 三条平行直线诺谟图 .....	624
10.10.5. 两条平行直线及一条曲线的诺谟图 .....	628
10.10.6. $N$ 形诺谟图 .....	630
10.10.7. 两条曲线及一直线的诺谟图 .....	631
10.10.8. $W$ 形诺谟图 .....	632
10.10.9. $Z$ 形诺谟图 .....	634
10.10.10. 三条曲线诺谟图 .....	634
10.10.11. 复合诺谟图 .....	635
索引 .....	636

# 第七章 常用的特殊函数

## 7.0.1. 渐近展开

考虑通常说来为发散的级数

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

设  $S_n(z)$  是前  $n+1$  项的和。按照庞加莱 (Poincaré)\* 的证明, 在一定的  $\arg z$  变化区域内, 如果表达式

$$R_n(z) = z^n \{f(z) - S_n(z)\}$$

满足条件

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} R_n(z) = 0 \quad (n \text{ 固定}),$$

甚至, 这时如果有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| = \infty$  ( $z$  固定),

则这个级数将代表函数  $f(z)$  的一个渐近展开式。

我们写为 
$$f(z) \approx a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

按照渐近展开式的定义, 由此可得, 令  $\varepsilon$  为任意小的正数, 对于充分大的  $|z|$  (这时  $n$  为固定的) 就有

$$|z^n \{f(z) - S_n(z)\}| < \varepsilon.$$

我们用一个例子来说明这类发散级数在对函数作数值计算时所显出的优点。

考虑由下式确定的函数  $f(x)$

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

逐次作分部积分,

\* H. Poincaré, «Acta mathematica» VII(1886) 第 295 页。

$$f(x) = \left[ -\frac{1}{t} e^{x-t} \right]_x^\infty - \int_x^\infty t^{-2} e^{x-t} dt = \frac{1}{x} - \int_x^\infty t^{-2} e^{x-t} dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + 2! \int_x^\infty t^{-3} e^{x-t} dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - 3! \int_x^\infty t^{-4} e^{x-t} dt = \dots,$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^\infty t^{-n-2} e^{x-t} dt.$$

如果我们考虑一个级数，它的前  $n+1$  项的和是

$$S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

我们有

$$|R_n(x)| = |x^n \{f(x) - S_n(x)\}| = x^n (n+1)! \int_x^\infty t^{-n-2} e^{x-t} dt.$$

因  $x > 0$  及  $t > x$ ，即有  $e^{x-t} < 1$  及  $|R_n(x)| < x^n (n+1)! \int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x}$ 。于是当  $x$  无限增长时， $R_n(x)$  趋于零。因此， $S_n(x)$  表示  $f(x)$

的渐近展开式的前  $n+1$  项。

利用这个发散级数来计算  $f(10)$ 。一般项  $(-1)^n n! / 10^{n+1}$  的绝对值先减小直到  $n=10$ ，然后增加到无穷大。

因此取  $S_{10}$  作为  $f(10)$  的值，所产生的误差将小于

$$\frac{10!}{10^{11}} = 0.0000362 \dots$$

$S_n$  的数值准确到小数后第六位列于下表，图 7-1 则表明了前  $n$  项和的减少及增加情况：

$S_0 = 0.1$	$S_{10} = 0.091582 \dots$
$S_1 = 0.09$	$S_{11} = 0.091543 \dots$
$S_2 = 0.092$	$S_{12} = 0.091591 \dots$
$S_3 = 0.0914$	$S_{13} = 0.091529 \dots$



$S_4 = 0.09164$	$S_{14} = 0.091616\dots$
$S_5 = 0.091520$	$S_{15} = 0.091485\dots$
$S_6 = 0.091592$	$S_{16} = 0.091695\dots$
$S_7 = 0.091542\dots$	$S_{17} = 0.091345\dots$
$S_8 = 0.091582\dots$	$S_{18} = 0.091985\dots$
$S_9 = 0.091546\dots$	$\dots\dots\dots$

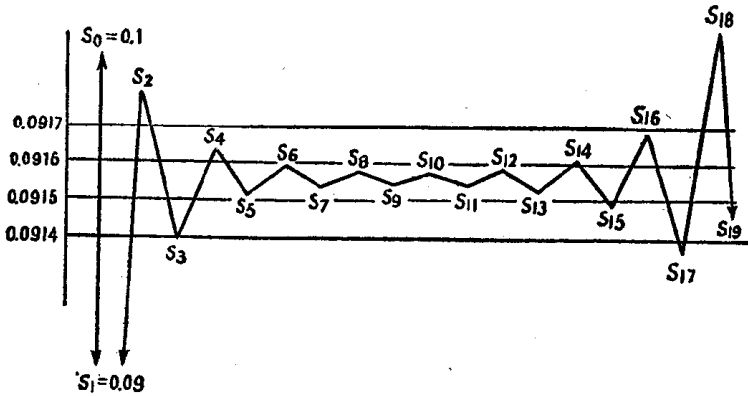


图 7-1

如果一个函数有一个渐近展开式，那末这个式一定是唯一的。事实上，在渐近式存在的条件下，依次地使  $n=1, 2, \dots$ ，即有

$$a_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z), \quad a_1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \{ f(z) - a_0 \},$$

$$a_2 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^2 \left\{ f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right\}, \dots$$

反之，两个不同的函数可以有一个同样的渐近展开式。一个典型的例子是相差为  $e^{-z}$  其中  $\Re(z) > 0$  的两个不同的函数。事实上，用上述公式计算  $e^{-z}$  的渐近级数的展开式的系数全都等于零。

若两个函数  $f(z)$  及  $g(z)$  可以渐近展开为

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n, \quad g(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n / z^n,$$