

高等学校理工科文化补习试用教材

初等数学

解析几何

北京市高等院校数学教材编写组编



教育出版社

07123
5.8-2

初等数学

(解 析 几 何)

北京市高等院校数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

中国青年出版社印刷厂印刷

*

1973年6月第一版 1973年9月第一次印刷

印数 1-210,000册

书号 13012·04 定价 0.54元

(只供学校内部使用)

编者的话

为了贯彻执行毛主席关于“走上海机床厂从工人中培养技术人员的道路”的指示，适应教育革命的需要，我们编写了《初等数学》作为理工科大学工农兵学员文化补习试用教材。

本书是在北京各院校文化补习教学实践的基础上编写的。编写大纲及初稿，曾得到部分学员和教师的评审。全书共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》。

编写过程中，我们试图打破书本与实践脱节、烦琐哲学的旧体系，联系三大革命的实际，突出基本规律及其辩证发展的线索，以便有助于培养学员分析问题和解决问题的能力。

本书的基本内容大体上反映了理工科各专业对初等数学的要求。由于各专业在教学要求和文化补习安排上有所不同，学员文化程度有差别，编写时，我们注意使本书能够适应上述不同情况。为此：

1. 列入了预备知识。初一程度的可以从预备知识开始学习，初二、三程度的可以从基本内容的有关章节开始学习。

2. 列入了选学内容，约占全书的四分之一。可以根据各专业教学的可能和不同的需要选用，也可供学员结合实践需要自学。

3. 基本内容中章节顺序可以适当变更。如在《初等代数》中，变数、坐标、图象和一次、二次函数是逐步出现的，到《三角函

数》中才概括为一般函数概念。但这些内容大都是独立成节的，因此也可以集中起来学。基本内容的深度也分了层次，以便在教学中取舍。

遵照毛主席关于“**要自学**”的指示，本书在基本规律的说明和例解方面比较详细，配置了较多的练习题，基本内容中各章有小结，每册末有总结。因此，本书也可作为具有高小毕业以上文化程度工农兵青年自学之用。

由于我们受思想水平、实践经验的局限，本书离“**教材要彻底改革**”的要求差距很大。定稿时间仓促，没有能够更广泛的征求意见，有些缺点，如篇幅还偏大，基本规律提炼不够，有的地方叙述流于琐细等问题，未能进一步解决。热烈欢迎使用本书的同志提出宝贵意见。

一九七三年六月

目 录

基 本 内 容

第一章 曲线和方程	1
第一节 距离和中点	2
距离公式.....	2
中点坐标.....	5
第二节 曲线的方程和方程的图形	8
求曲线的方程.....	8
作方程的图形.....	12
小结.....	15
第二章 直线	17
第一节 直线的方程	17
直线的倾角和斜率.....	17
求直线的方程.....	19
直线和一次方程.....	23
第二节 直线间的关系	27
平行、垂直条件.....	28
两直线的交点.....	31
点到直线的距离.....	34
两直线的夹角.....	36
小结.....	37
第三章 二次曲线	40
第一节 圆	40
圆的方程.....	40
平移变换.....	45

第二节 椭圆	48
椭圆的标准方程	49
椭圆的几何性质	52
第三节 双曲线	60
双曲线的标准方程	62
双曲线的几何性质	64
第四节 抛物线	73
抛物线的标准方程	74
抛物线的几何性质	75
小结	82
第四章 参数方程和极坐标	86
第一节 参数方程	86
第二节 极坐标	94
极坐标系	95
曲线的极坐标方程	96
螺线	98
极坐标和直角坐标的关系	102
小结	105
总结	108

选 学 内 容

I 二次曲线补充	111
第一节 二次曲线的光学性质	111
圆的切线方程	111
二次曲线的切线方程	113
二次曲线的光学性质	118
第二节 坐标变换	121
平移变换	121
旋转变换	122
二元二次方程的化简	127

第三节 二次曲线的统一方程	129
II 空间直角坐标、向量	135
第一节 空间直角坐标	135
第二节 空间向量	138
空间向量的坐标表示法	138
模和方向余弦	139
向量的运算	141
第三节 两向量的数量积	143
数量积的定义	143
数量积的性质	144
数量积的坐标表示	145
第四节 两向量的向量积	147
向量积的定义	147
向量积的性质	149
向量积的坐标表示	151
混合积	153
III 空间解析几何初步	158
第一节 平面	158
平面的点法式方程	158
平面的一般式方程	160
两平面的位置关系	162
点到平面的距离	164
第二节 直线	167
直线的点向式方程	167
直线的一般式方程	169
三平面间的关系	170
第三节 二次曲面介绍	175
球面	175
柱面	176
其他常见的二次曲面	176
空间曲线的方程	182

基本内容

第一章 曲线和方程

初等几何中讨论了直线和圆的性质。实际应用中，还常遇到其他的曲线。例如，行星运动的轨道是椭圆，抛射体运动的轨道是抛物线，凸轮的轮廓线有的是螺线等。研究直线和圆以外的曲线，初等几何的方法就不够用了。实践中分析物体运动的规律，引进用坐标确定位置的方法，从而产生了解析几何。

在初等代数中已经学过，数轴上的点和实数之间有一一对应关系；在直角坐标系中，平面上的点和实数对 (x, y) 之间有一一对应关系。因而数轴上一个定点可以用一个实数表示，平面上一个定点 P_0 可以用一对实数 (x_0, y_0) 表示(图 1-1)。

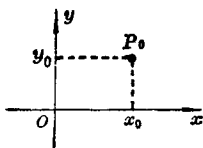


图 1-1

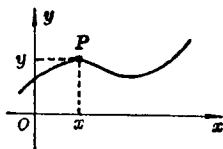


图 1-2

曲线可以看作是动点按照某种规律运动的轨迹(图 1-2)，曲线上动点 P 的坐标 x 和 y 是一对变量，它们应该满足一定的关系。这种关系用代数方法表示出来，就是包含 x, y 两个变量的一个二元方程。因此，对于曲线性质的研究，就可以转化为对相应的代数方程的讨论。

简单说，解析几何就是用代数方法研究几何图形性质的学

科。它是在初等几何和初等代数的基础上，通过坐标系把两者结合而发展起来的。

这一章讨论两个基本问题：如何利用坐标表示基本的几何量——线段长度；在坐标系中曲线和方程的关系。

第一节 距离和中点

线段长度是一种基本几何量。因此，在用坐标法研究几何图形之前，先讨论利用坐标研究线段长度的方法。重点是计算两点间的距离和求中点坐标的方法。

距 离 公 式

物体的位移是既有大小又有方向的量。在解析几何中，表示这种有大小又有方向的量用有向线段。如图 1-3，设物体在 ox 轴上作直线运动，它由 A 点到 B 点

的位移，用有向线段 AB 表示；由 B 点到 A 点的位移，用有向线段 BA 表示。

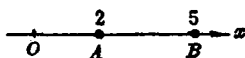


图 1-3

这两个位移大小相等、方向相反。因此，有向线段 AB 和 BA 也是大小相等、方向相反的量。

在数轴上的有向线段，可以用数量来表示。如图 1-3，在 ox 轴上的有向线段 AB ，它的大小就是有向线段的长度，即 3 个单位，它的方向和 ox 轴的方向相同，我们用正数表示，即

$$AB = +3.$$

有向线段 AB 的大小和方向由 $+3$ 这个数完全表示出来了。同样，有向线段 BA 的长度也是 3，但方向和 ox 轴相反，用负数表示，即

$$BA = -3.$$

因此, 有向线段 AB 和 BA 有如下的关系:

$$AB = -BA.$$

既表示了有向线段的大小、又表示了有向线段方向的数, 叫做有向线段的数量.

解析几何中的线段, 常指有向线段. 对于有向线段, 要注意两个字母的次序. 写在前面的字母表示有向线段的起点, 写在后面的字母表示有向线段的终点.

在数轴上, 有向线段 AB 的数量和 A, B 两点的坐标有密切的关系. 它恰好等于终点 B 的坐标减起点 A 的坐标, 如图 1-3, 有

$$AB = 5 - 2 = +3.$$

同样, BA 的数量恰好等于终点 A 的坐标减起点 B 的坐标, 即

$$BA = 2 - 5 = -3.$$

一般地说, 如果在 ox 轴上, A 点的坐标是 x_1 , B 点的坐标是 x_2 (图 1-4), 那么

$$AB = x_2 - x_1, \quad (1)$$

$$BA = x_1 - x_2.$$

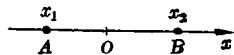


图 1-4

自己分析一下, 不论 A, B 两点在 x 轴上的位置如何, (1) 式都成立.

有向线段 AB 的长度, 用 $|AB|$ 表示, 也叫做 A, B 两点的距离. $|AB|$ 不是负数. 如图 1-4,

$$|AB| = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

显然,

$$|AB| = |BA|.$$

(1)、(2) 是数轴上 AB 的数量和长度的计算公式.

在平面上, 如果一条有向线段和坐标轴平行, 它的数量仍旧

可以用这条有向线段的两个端点的坐标表示出来。如图 1-5, 有向线段 AB 的方向和 x 轴相同, 它的数量为

$$AB = x_2 - x_1, (>0)$$

而有向线段 BA 的方向和 x 轴相反, 它的数量为

$$BA = x_1 - x_2, (<0)$$

同样, 有向线段 CB 和 BC 是平行于 y 轴的, 方向一正一反, 它们的数量为

$$CB = y_1 - y_2, (>0)$$

$$BC = y_2 - y_1, (<0)$$

当然, 从有向线段的长度看, 总有

$$|AB| = |BA|,$$

$$|CB| = |BC|.$$

现在来讨论平面上任意两点间的距离。

设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上任意两个定点, 如图 1-6, 求 P_1, P_2 两点间的距离。

如图, 过 P_1, P_2 分别作 x 轴、 y 轴的平行线, 相交于 Q , 那么 Q 点的坐标是 (x_2, y_1) 。 $\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形, 根据勾股定理, 有

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

$$\therefore |P_1Q|^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2, \quad (\text{为什么?})$$

$$|QP_2|^2 = |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2,$$

$$\therefore |P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

于是得到计算 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点间距离的公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3)$$

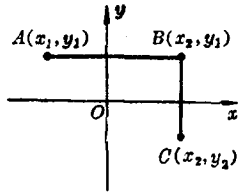


图 1-5

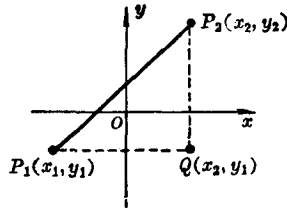


图 1-6

特别是,平面上任一点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的距离

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

问: 如果 P_1, P_2 在平面上的其他位置, (3)式还对不对? 为什么?

例 冲制如图 1-7 所表示的零件时, 需要知道三孔中心的距离. 已知三孔中心的坐标是 $A(-2, 4)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(-5, 0)$, 求三孔中心的距离.

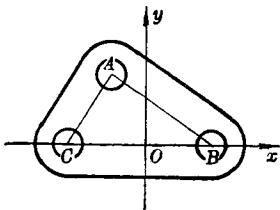


图 1-7

解: 根据距离公式,

$$|BA| = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{52} = 7.21,$$

$$|AC| = \sqrt{[-5-(-2)]^2 + (0-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

至于距离 $|CB|$, 由图显然有

$$|CB| = 4 - (-5) = 9.$$

中 点 坐 标

已知两点的坐标, 怎样求这两点连线中点的位置呢? 在解析几何中, 求一个点的位置, 就是求这点的坐标.

已知 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 求 P_1, P_2 连线中点 M 的坐标 (x, y) .

如图 1-8, 过 P_1, M, P_2 分别作平行于坐标轴的直线, 它们和坐标轴的交点分别是 P'_1, M', P'_2 和 P''_1, M'', P''_2 .

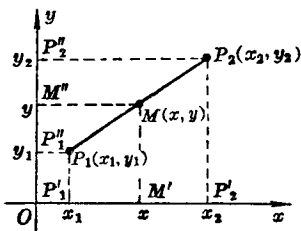


图 1-8

由于 M 是 P_1, P_2 连线的中点, 根据平行截割定理可以知道, M' 是 P_1P_2 的中点. 在 x 轴上, P_1M' 和 $M'P_2$ 的数量相等, 即

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

$$\therefore x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

类似地, 有

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

于是知道, 中点坐标是两端点坐标的平均值, 即

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

例 1 已知 $P_1(2, -2)$ 和 $P_2(-5, 3)$ 两点, 求 P_1, P_2 连线中点 M 的坐标(图 1-9).

$$\text{解: } x = \frac{2 + (-5)}{2} = -1.5,$$

$$y = \frac{-2 + 3}{2} = 0.5.$$

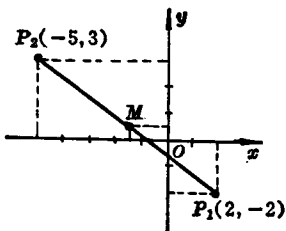


图 1-9

所以 P_1, P_2 连线的中点 M 的坐标是 $(-1.5, 0.5)$.

例 2 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(3, 7)$ 、 $B(5, -1)$ 、 $C(-2, -5)$, 求中线 CD 的长度(图 1-10).

解: 先求 AB 边中点 D 的坐标 (x, y) . 用中点坐标公式(5), 得

$$x = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y = \frac{7+(-1)}{2} = 3.$$

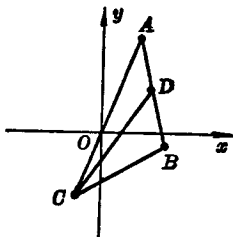


图 1-10

再用距离公式(3), 得

$$|CD| = \sqrt{[4 - (-2)]^2 + [3 - (-5)]^2} = \sqrt{100} = 10.$$

例3 设在 $P_1(1, 2)$ 点和 $P_2(7, 5)$ 点处分别有质点, 各重 5 克和 15 克, 求这两个质点的重心的坐标.

解: 如图 1-11, 两质量对于重心 G 的力矩应该相等, 即

$$5|P_1G| = 15|GP_2|.$$

$$\therefore \frac{|P_1G|}{|GP_2|} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1},$$

即重心 G 将 P_1, P_2 的连线分成两段, 其比为 3:1.

设 G 点横坐标为 x . 如图, 应有 $P_1'G' = 3G'P_2'$, 即

$$x - 1 = 3(7 - x).$$

解得

$$x = \frac{22}{4} = 5.5.$$

同法可得 G 点的纵坐标

$$y = \frac{17}{4} = 4.25.$$

结果求得, 所给两质点的重心在 $G(5.5, 4.25)$ 点处.

问: 设有 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点, $P(x, y)$ 点把 P_1, P_2 连线分成

两段的比 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$, 试推导求 P 点坐标的公式:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

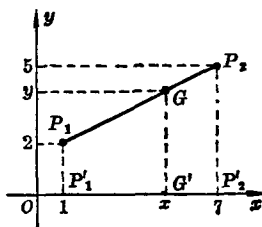


图 1-11

习 题

1. 在直角坐标系中描出下列各点:

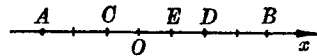
$$(1, 3), \quad (1, -3), \quad (-1, 3), \quad (-1, -3), \\ (0, 4), \quad (0, -4), \quad (4, 0), \quad (-4, 0).$$

2. 平面上两个点的连线被 x 轴(或 y 轴)垂直平时, 说这两点对称于 x 轴(或 y 轴); 两个点的连线以原点 O 为中点时, 说这两点对称于原点. 设有一点为 $P(x, y)$, 求和 P 点关于 x 轴、 y 轴、原点对称的点的

坐标，并指出第1题中各点的对称性。

3. 如图， x 轴上每一格等于一个单位

长度，写出有向线段 AB 、 BC 、 CD 、



DE 、 EA 的数量和长度。

(第3题)

4. y 轴上 A 、 B 两点的纵坐标分别是 y_1 和 y_2 ，设
- (1) $y_1=8$, $y_2=6$; (2) $y_1=5$, $y_2=-3$;
(3) $y_1=-4$, $y_2=0$; (4) $y_1=-9$, $y_2=-11$.
- 求 AB 、 BA 和 $|AB|$ 。
5. 正方形的边长为5，以两条对角线为坐标轴，写出四个顶点的坐标。
6. 一个质点从 $A(-3, 2)$ 点到 $B(4, 5)$ 点作直线运动，求它经过的距离。
7. 求证：以 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(1, 7)$ 为顶点的三角形是直角三角形。
8. 在 x 轴上有一点 P ，它和 $A(1, -3)$ 点的距离等于5，求 P 点的坐标。
9. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a, 0)$ 、 $B(a, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3}a)$ ，求证这个三角形是等边三角形。
10. 三角形的三个顶点是 $A(2, 1)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(0, -1)$ ，求三条中线的长。
11. 连结 $P_1(2, y)$ 和 $P_2(x, 6)$ 两点的线段的中点是 $P(3, 2)$ ，求 x 和 y 。
12. 设有 $P_1(-2, 4)$ 和 $P_2(5, 3)$ 两点， P 点在 P_1P_2 的延长线上，且 $|P_1P|=2|P_2P|$ ，求 P 点的坐标。

第二节 曲线的方程和方程的图形

在解析几何里，我们总是把曲线看作是动点按照一定规律运动的轨迹。

在直角坐标系中，由于动点 P 可以用一对变量 x 和 y 表示，曲线(动点运动的轨迹)就可以用包含 x 、 y 两个变量的一个代数方程来表示。下面就来讨论这个问题。

求曲线的方程

我们通过几个具体例子，搞清楚曲线方程的概念，学会求曲

线方程的方法.

例 1 设有一个圆, 圆心在 O 点, 半径等于 r . 在直角坐标系中, 用包含 x, y 两个变量的一个方程表示这个圆.

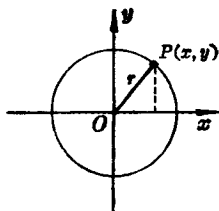


图 1-12

解: 以 O 点为坐标原点, 选定坐标系如图 1-12.

在圆上取一动点 P , 设它的坐标为 (x, y) . 动点 $P(x, y)$ 按照什么规律运动就形成圆形呢? 我们知道, 圆上各点到圆心 O 的距离都等于半径 r , 而到圆心的距离等于 r 的点都在这个圆上. 这就是 $\odot O$ 上各点所具有的共同性质, 也是动点 $P(x, y)$ 在 $\odot O$ 上运动时所遵循的规律.

这个规律表明, 无论动点 P 在圆上什么位置, 总有

$$|OP| = r,$$

而

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

因此有

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r. \quad (1)$$

现在来分析 $\odot O$ 和方程(1)的关系:

$\odot O$ 上任何一点 P 的坐标 (x, y) 都满足这个方程, 而且所有满足这个方程的 (x, y) 所对应的点都在 $\odot O$ 上. 因此, 我们把方程(1)叫做是 $\odot O$ 的方程.

为了运算的方便, 把(1)式两端平方, 得

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

这就是经常用的圆心在坐标原点、半径为 r 的圆的方程.

通过这个例子, 我们可以进一步明确曲线的方程的概念.

设有一条曲线和一个含有 x, y 两个变量的方程, 如果:

(1) 曲线上所有点的坐标 (x, y) 都满足这个方程,
(2) 所有满足方程的 (x, y) 所对应的点,都在这条曲线上,
那么, 这个方程就叫做这条曲线的方程,而这条曲线就叫做这个方程的图形.

注意,所谓曲线的方程,有两层意思:

第一,只要是曲线上的点,它的坐标都要满足这个方程,无一例外;

第二,凡是满足方程的 (x, y) 所对应的点,都要在这条曲线上,一个也不能少.

在例 1 中,方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 是圆心在原点,半径为 r 的圆的方程.大家按上面两条检验一下,看是不是都符合.

怎样求曲线的方程呢?从例 1 可以看到,步骤如下:

- (1) 建立坐标系;
- (2) 把曲线看作动点按照一定规律运动而成的图形,找出动点遵循的规律;
- (3) 设曲线上动点的坐标为 (x, y) ,把曲线上动点遵循的规律,用动点的坐标 x, y 表示出来,就是曲线的方程;
- (4) 进行必要的化简.

数学中,把按照一定规律运动的点形成的图形,叫做这个动点的轨迹.因此,一条曲线可以看作是具有一定性质的点的轨迹.例如,圆是到一点(圆心)距离等于定长(半径)的点的轨迹.说一条曲线是具有一定性质的点的轨迹,也是有两层意思:第一,曲线上的点都具有这个性质;第二,具有这个性质的点都在这条曲线上.

例 2 已知平面上 $A(6, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 两点,如图 1-13,求距离 A, B 等远的点的轨迹的方程.

解:这是已给定坐标系的情况.设 $P(x, y)$ 是距离 A, B 两