高等学校“十一五”规划教材

大学物理[上]

Daxue Wuli

主编　赵军良　张动天

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

大学物理

（上册）

主　编　赵军良　张动天
副主编　李卫彬　刘振深　杜保立

中国矿业大学出版社

内容简介

本书是根据教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神编写的。全书除了包括传统的基础物理内容以外，尝试把物理学发展的前沿引入物理教学，力求扩大学生的知识面，让他们了解物理学的进展，以加强学生思维能力的培养，提高学生的物理素质。

全书分上、下两册。上册包括力学、气体动力学理论、热力学和电学；下册包括磁学、光学和近代物理基础。

本书可作为高等工科院校各专业的物理教材，也可作为综合大学和师范院校非物理专业的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理. 上/赵军良，张动天主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2006.1

ISBN 7-81107-233-5

Ⅰ.大… Ⅱ.①赵…②张… Ⅲ.物理学—高等学校—教材 Ⅳ.O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第144408号

书　　名　大学物理(上)
主　　编　赵军良　张动天
责任编辑　耿东锋
责任校对　周俊平
出版发行　中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008）
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com
排　　版　中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷　江苏淮阴新华印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　787×1092 1/16　**本册印张** 22.75　**本册字数** 565千字
版次印次　2006年1月第1版　2006年1月第1次印刷
总 定 价　50.00元

前　言

本书是为高等工科院校编写的物理教材。在编写过程中，我们参照了原国家教委颁布的《高等工业学校大学物理课程教学基本要求》，结合近几年来物理教学改革和教材建设的新经验、新思想，力求体现下列原则：

一、避免与中学物理内容的重复，适当提高教学要求的起点。

二、在确保教育部工科大学物理课程指导委员会制定的基本要求的基础上，把物理学发展的前沿，引入物理教学。

三、突出物理学的工程应用性质，力图使学生通过学习，认识到物理学在现代科学、工程技术、国民生产、社会与日常生活等广阔领域内深刻而持久的影响力和渗透力，由此唤起他们的工程意识和应用观念。

四、参照了国家技术监督局于1993年12月27日发布的国家标准——量与单位(GB 3100～3102—93)，对以往教材中的非标准化内容做了修改，规范了物理学名词、术语、单位和符号。

本书第一、二章由刘振深执笔，第三章由凡瑞霞执笔，第四、五章由李凤云执笔，第六、七章由赵军良执笔，第八章由王学立执笔，第九章由曹伟涛执笔，第十章由王永强执笔，第十一章由苏丽执笔，第十二章及附录由李旭升执笔，第十三章由王时茂执笔，第十四、十六章由杜保立执笔，第十五章由张二磊执笔，第十七章由崔燕岭执笔，第十八、十九章由张动天执笔，第二十一章由李卫彬执笔，第二十、二十二章及习题答案由王晓雪执笔，第二十三、二十四章由薛中会执笔。第二十五、二十六章由左小刘执笔。本书上册由赵军良统编定稿，下册由张动天统编定稿。

本书的编写得到了王怡录、叶则业、范修道、王六合、关荣锋、张智、张培峰、赵鸿图、李宝华的大力协助和支持，在此谨致以衷心的感谢。

限于编者的学识和水平，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

主　编

2005年10月

目　录

第一章　质点运动学

在各种形态的物质运动中，最简单的一种是物体位置随时间的推移而变动。宏观物体之间（或物体内各部分之间）的相对位置变动，例如，各种交通工具的行驶、机器的运转、大气和河水的流动、天体的运行等，称为机械运动。

力学的研究对象是机械运动。经典力学研究的是在弱引力场中宏观物体的低速运动。通常把力学分为运动学、动力学和静力学。运动学只描述物体的运动，不涉及引起运动和改变运动的原因；动力学则研究物体的运动与物体间相互作用的内在联系，静力学研究物体在相互作用下的平衡问题。

本章主要讲述如何描述质点的运动，其主要内容为位置矢量、位移、速度和加速度，以及质点的运动方程、切向加速度和法向加速度、圆周运动、相对运动等。

第一节　参考系　坐标系　质点　时间

一、参考系　坐标系

在自然界中，一切物质都处于永恒不息的运动之中。大到星系，小到原子、电子，无一不在运动。以地球来说，地球不仅在自转，而且以 3×10^4 m/s 的速率绕太阳公转，太阳则以 2.5×10^5 m/s 的速率绕银河系的中心旋转，银河系在总星系中旋转，而总星系又在无限的宇宙中运动。无论从机械运动来说，还是从其他运动形式来说，自然界中的一切物质都是运动的，运动是物质的固有属性，运动是物质存在的形式，物质运动存在于人们意识之外，运动和物质是不可分割的，这便是运动本身的绝对性。描述物体的运动总是相对于其他物体而言的，如观察行驶着的汽车的位置变化，通常是以地面上某一物体（如树木）为标准，把它看成是不动的；同样，观察轮船的航行，常用河岸上的树木、码头或灯塔作为标准。这些作为研究物体运动时所参照的物体（或彼此不做相对运动的物体群），称为参考系。

显然，所选取的参考系不同，对同一物体的运动的描述就会不同。例如，在匀速前进的车厢中的自由落体，如果以车厢为参考系，是做直线运动；但如果以地球为参考系，却是做抛物线运动。因此，同一物体的运动，对不同的参考系，可以作不同的描述。这一事实，称为运动描述的相对性。一般说来，研究运动学问题时，只要描述方便，参考系可以随意选择。但是在考虑动力学问题时，选择参考系就要慎重了，因为一些重要的动力学规律（如牛顿三定律）只对某类特定的参考系（惯性系）成立。

为了把物体在各个时刻相对于参考系的位置定量地表示出来，还需要在参考系上选择适当的坐标系。最常用的坐标系是直角坐标系，例如要描述室内物体的运动，可以选择房间的某一角为坐标原点，以墙壁和墙壁以及墙壁和地板的交线为坐标轴，这就构成一个直角坐标系。有时也选用极坐标系，例如研究地球的运动时，可以选太阳为坐标原点，而坐标轴则指

向某个恒星。坐标系实质上是由实物构成的参考系的数学抽象，在讨论运动的一般性问题时，人们往往给出坐标系而不必具体地指明它所参照的物体。

二、质点

在物理学中，为了突出研究对象的主要性质，可以暂不考虑一些次要的因素，经常引入一些理想化的模型来代替实际的物体。“质点”就是一个理想化的模型。

在研究机械运动时，物体的形状和大小是千差万别的。对有些场合（如落体受到空气的阻力问题），物体的形状和大小是重要的；但在很多问题中，这些差别对物体运动的影响不大，若不涉及物体的转动和形变，我们可暂不考虑它们的形状和大小，把它们当做一个具有质量的点（即质点）来处理。例如，人们常把单摆的摆球、在电场中运动的带电粒子等当做质点。又如，同是地球，在研究它绕日公转时，可以将它看做质点；在研究它的自转问题时，就不能把它当做质点处理了。此外，当我们研究一些比较复杂的物体（如刚体、流体）运动时，虽然不能把整个物体看成质点，但在处理方法上可把复杂物体看成由许多质点组成，在解决质点运动问题的基础上来研究这些复杂物体的运动。

三、时间　时刻

时间是各事件发生的先后次序所组成的序列。任何物质运动都是在时间和空间中进行的。运动不能脱离空间，也不能脱离时间。时间本身具有单方向性的特点。

在运动学中，除时间外，还时常用到时刻的概念。在一定的参考系中考察质点的运动时，与质点所在某一位置相对应的为某一时刻，与质点所走某一段路程相对应的则是某一段时间。例如，火车从北京开出的瞬间，表示某一时刻；火车从北京开到上海，所经历的是一段时间。又如钟表上指针所指的某一位置表示某一时刻，两个不同位置表示两个不同的时刻，而两个时刻的间隔就表示一段时间。

应当注意，1 s 末和 2 s 初实际上是指同一个时刻，表示为 $t=1\ \mathrm{s}$；第 2 s 则是指 2 s 初到 2 s 末之间的一段时间间隔。

第二节　质点运动的描述

一、位置矢量

定量地描述质点的位置，必须在选定的参考系上建立坐标系。通常采用直角坐标系，如图 1-1所示。描述空间任一质点 P 的位置，可以从原点向 P 点引一有方向的线段 $\boldsymbol{r}$（即图中的 $\overrightarrow{OP}$），$\boldsymbol{r}$ 叫做位置矢量，也叫位矢（或径矢）。位矢的端点就是质点的位置。位矢在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影（即坐标）分别为 x，y 和 z。因此，位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x，y，z 轴的单位矢量，位置矢量的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位置矢量的方向余弦可由下式确定

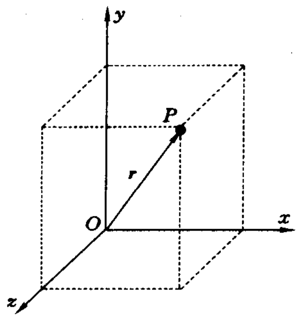

图 1-1　位置矢量

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

式中，α，β 和 γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴之间的夹角。

所谓运动，实际上就是位置随时间的变化，即位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 为时间 t 的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

式(1-2)叫做质点的运动方程。

当质点在选定的 xOy 平面内运动时，运动方程可简化为两个标量函数式

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$

如果质点沿一直线运动，则运动方程可简化为一个标量函数式

$$x=x(t)$$

质点运动时在空间中运动所经过的路径叫做轨道。例如，质点在 xOy 平面上运动。从运动方程中消去时间 t，就得到

$$y=f(x)$$

或

$$x=f(y)$$

这就是质点平面运动的轨道方程。

二、位移

如图 1-2 所示，图中曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 是质点轨道的一部分。在时刻 t 质点在 A 点处，在时刻 $t+\Delta t$，质点已到达 B 点处，A，B 两点的位置矢量分别用矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 来表示。在 Δt 时间内，质点位置的变化可以用从 A 点到 B 点的有向线段 $\Delta\boldsymbol{r}$（或 $\overrightarrow{AB}$）来表示，叫做质点的位移矢量，简称位移，且

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{1-3a}$$

由式(1-1)，可将 A，B 两点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 分别写成

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

于是，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 亦可写成

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1-3b}$$

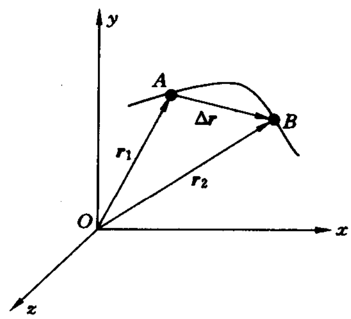

图 1-2　位移矢量

应当注意，位移是描述质点位置变化的物理量，它只表示位置变化的实际效果，并非质点所经历的路程。如在图 1-2 中，曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 是质点实际运动的轨迹。轨迹的长度为质点所经历的路程，而位移则是 $\Delta\boldsymbol{r}$。当质点经一闭合路径回到原来的起始位置时，其位移为零，而路程则不为零。所以，质点的位移和路程是两个完全不同的概念。

三、速度

说明质点在某一时刻的运动状态，仅知道它在坐标系中的位置是不够的，还必须知道质

点的位置变化情况，即质点运动的快慢和方向。而表述质点运动快慢和方向的物理量是速度。因此，在力学中只有当质点的位置矢量和速度同时被确定时，质点的运动状态才完全确定。

如图 1-2 所示，在时间 $\Delta t(=t_2-t_1)$ 内质点的位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$，我们把位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与时间 Δt 之比，称为质点在时间 Δt 内的平均速度，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-4a}$$

用直角坐标表示为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{1-4b}$$

平均速度是个矢量，其大小等于位移的大小和所经历的时间之比，其方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同。

一般来说，平均速度(包括大小和方向)与所取的时间长短有关。所以，在谈到平均速度时，必须指出是在哪一段时间内的平均速度。

因为平均速度只反映一段时间内位移的平均变化，所以用平均速度来描述物体的运动是比较粗糙的。如要精确地描述物体的运动情况，我们必须知道物体在每一时刻(或每一位置)的速度，即瞬时速度。

平均速度$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$的大小和方向都随所取时间 Δt 的不同而异。当 Δt 尽量减小并趋近于零时，$\Delta \boldsymbol{r}$ 的大小(即割线 AB 段的长度，见图 1-2)也逐渐缩短而趋近于零，从而 B 点逐渐趋近于 A 点，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向也从割线 AB 的方向逐渐趋近于 A 点的切线方向。于是，质点在某一时刻 t 的运动情况，便可用 Δt 趋近于零时平均速度$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$所趋向的极限(包括大小和方向的极限)即瞬时速度(简称速度)$\boldsymbol{v}$ 来描述

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-5a}$$

上式指出，速度等于位置矢量函数对时间的一阶导数。速度的方向沿着轨道上质点所在点的切线，指向质点前进的一侧。

速度的定义式是一个矢量导数，在实际计算时，常采用其坐标式。在直角坐标系中，速度可表述为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-5b}$$

式中，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$分别是速度在三个坐标轴上的分量 v_x，v_y，v_z，则上式可写成

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

显然速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

当质点做平面曲线运动时，速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$$

其大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

速度$\boldsymbol{v}$和 x 轴正方向的夹角 θ 由下式决定，即

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}$$

或

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}$$

当质点沿 x 轴做直线运动时，速度用标量式表示，即

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

当$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$ 时，v 取正值，表示速度的方向与 x 轴正方向一致；当$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$ 时，v 取负值，表示速度的方向与 x 轴正方向相反。

描述质点运动时，我们也常采用一个叫做“速率”的物理量，它等于质点在单位时间内所经历的路程。如图 1-2 所示，在 Δt 时间内，质点所通过的路程为曲线段$\overset{\frown}{AB}$，设其长度为 Δs，则 Δs 与 Δt 的比值就称为在时间 Δt 内质点的平均速率，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

平均速率是标量，而平均速度是矢量，两者不能等同看待；即使是平均速度的大小，一般说来与平均速率也不尽相等。然而，在 Δt 趋近于零的极限情形下，路程 Δs 与相应的位移的大小$|\Delta\boldsymbol{r}|$可以认为相等，所以瞬时速率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=|\boldsymbol{v}|$$

即瞬时速度的大小等于瞬时速率。

四、加速度

质点运动的时候，速度的大小和方向都可能随时间变化，加速度就是描述速度（大小和方向）随时间变化快慢的物理量。

如图 1-3 所示，若 t_1 时刻，质点位于 A 点，其速度为$\boldsymbol{v}_A$；t_2 时刻，质点位于 B 点，速度为$\boldsymbol{v}_B$，从速度矢量图可以看出，在时间间隔 $\Delta t=t_2-t_1$ 内，速度的增量是 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，我们把 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与 Δt 的比值定义为质点在这段时间内的平均加速度，用 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 表示，则有

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\tag{1-6}$$

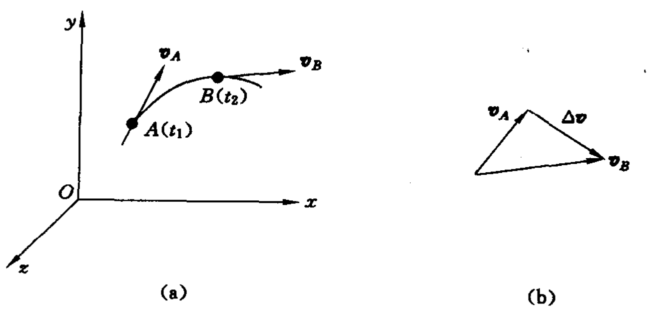

图 1-3　速度的增量

平均加速度的大小等于单位时间内速度增量的绝对值，平均加速度的方向即 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向。它只能反映在一段时间内质点速度变化的大致情况，不能精确地反映各个不同时刻质点速度大小和方向的变化。为了精确地描述质点在任一时刻 t（或任一位置处）的速度变化率，就必须引入瞬时加速度的概念。我们定义，质点在某时刻或某位置的瞬时加速度（简称加速度）在大小和方向上等于当时间趋近于零时平均加速度$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$的极限，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7a}$$

因为$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，所以有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-7b}$$

即瞬时加速度等于速度对时间的一阶导数，或位置矢量对时间的二阶导数。用分量式表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-7c}$$

如果质点做平面曲线运动

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$$

加速度的大小

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 x 轴正方向的夹角 θ 由下式决定，即

$$\tan\theta=\frac{a_y}{a_x}$$

或

$$\theta=\arctan\frac{a_y}{a_x}$$

考虑到 $\Delta t\to 0$时平均加速度的极限方向，可以想见，不管质点做什么样的平面曲线运动，加速度的方向总是指向曲线的凹侧。

在直线运动的情况下，加速度可表述为标量式，其大小为 $a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$或 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，其方向用正负号表示。当$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}>0$时，加速度取正号，表示加速度方向与 x 轴正方向一致；当$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}<0$时，加速度取负号，表示加速度方向与 x 轴正方向相反。但是，$a>0$不一定就是加速运动，$a<0$也不一定是减速运动。如果初速度 $v_0>0$，且 $a>0$，表示质点沿 x 轴正方向加速；如果 $v_0<0$，且 $a<0$，表示质点沿 x 轴负方向加速；如果 $v_0>0$，$a<0$或 $v_0<0$，$a>0$，则为减速运动。即速度与加速度同号时加速，异号时减速。

例1-1 已知质点的运动方程为 $x=2b\cos\omega t$，$y=b\sin\omega t$，其中 b 和 ω 是常数。

(1) 写出质点的 $\boldsymbol{r}(t)$表达式；

(2) 求质点运动的轨道、速度和加速度，并以图示之；

(3) 求$\boldsymbol{v}$ 和$-\boldsymbol{r}$ 的夹角；

(4) 在一个周期内，哪些时刻速度与加速度互相垂直？

解 (1) 质点的 $\boldsymbol{r}(t)$表达式为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$$

$$=2b\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

（2）由质点的运动方程消去时间 t，得轨道方程

$$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

可见，质点的轨道为一椭圆，其长半轴为$2b$，短半轴为 b。

由速度和加速度的定义，易知

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$
$$=-2b\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$
$$=-2b\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$
$$=-\omega^2(2b\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j})$$
$$=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

据轨道方程，可画出质点的运动轨道，如图1-4所示。速度$\boldsymbol{v}$ 的方向沿轨道切线，由上面的计算结果知，加速度 $\boldsymbol{a}$ 平行于径矢 $\boldsymbol{r}$，指向椭圆的中心 O 点。

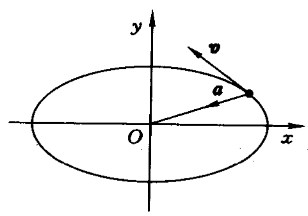

图1-4

（3）据矢量数量积的公式，有

$$\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{r})=vr\cos\alpha$$

式中，α 即为$\boldsymbol{v}$ 与$(-\boldsymbol{r})$的夹角，由上式得

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{r})}{vr}$$
$$=\frac{(-2b\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j})(-2b\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\sin\omega t\boldsymbol{j})}{b\omega\sqrt{1+3\sin^2\omega t}\cdot b\sqrt{1+3\cos^2\omega t}}$$
$$=\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\sin^2 2\omega t}}$$
$$\alpha=\arccos\frac{3\sin 2\omega t}{\sqrt{16+9\sin^2 2\omega t}}$$

（4）由矢量代数知，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 垂直的条件为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

在本题中，因 $\boldsymbol{a}/\!/(-\boldsymbol{r})$，所以上述条件化为

$$\sin 2\omega t=0$$

由上式解得

$$t=k\frac{T}{4}$$

令 $k=0,1,2,3$得一个周期内 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 垂直的时刻为 $t=0,T/4,T/2,3T/4$。

例1-2　一个正在行驶的汽艇在关闭发动机后，具有一个与速度相反的加速度，其大小与速度平方成正比，即 $a=-kv^2$，式中 k 为常数，试证明：

（1）在发动机关闭后，汽艇在时刻 t 的速度可表示为$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt$；

（2）在时间 t 内，汽艇行驶的距离为 $x=\frac{1}{k}\ln(kv_0t+1)$；

(3) 汽艇在行驶距离 x 后的速度 $v=v_0e^{-kx}$。

证 (1) 根据加速度的定义和初始条件,有

$$a=\frac{dv}{dt}=-kv^2$$

即

$$\frac{dv}{v^2}=-kdt$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-k\int_0^t dt$$

得汽艇的速度 v 和时间 t 的关系为

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt \tag{a}$$

(2) 由速度的定义和上面计算的结果,有

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\frac{1}{v_0}+kt}$$

$$\int_0^x dx=\int_0^t\frac{dt}{\frac{1}{v_0}+kt}$$

积分后,便得到汽艇行驶距离 x 和时间 t 的关系为

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) \tag{b}$$

(3) 由式(a)和(b)可得

$$v=\frac{1}{\frac{1}{v_0}+kt},\qquad kt=\frac{e^{kx}-1}{v_0}$$

将后式代入前式,便得到

$$v=v_0e^{-kx}$$

如果本题只需求证速度 v 和距离 x 的关系,也可按下述方法来证明,因

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=-kv^2$$

即

$$\frac{dv}{v}=-kdx$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\int_0^x dx$$

得

$$v=v_0e^{-kx}$$

例1-3 如图1-5所示,套管 A 受绳子牵引沿铅直杆向上滑动。绳子的另一端绕过离杆距离为 b 的滑轮 B 而绕在鼓轮 C 上。当鼓轮匀速转动时,其边缘处质点速度为 v_0,试求套管 A 沿铅直杆上升的速率 v_x(设牵引绳原长 $AB=l_0$)。

解 取 $t=0$时 $l=l_0$,则时刻 t 的牵引绳长 $l=l_0-v_0t$。由

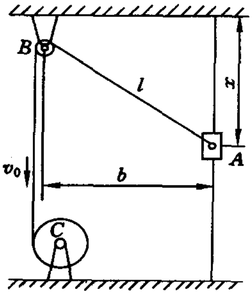

图1-5

图1-5中的几何关系（忽略滑轮 B 及其支撑物的大小），有

$$l^2=x^2+b^2$$

对上式的两边求导数，有

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\ \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0,\qquad x=\sqrt{l^2-b^2}=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-b^2}$$

所以
$$v_x=-\frac{l_0-v_0t}{\sqrt{(l_0-v_0t)^2-b^2}}v_0$$

第三节　平面运动

一、抛体运动

在重力场中，任何物体得到初速度以后就循着由重力和空气阻力所决定的路径运动。这个物体称为抛射体，这个物体的运动称为抛体运动。

在地球表面附近不太大的范围内，重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 可以看成是常量。在忽略空气阻力的情况下，二维抛体运动的水平分量和竖直分量将互相独立。这时可选取平面直角坐标系，坐标原点取在抛出点，x 轴和 y 轴分别沿水平和竖直方向，如图1-6所示。抛体沿 x 轴方向做匀速运动，沿 y 轴方向做以 $-\boldsymbol{g}$ 为加速度的匀变速运动。设抛体初速度为 v_0，它与 x 轴成 θ_0角，则它的两个分量分别为

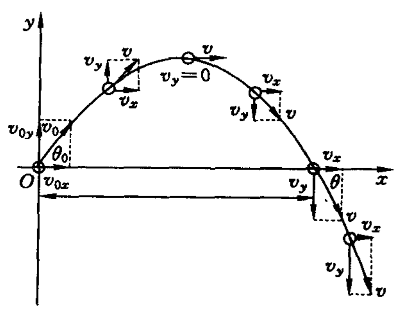

图1-6　抛体运动轨迹

$$v_{0x}=v_0\cos\theta_0$$
$$v_{0y}=v_0\sin\theta_0$$

在任意时刻 t，抛体运动的两个速度分量分别为

$$v_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\cos\theta_0$$

$$v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\sin\theta_0-gt$$

以上两式积分后，可得抛体在 t 时刻的坐标分别为

$$x=(v_0\cos\theta_0)t$$

$$y=(v_0\sin\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2$$

在以上两式中消去时间 t，即得描写抛体运动轨迹的抛物线方程为

$$y=x\tan\theta_0-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 \tag{1-8}$$

由 $v_y=0$可求得 $t=v_0\sin\theta_0/g$，从而得到抛体所能达到的最大高度（射高）为