数学物理方法

序

陈育宁

教材建设是高等学校教学基本建设的重要组成部分，选用和编写高质量的教材，是高校不断提高教学水平、保障教学质量的基础。

为了落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和宁夏大学“十一五”教学工作规划及教材建设的主要任务，更新课程体系，提高教学质量，以适应现代化建设和市场经济的需要，适应培养面向21世纪新型高素质人才的需要，启动宁夏大学“十一五”教材建设工程，编写、出版“宁夏大学‘十一五’教材建设”丛书，是必要和及时的。

这套丛书的编写和出版，必须坚持为我校的教育教学工作服务，要根据我校专业建设、课程建设、生源状况、教学水平及师资力量等实际情况，充分发挥我校学科优势和专业特长，努力使教材建设不断深化，整体水平不断提高；要逐步建立以国家规划教材的使用为重点，特色鲜明的自编教材为补充的学校教材建设与管理体制；要不断扩大教材种类，提高教材质量，探索教材建设与供应新途径，建立教材编写与选用新机制，开拓教材使用与管理新局面。

近年来,我校的教育教学工作随着学校规模的不断扩大和办学实力的增强,有了新的发展和提高。2005年,教育部与宁夏回族自治区政府签署协议,共建宁夏大学,为我校加快发展提供了新的机遇。实现学校的发展目标,培养高素质的建设人才,主动服务于国家和地方经济社会发展,是我校面临的重要战略任务。而高层次、高质量的人才培养,必须要求有高水平、高质量的教材建设。为此,本科教育的学科、专业及课程设置,都要作相应的调整。“宁夏大学‘十一五’建材建设”丛书的编写和出版,要适应这一调整,紧紧把握中国高等教育改革与发展的脉搏,与时俱进,面向未来,服务社会;要结合21世纪社会、经济、科技、文化、教育发展的新特点,吸收新成果,解决新问题;要根据素质教育和学分制教学管理的需要, 突出适用性和针对性;要在加强基础课、实验课教材编写与出版的同时,不断深化基础理论基础课、实验课教材编写与出版的同时,不断深化基础理论研究,拓宽教材知识面,努力实现整套教材科学性、系统性、开放性、前瞻性和实践性的有机结合,充分体现起点高、水平高,结构严密、体系科学,观点正确、应用性强的特点。

我们相信,在我校广大教师和科研骨干的努力下,在出版界同人的支持下,“宁夏大学‘十一五’教材建设”丛书的编写出版,必将提高质量,多出精品,形成特色;必将面向市场,走向社会,服务教学,为宣传宁夏大学,树立宁夏大学学术形象,推动宁夏大学本科教学水平不断提高发挥积极作用。

2005年8月于银川

数学物理方法

Contents 目录

第一篇　复变函数论方法

第一章　复数的基本概念 ······ 003
§1.1.1　复数及其运算 ······ 003
§1.1.2　无穷远点 ······ 004
习题 ······ 005
第二章　复变函数及其导数　柯西–黎曼条件 ······ 006
§1.2.1　复变函数 ······ 006
§1.2.2　复变函数的导数 ······ 006
§1.2.3　复变函数可导的必要条件:柯西–黎曼条件(C–R 条件) ······ 007
习题 ······ 008
第三章　解析函数 ······ 009
§1.3.1　函数解析的充要条件 ······ 009
§1.3.2　初等解析函数 ······ 010
习题 ······ 014
第四章　复变函数积分　Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式 ······ 015
§1.4.1　复变函数积分 ······ 015
§1.4.2　单连通域的 Cauchy 定理 ······ 017

§1.4.3 复连通域的 Cauchy 定理 …… 017
§1.4.4 Cauchy 积分公式 …… 019
§1.4.5 调和函数与共轭调和函数 …… 020
习题 …… 023
第五章 复变函数级数 泰勒级数和洛朗级数 …… 025
§1.5.1 复变函数级数 …… 025
§1.5.2 解析函数的泰勒(Taylor)级数 …… 026
§1.5.3 解析函数的洛朗(Laurent)级数 …… 031
习题 …… 033
第六章 孤立奇点的分类 留数和利用留数计算积分 …… 035
§1.6.1 孤立奇点和孤立奇点的分类 …… 035
§1.6.2 孤立奇点的留数及其计算 …… 038
§1.6.3 利用留数计算复积分 …… 042
§1.6.4 利用留数计算定积分 …… 044
习题 …… 054
第七章 积分变换 …… 056
§1.7.1 傅立叶(Fourier)积分变换 …… 056
§1.7.2 拉普拉斯(Laplace)积分变换 …… 067
习题 …… 077

第二篇 数学物理方程

第一章 希尔伯特空间与施斗姆–刘维尔算子 …… 083
§2.1.1 希尔伯特(Hilbert)空间 $L_2[a,b]$ …… 083
§2.1.2 线性常微分方程的级数解法 …… 090
§2.1.3 勒让德方程与勒让德多项式 …… 103
§2.1.4 连带的勒让德方程和连带的勒让德函数 …… 107
§2.1.5 贝塞尔(Bessel)方程和贝塞尔函数 …… 108
习题 …… 113
第二章 数学物理方程和二阶线性偏微分方程 …… 114
§2.2.1 数学物理方程 …… 114
§2.2.2 二阶线性偏微分方程的分类和简化 …… 117

习题 …… 121
第三章　行波法(通积分法) …… 123
§2.3.1　一维齐次波动方程的柯西问题 …… 123
§2.3.2　一维非齐次波动方程的 Cauchy 问题 …… 129
§2.3.3　高维波动方程的 Cauchy 问题 …… 130
习题 …… 134
第四章　分离变量法(本征函数法) …… 137
§2.4.1　一维有界区域齐次方程齐次边界条件混合问题的分离变量法 …… 137
§2.4.2　二维规则有界区域的齐次方程齐次边界条件混合问题的分离变量法 …… 141
§2.4.3　三维空间内球坐标系和柱坐标系中方程$\triangle u+\lambda u=0$的变量分离 …… 144
§2.4.4　非齐次方程齐次边界条件的解法 …… 153
§2.4.5　非齐次边界条件的定解问题的解法 …… 157
习题 …… 159
第五章　积分变换法 …… 167
§2.5.1　傅立叶积分变换在数学物理定解问题中的应用 …… 167
§2.5.2　拉普拉斯变换在数学物理定解问题中的应用 …… 174
习题 …… 178
第六章　格林函数法 …… 180
§2.6.1　格林(Green)公式　调和函数的积分表达式 …… 180
§2.6.2　拉普拉斯(Laplace)方程的狄利克雷问题 …… 184
§2.6.3　泊松方程的狄利克雷问题 …… 190
习题 …… 191

参考文献 …… 192
后记 …… 193

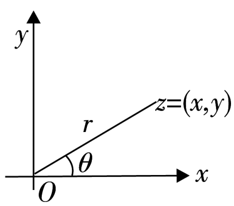
第一章　复数的基本概念

§1.1.1　复数及其运算

在平面直角坐标系中，把点(x, y)叫做一个复数，记做z，即

$$z = (x, y) = x + iy,$$

其中x叫做复数z的实部，记为$\mathrm{Re}\, z$；y叫z的虚部，记为$\mathrm{Im}\, z$；i叫虚数单位，满足$i^2 = -1$.



代数式$x - iy$叫复数z的共轭复数，记为$\bar{z}$，即$\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}\bar{z}$，$\mathrm{Im}z = -\mathrm{Im}\bar{z}$，显然$(\overline{\bar{z}}) = z$，这个平面就叫复平面，$x$轴上的点$x = (x, 0)$是实数，所以$x$轴又叫实轴；$y$轴上的点$iy = (0, y)(y \neq 0)$是纯虚数，$y$轴又叫虚轴，坐标原点$O = (0,0)$叫复数零.

众所周知，点(x, y)可用极坐标表示，有

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

这样复数$z = x + iy$又可表示为

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

其中实数$r = \sqrt{x^2 + y^2}$叫复数z的模，记为$|z|$，实数θ称为复数z的辐角，记为$\mathrm{Arg}\, z$，这与中学数学中的任意角是一样的，即当终边位置相同时，彼此差一个2π的整数倍，所以是多值的. 显然复数零的模为零，即$r = |z| \geqslant 0$，当且仅当$z = 0$时等号成立. 复数零的辐角不确定.

利用著名的尤拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

复数$z = re^{i\theta}$，因此复数z有以下的表示法：

$$z = (x, y) = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

为了方便，通常把介于$[0, 2\pi)$或$(-\pi, +\pi]$之间的复数$z \neq 0$的一个辐角叫z的辐角主值，记为$\arg z$，即$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2n\pi$，$n$是整数.

复数是可以运算的，它有四则运算（+，-，×，÷），在中学数学中已经学过，复数的开方有

$$\sqrt[n]{z}=(\sqrt[n]{r})e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},$$

这里 $z=re^{i(\theta+2k\pi)}$，$(\sqrt[n]{r})$ 表示实数 $r>0$ 的 n 次算术根，$\sqrt[n]{z}$ 有 n 个根记为 $w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$，分别依次由 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 得到.

例 1：求 $\sqrt[3]{8}$.

解：将 8 写成指数式，$8=8e^{i(0+2k\pi)}$，得

$\sqrt[3]{8}=(\sqrt[3]{8})e^{i\frac{2k\pi}{3}}=2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$,

取 $k=0$ 得 $(\sqrt[3]{8})_0=2$,

取 $k=1$ 得 $(\sqrt[3]{8})_1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=-1+i\sqrt{3}$,

取 $k=2$ 得 $(\sqrt[3]{8})_2=2e^{i\frac{4\pi}{3}}=-1-i\sqrt{3}$.

为了方便，引进记号 $U_\delta(z_0)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 为以 z_0 为圆心，以 $\delta>0$ 为半径的圆盘，叫 z_0 点的 δ 邻域.

例 2：已知 $z^4+1=0$，求复数 z.

解：由已知得 $z^4=-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$,

$$z=e^{i\frac{(2k+1)}{4}\pi},$$

取 $k=0$ 得 $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$,

取 $k=1$ 得 $z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$,

取 $k=2$ 得 $z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$,

取 $k=3$ 得 $z_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

应当指出，复数与实数不同，复数之间无大小可比.

§1.1.2 无穷远点

称模为无穷大的点叫无穷远点，记为 ∞，复数域中只有一个无穷远点，它的模为无穷大，辐角不确定. 通常用变换式

$$\zeta = \frac{1}{z},$$

将两个复平面 z 和 ζ 上的除原点外所有有限远点之间建立了一对一的对应关系，于是规定点 $z=0$ 对应着 ζ – 平面上的 ∞ 点，以后若要讨论 z – 平面上 ∞ 点邻域（$|z|>R$，R 是充分大的一个正数）可利用变换式 $\zeta=\frac{1}{z}$ 讨论 ζ – 平面上 $\zeta=0$ 点邻域（$|\zeta|<\frac{1}{R}$）内的性态.

一般把 z – 平面加上无穷远点的复平面叫做扩充了的复平面.

习　题

1. 把下列复数写成 $a+ib$ 的形式：

（1）$(2+3i)+(-4+i)$；　（2）$(3+2i)(4-i)$；

（3）$\frac{2+3i}{-4+i}$；　（4）$(8-6i)^2$；

（5）$\frac{1}{i}+\frac{2}{1-i}$；　（6）$(1+\frac{2}{1+i})^2$.

2. 解下列复数方程：

（1）$z^2-3+4i=0$；　（2）$z^4+i=0$.

3. 求方程 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$ 的两个根 z_1,z_2 判断 z_1,z_2 哪个在单位圆盘内，其中 $\varepsilon>0$.

4. 设 $z=x+iy$，求下列复数的实部与虚部：

（1）$\frac{1}{z^2}$；　（2）$\frac{1}{2z-3}$；　（3）$\frac{z+1}{2z-5}$；　（4）z^3.

5. 化简下列复数：

（1）$(1+i)^4$；　（2）$(-i)^{-1}$；　（3）$(1-i)^{-2}$；

（4）$\sqrt{1+\sqrt{i}}$；　（5）$\sqrt{1+i}$；　（6）$\sqrt{\sqrt{-i}}$.

第二章　复变函数及其导数 柯西 - 黎曼条件

§1.2.1　复变函数

设 G 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合，如果有一个确定的法则存在，对于集合 G 中的每一个复数 z，就有复数 $w=u+iv$ 与之对应，那么称复变数 w 是复变数 z 的函数，记作 $w=f(z)$. 如果 z 的一个值对应着唯一的一个 w，那么函数 $f(z)$ 叫做单值函数，例如 $w=z^2=x^2-y^2+i2xy$ 就是单值函数；如果 z 的一个值有两个或两个以上的 w 值相对应，则称函数 $f(z)$ 是多值的，例如 $w=\mathrm{Arg}z$ 就是多值函数.

§1.2.2　复变函数的导数

由于 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 对应着一对实二元函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y),$$

因此复变函数 $w=f(z)$ 的极限、连续性就由二元函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 的极限和连续性来确定.

复变函数的导数，设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 D，z 为 D 内一点，点 $z+\Delta z$ 仍在 D 内，如果极限

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$$

存在且等于复数 A，那么说 $f(z)$ 在点 z 可导，极限 A 叫 $f(z)$ 在 z 点导数，记作 $f'(z)$ 或 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

如果 $w=f(z)$ 在点 z 的 δ - 邻域 $U_\delta(z)$ 内每一点都可导，则称 $w=f(z)$ 在 z 点解析，点 z 叫 $f(z)$ 的解析点；如果 $w=f(z)$ 在点 z 处不解析，则称该点为 $f(z)$ 的奇点.

例 1：设 n 为自然数，试证 $f(z)=z^n$ 是全平面的解析函数，且有 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

证明：对复平面上的任意一点 z，由定义得

$$\frac{\triangle w}{\triangle z}=\frac{(z+\triangle z)^n-z^n}{\triangle z}=\frac{C_n^1 z^{n-1}\triangle z+C_n^2 z^{n-2}(\triangle z)^2+\cdots+C_n^n(\triangle z)^n}{\triangle z},$$

$$=nz^{n-1}+\triangle z[C_n^2 z^{n-2}+\cdots+C_n^n(\triangle z)^{n-2}],$$

因此 $(z^n)'=\lim\limits_{\triangle z\to 0}\frac{(z+\triangle z)^n-z^n}{\triangle z}=nz^{n-1}$.

所以，$w=f(z)=z^n$ 是全平面的解析函数.

由于复变函数导数定义与实变函数导数定义在形式上完全相同，因此实变函数中的求导法则（公式）在复变函数中完全适用. 不加证明列出这些公式：

$(C)'=0$，C 为常数；

$[f_1(z)f_2(z)]'=f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z)$；

$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)'=\frac{f_1'(z)f_2(z)-f_1(z)f_2'(z)}{f_2^2(z)}$；

$[F(f(z))]'=F'(f(z))f'(z)$，等等.

例 2：$w=\frac{1}{z}$ 除 $z=0$ 是奇点外在全平面处处解析，且 $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$.

§1.2.3　复变函数可导的必要条件：柯西－黎曼条件（C－R 条件）

设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 z 处可导，则在点 z 处成立条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

这个条件就是著名的柯西（Cauchy）－黎曼（Riemann）条件，简称 C－R 条件.

事实上，由于 $\triangle z=\triangle x+i\triangle y$，$\triangle w=\triangle u+i\triangle v$，于是若令 $\triangle y=0$，让 $\triangle x\to 0$，可得

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u+i\triangle v}{\triangle x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x};$$

若令 $\triangle x=0$，让 $\triangle y\to 0$，就有

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle u+i\triangle v}{i\triangle y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因为$f(z)$在点z可导,所以导数相等,即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

应当指出,C - R 条件仅是$f(z)$在点z可导的必要条件,不是充分条件.

复平面上处处不解析的例子.

例 3: $f(z)=(|z|)^2=z\cdot\bar{z}$在复平面上除$z=0$外处处不可导. 事实上,$f(z)=(|z|)^2=x^2+y^2$,这里$u=x^2+y^2$,$v=0$,若$z\neq0$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,$$

而$\frac{\partial v}{\partial x}=0$,$\frac{\partial v}{\partial y}=0$,由于$z\neq0$,因此 C - R 条件中至少有一个不成立,故函数$(|z|)^2$除$z=0$外处处不可导.

在$z=0$点有

$$\frac{f(0+\triangle z)-f(0)}{\triangle z}=\frac{\triangle z\cdot\overline{(\triangle z)}}{\triangle z}=\overline{(\triangle z)},$$

则 $\lim\limits_{\triangle z\to0}\frac{f(0+\triangle z)-f(0)}{\triangle z}=0$,表明函数$(|z|)^2$仅在$z=0$点可导,而在其他点都不可导,因此$f(z)=(|z|)^2$在复平面上处处不解析,即$(|z|)^2$不是解析函数.

习　题

1. 设$f(z)=\frac{z^3+2z+1}{z^3+1}$,(1)求$f(z)$不解析的点,(2)求$f'(z)$.

2. 证明$f(z)=\bar{z}$不是解析函数.

3. 求下列函数$f(z)$的导数并指出$f(z)$不解析的点:

(1)$(z+1)^4$; (2)$z-\frac{1}{z}$; (3)$\left(\frac{1}{z-1}\right)^3$; (4)$\frac{1}{(z^3+1)(z^2+2)}$;

(5)$\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}$; (6)$\frac{z}{z^n-2}$,其中$n$是正整数.

第三章　解析函数

§1.3.1　函数解析的充要条件

设函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 的邻域内有意义，则函数 $w=f(z)$ 在 z 点解析的必要且充分条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 都具有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，并且在 z 点满足 C－R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，这时有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例 1：$w=z^2=x^2-y^2+i2xy$ 是全平面的解析函数，且 $(z^2)'=2z.$

证：令 $u=x^2-y^2,v=2xy$，

它们在全平面都具有连续的一阶偏导数，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\frac{\partial v}{\partial y}=2x,$$

并且满足 C－R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

因此，$w=z^2$ 在任意点 z 都解析，并且

$$(z^2)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i2y=2(x+iy)=2z,$$

这与用导数定义求导数是完全一样的.

例 2：设 $z=re^{i\theta}$，在极坐标系下函数 $w=f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，则极坐标系下的C－R 条件是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

证：$\triangle w=\triangle u+i\triangle v,\triangle z=e^{i\theta}\triangle r+ire^{i\theta}\triangle\theta=e^{i\theta}(\triangle r+ir\triangle\theta)$，

于是
$$\frac{\triangle w}{\triangle z}=\frac{\triangle u+i\triangle v}{e^{i\theta}(\triangle r+ir\triangle\theta)}.$$

若$f(z)$在z点可导，如果令$\triangle\theta=0$，让$\triangle r\to 0$，那么

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=\lim_{\triangle r\to 0}\frac{\triangle u+i\triangle v}{e^{i\theta}\triangle r}=\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

如果令$\triangle r=0$，让$\triangle\theta\to 0$，那么

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=\lim_{\triangle\theta\to 0}\frac{\triangle u+i\triangle v}{e^{i\theta}(ir\triangle\theta)}=\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}-i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

由此得极坐标系下的C－R条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

类似的，在极坐标系下，函数$w=f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$在$z$点解析的充分且必要的条件是$u(r,\theta)$与$v(r,\theta)$都具有连续的一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial\theta},\frac{\partial v}{\partial r},\frac{\partial v}{\partial\theta}$，并且满足C－R条件$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$，这时$f(z)$的导数为$f'(z)=\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.

§1.3.2 初等解析函数

1.3.2.1 单值解析函数

（1）多项式函数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,$$

这里n是自然数，a_k是复常数，$k=0,1,2,\cdots,n$，它是全平面的解析函数，并且$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$.

（2）有理分式函数

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$$

这里$a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$，$b_k(k=0,1,2,\cdots,m)$都是复常数，n,m是自然数，有理分式函数是除使分母$Q_m(z)$为零的点外复平面的解析函数.

（3）指数函数

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$叫$z=x+iy$的指数函数，显然$e^{z+2k\pi i}=e^z$，表明函数e^z是以$2k\pi i$为周期的周期函数（这里k为整数）.

对任意的z_1及z_2有

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

指数函数e^z是全平面内的解析函数，并且$(e^z)'=e^z$，这是因为$e^z=e^x\cos y+$

$ie^x\sin y$，令 $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y, \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y, \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y, \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$，它们在全平面都是连续的，并且满足C－R条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，所以 e^z 是全平面的解析函数，并且 $(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$.

例1：常用的表达式

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\ -1=e^{\pi i},\ -i=e^{\frac{3}{2}\pi i}, 1=e^{2\pi i}.$$

例2：若 $e^z=1$，则 $z=2n\pi i$，n 是整数.

（4）三角函数

复变量的三角函数的定义是

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, \sec z=\frac{1}{\cos z}, \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

由 $e^{z+2k\pi i}=e^z$ 易知，$\sin(z+2k\pi)=\sin z, \cos(z+2k\pi)=\cos z$，表明函数 $\sin z$、$\cos z$ 仍以 2π 为周期的周期函数，$\tan z$、$\cot z$ 仍以 π 为周期的周期函数. 不难验证，复变量的三角函数之间的各种公式和实变量的三角函数的公式是一样的，仍然成立. 例如：

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,$$

但是应当指出，$\sin z$、$\cos z$ 的模数不再是小于等于1了，甚至模数可以无穷大，例如：$|\cos i|=\frac{e^{-1}+e^1}{2}>1.$

由公式易得

$$\sin z=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y,$$

$$\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y,$$

从而 $|\sin z|=\sqrt{\sin^2x+\operatorname{sh}^2y}, |\cos z|=\sqrt{\cos^2x+\operatorname{sh}^2y}.$

三角函数的导数公式与实变量的三角函数一样，仍然成立：

$$(\sin z)'=\cos z, (\cos z)'=-\sin z, (\tan z)'=\sec^2 z,$$

$$(\cot z)'=-\csc^2 z, (\sec z)'=\sec z\operatorname{tna}z, (\csc z)'=-\csc z\cot z.$$

事实上，由导数公式 $(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{1}{2i}(ie^{iz}+ie^{-iz})=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$，其余的公式作为习题留给读者自己去证明.