动态规划及其在矿业中的应用

Dynamic Programming and Applications in Coal Industry

陈兴义 编

李定生 审

焦作矿业学院

一九八八年六月

动态规划及其在矿业中的应用

DYNAMIC PROGRAMMING AND APPLICATIONS IN COAL INDUSTRY

陈 兴 文

焦作矿业学院

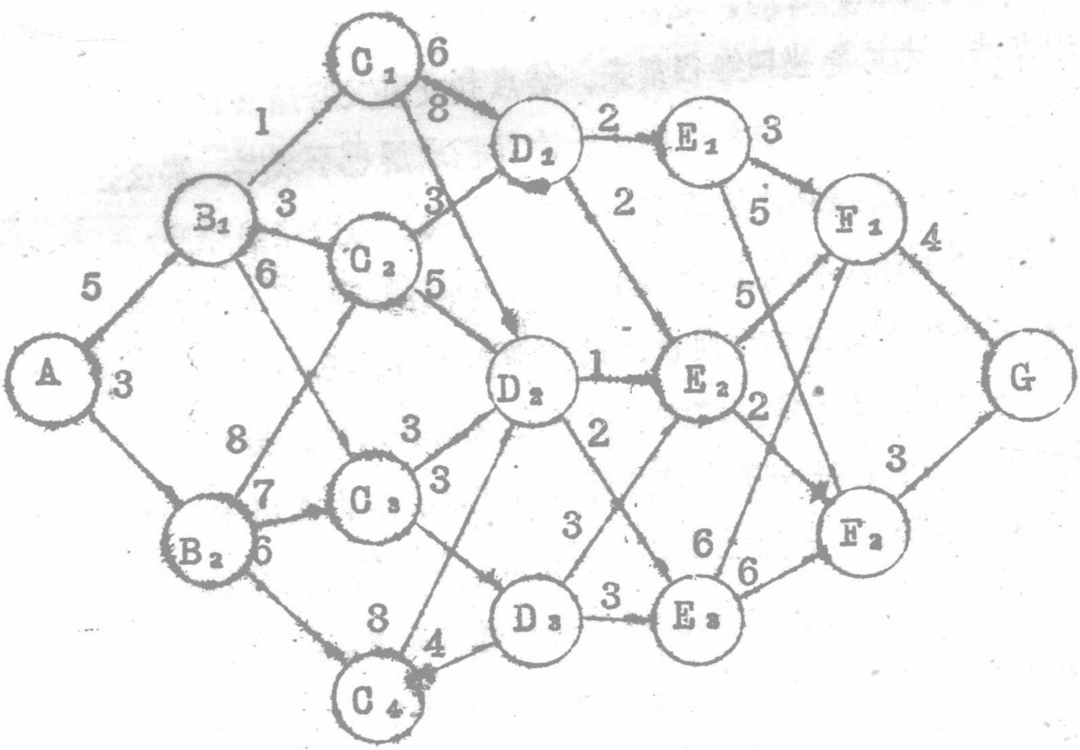
一九八八年六月

目 录

第一章 动态规划的基本方法

§1—1 引 言

下面给出了一个交通网络图，当你想从A出发到达G时，你将如何确定一条最短的行走路线呢?



（图1—1）

人们最容易联想到的方法是用穷举法。即把由A到G各条路线的距离都计算出来，然后互相比较找出最短者，相应地得出了最短

路线。如由A出发有二条分路，分别到B_1与B_2点。若走B_1点，则由B_1又可能有三条继续线路。即C_1、C_2及C_3；若由A点出发选择走B_2点，则由B_2点又可能有三条继续线路，分别到C_2、C_3或C_4，如此等等，一共可以列出48条不同的路线，其中最短路线为：

$$A—B_1—C_2—D_1—E_2—F_2—G$$

距离为18个单位。显然，这种穷举法解决这类问题是最原始、最繁琐的方法，尤其是当网络很复杂。结点和支路又特别多时，其计算工作量是很大的，往往即使用电子计算机求解也不现实。那么，采用什么方法才能减少计算工作量，较快地找出最短路线来呢？

为此，我们先从本质上来分析一下这个问题，从图1—1中可以看出，此网络图是由六个阶段组成，即A—B、B—C、C—D、D—E、E—F、F—G，这六个阶段是互相联系的。当我们解决这个问题时，在它的每一阶段都需要作出决策。如由A出发，第一阶段我们选择走B_1点，第二阶段选择走C_2点，第三阶段选择走D_1点，第四阶段选择走E_2点，第五阶段选择走F_2点，第六阶段则到达终点G。也就是说，我们在第一至六阶段各段的决策分别为B_1、C_2、D_1、E_2、F_2及G。可以看出，一个阶段的决策确定之后，常常影响下一阶段的决策。如当第一阶段选择走B_1点后，第二阶段可选的点只有C_1、C_2与C_3点。从而影响整个过程的活动路线。各个阶段所确定的决策就构成一个决策序列，如{A，B_1，C_2，D_1，E_2，F_2，G}，通常称为一个策略。由于每一个阶段可供选择的决策往往不止一个，如第一阶段还可以选择走B_2，第二阶段选择

走C_3，第三阶段选择走D_2，第四阶段选择走E_3，第五阶段选择走F_1，第六阶段到达终点G，从而又形成了另一个决策序列{A，B_2，C_3，D_2，E_3，F_1，G}。对应于一个策略就有确定的活动效果，这个效果是可用数量来衡量的。如{A，B_1，C_2，D_1，E_2，F_2，G}这一策略的活动效果就是从A经B_1、C_2，D_1、E_2、F_2到G的距离，为18个单位；{A，B_2，C_3，D_2，E_3，F_1，G}的活动效果为28个单位。可见，不同的策略效果也不同。当然这一问题的目的就是在允许选择的那些策略中，选择一个最优策略，使在预定的标准下达到最好的效果。对于上述这类问题，我们称为多阶段决策问题。

在多阶段决策问题中，阶段往往可以用时段表示。在各个时间阶段，采取的不同决策是随时间而变动的，这就有"动态"的含义。但是，有些问题的阶段与时间无关，这时，只要人为地引进"时段"因素，就可以将这类问题变为多阶段决策问题。

在采矿业中，也常常出现多阶段决策问题。

例1，资源分配问题

某煤炭公司拟将a套综采设备分配给所属的n个矿务局，若分配给i矿务局x_i套综采设备，可以为该公司提供盈利为$g_i(x_i)$。问分配给各矿务局多少套综采设备才能使该公司盈利最大。

例2．生产计划问题

某矿务局调查了解市场情况后，估计在今后四个时期市场对焦煤的需要量如表1—1所示。

表1—1

时　　期(k)	需　　要　　量(D_k)
1	D_1
2	D_2
3	D_3
4	D_4

假定，不论在任何时期，每一时期生产原煤的固定成本费为F，若不生产则为零。每吨煤生产成本费为f。同时任何一个时期生产能力所允许的最大值均为A。

又设每一时期每吨原煤的库存费为q，同时规定在第一时期初及在第四时期末均无原煤库存。

问该矿务局应如何安排各个时期的生产与库存量，使所花的总成本费用最低。

例3，设备更新问题

令t为卡车已经使用过的年数或年令。

设$r(t)$为已使用t年的卡车每年出车所得的运输收入额。它随t而减少，因车愈旧收入愈少。

$u(t)$为已使用t年的卡车每年所需的维修费。它随t而增加，因车愈旧愈易出故障。

$c(t)$为更新一辆使用了t年的旧车，卖掉旧车，买进新卡车所需的净费用。假设各年新车的价格是常数，而旧车的折价随t而下降，则$c(t)$随t而上升。

问卡车用多少年后再更新最为恰当。即更新的合理年限为多少？

以上多阶段决策问题均是要求按照预定的任务实现某种受控过程，在过程进行中，应如何在客观条件允许的范围内选择最好的措施去控制过程的发展，以期最好地完成预定任务，这个过程我们称为为多阶段决策过程最优化。动态规划就是研究多阶段决策过程最优化的一种方法。

动态规划是运筹学的一个分支，大约产生于五十年代。1951年美国数学家贝尔曼（R·Bellman）等人，根据多阶段决策问题的特性，提出了解决这类问题的“最优化原理”，并研究了许多实际问题，从而创造了解决最优化问题的一种新方法，即“动态规划”（Dynamic Programming）。他写的名著《Dynamic Programming》于1957年出版。该书是动态规划的第一本著作。

动态规划的方法在工程技术、经济、工业生产及军事等部门中都有广泛的应用，并且获得了显著的效果。近年来，又广泛用于最优控制方面。许多问题利用动态规划的方法去处理，常比线性规划或非线性规化更有成效。特别对于离散性问题，由于解析数学无法施展其技，而动态规划的方法则成为解决它的一个非常有用的工具。但是，动态规划方法也存在两大弱点：

一是利用“最优化原理”得出动态规划的函数方程后，尚没有一种统一的处理方法，必须根据问题的各种性质结合其它数学技巧来求解。

二是所谓“维数障碍”，即当问题的状态变量个数（维数）太多时，由于计算机存贮器容量和计算速度的限制，而无法解决。

动态规划模型的分类：

根据决策过程的时间参量是离散的还是连续的变量，过程分为离散（多段）决策过程和连续决策过程。根据决策过程的演变是确定性的还是随机性的，过程又可分为确定性决策过程和随机性决策过程。组合起来就有四种决策过程模型：离散确定性型、离散随机性型、连续确定性型及连续随机性型。

下面我们主要研究离散确定性过程，但书中建立的概念、理论和方法也是整个动态规划的基础内容。

§1—2 动态规划的基本概念

在引言中我们谈到动态规划是研究多阶段决策过程最优化的一种方法，为了进一步叙述动态规划的基本思想、基本方程及动态规划模型的构成，本节仍以上节的路线问题（见图1—2）为例，介绍动态规划的基本概念。

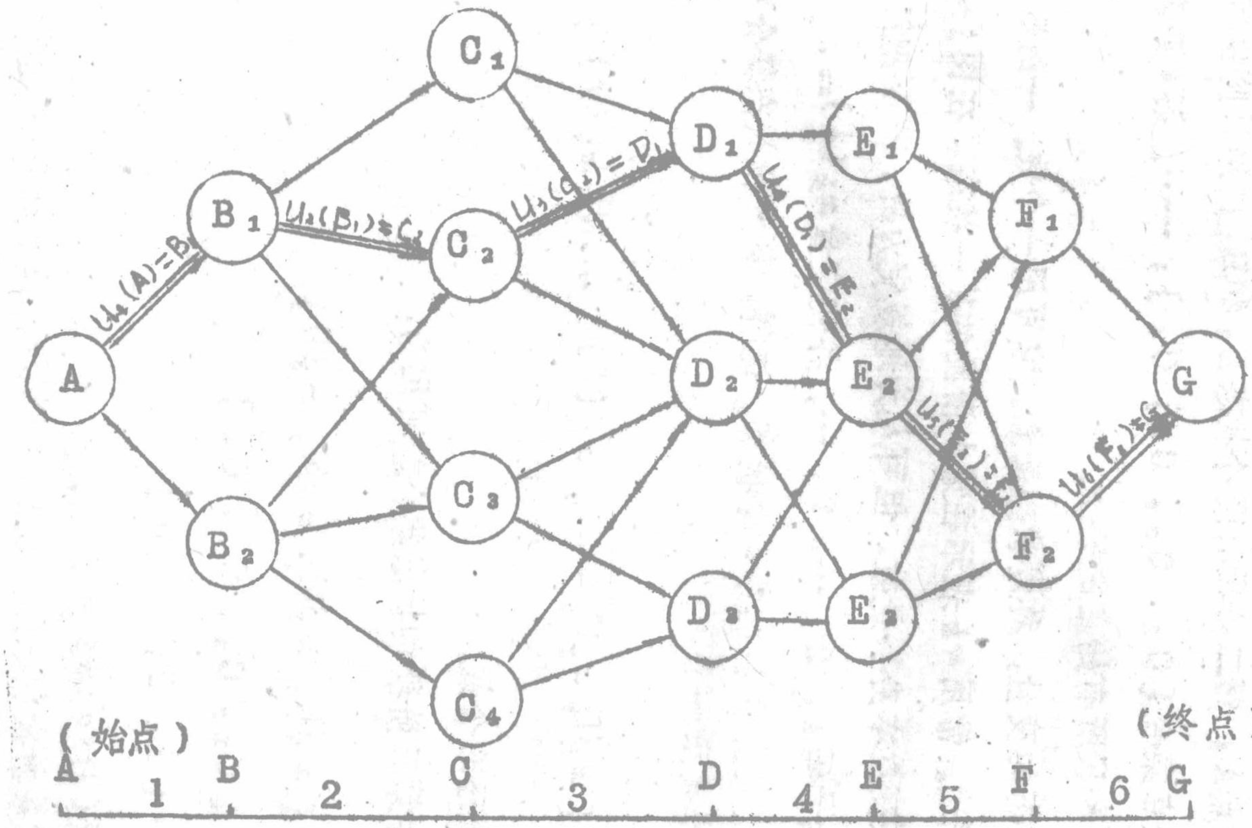
一、阶段（*Stage*）

阶段是把所给问题的过程恰当地划分成若干个相互联系的段，以便求解。通常用 k 表示阶段变量。阶段的编号都采用顺序编号。

如路线问题中（见图1—2），我们将问题分成6个阶段来求解。编号为1，2，3，4，5，6。第一阶段包括两条支路：AB_1、AB_2；第二阶段包括有6条支路：B_1C_1、B_1C_2、B_1C_3 B_2C_2、B_2C_3、B_2C_4。依此类推。

二、状态（*State*）

状态表示某段的出发位置。它既是该段某支路的始点，同时


A
B1
B2
C1
C2
C3
C4
D1
D2
D3
E1
E2
E3
F1
F2
G
u1(A)=B1
u2(B1)=C2
u3(C2)=D1
u4(D1)=E2
u5(E2)=F2
u6(F2)=G
（始点）
（终点）
A 1 B 2 C 3 D 4 E 5 F 6 G

图（1—2）

也是前一段某支路的终点。如B_1既是B_1C_1的始点，又是AB_1的终点。通常一个阶段包含若干个状态。如在图1—2中，第一阶段有一个状态就是点A；第二阶段有两个状态B_1和B_2；第三阶段有四个状态，即是点集合$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$；……。第k阶段状态集合就是第k段所有始点的集合。

描述过程状态的变量，称为状态变量。它可用一个数、一组数或一个向量来描述。常用x_k表示在第k阶段的某一状态，在图1—2中，虽然状态变量本身不是数，但可人为地规定为数，只要把第k段所有状态编上号码1，2，…，i，…，并使变量$x_k(i)=i$。记记号$x_k(i)$表示在第k段的第i个状态。这样，第k段状态集合可表示为：

$$X_k=\{x_k(1), x_k(2), \ldots\ldots, x_k(i), \ldots\ldots, x_k(r)\}$$

r表示第k段状态的个数。

图1—2中第三阶段的状态集合就可记为：

$$\begin{aligned} X_3 &= \{x_3(1), x_3(2), x_3(3), x_3(4)\} \\ &= \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

三、决策(Decision)

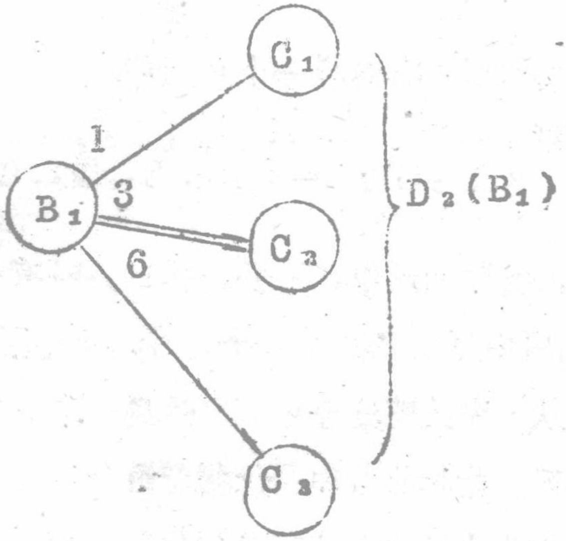
决策就是某阶段状态给定以后，从该状态演变到下一阶段某状态的选择。描述决策的变量，称为决策变量，象状态变量一样，它可用一个数、一组数或一向量来描述。常用$U_k(x_k)$表示第k段当状态处于x_k时的决策变量。在实际问题中，决策变量的取值往往限制在某一范围之内，此范围称为允许决策集合。通常以$D_k(x_k)$表示第k段的允许决策集合。显然有 $U_k(x_k)\in D_k(x_k)$

如图1—2中，在第二阶段假设已选择走B_1，那么，从B_1出发，下一步可能走的点只有C_1，C_2，C_3（见图1—3）。

即决策集合为：

$D_2(B_1)=\{C_1, C_2, C_3\}$

若下一步选择走C_2，则决策变量$U_2(B_1)=C_2$。



图（1—3）

四、策略（*Policy*）

由过程的第一阶段开始到终点为止的过程，称为问题的全过程。由每段的决策$U_i(x_i)$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）组成的决策函数序列就称为全过程策略，简称策略，记为$p_{k,n}$。

$$p_{1n}(x_1)=\{U_1(x_1), U_2(x_2), \cdots\cdots, U_n(x_n)\}$$

如图1—2中，其中一策略为：

$$p_{1,6}(A)=\{A, B_1, C_2, D_2, E_2, F_2, G\}$$

由第k段开始到终点为止的过程称为原过程的后部子过程（或称为k子过程）。其决策函数序列$\{U_k(x_k), \cdots\cdots, U_n(x_n)\}$称为$k$子过程策略，简称子策略，记为$p_{k,n}$。

$$P_{k,n}=\{U_k(x_k),U_{k+1}(x_{k+1}),\cdots\cdots,U_n(x_n)\}$$

如路线问题中有这样一个小策略

$$P_{4,6}(D_1)=\{D_1,E_2,F_2,G\}$$

在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，如在上节的路线问题中可以列出48个策略，此范围称为允许策略集合，用P表示。从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为最优策略。

五、指标函数和最优指标函数

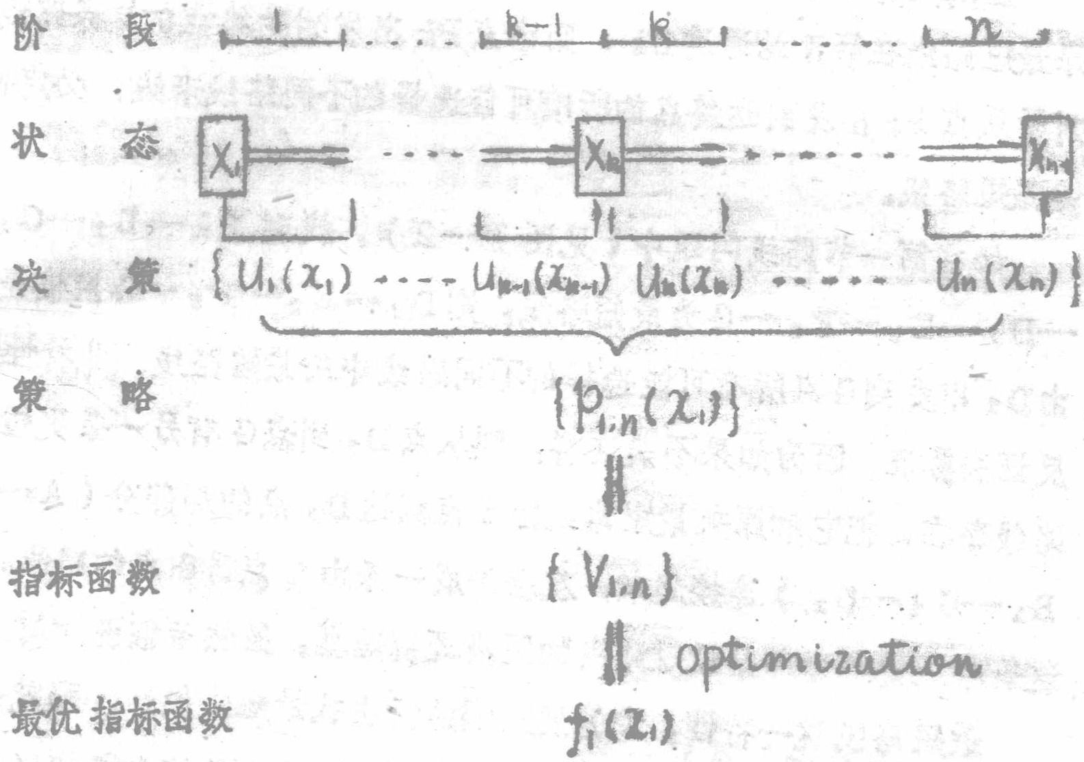
在多阶段决策过程最优化问题中，指标函数是用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，常用$V_{k,n}$表示（$k=1,2,\cdots\cdots,n$）。$V_{1,n}$表示全过程的指标函数。

在不同的问题中，指标的含义也不同，可能是距离，利润、成本、产品的产量或资源消耗等。如上节路线问题中是确定最短路线的多阶段决策问题，其指标函数$V_{k,n}$则表示在第k阶段由点x_k至终点G的距离。如子策略$\{D_1,E_2,F_2,G\}$的指标函数$V_{4,6}=7$个单位。某一阶段的指标（又称为阶段效益），在路线问题中就是某一阶段中某一支路的距离。

指标函数$V_{k,n}$通常有有限多个，上节路线问题中，$V_{1,6}$就有48个值。从有限多个指标函数值中找到的最优值，称为相应的最优指标函数，记为$f_k(x_k)$。如上节路线问题中$f_1(A)$表示从A点到G点的最短距离。$f_1(A)=18$个单位。

动态规划的基本概念我们可以用图1—4来表示它们之间的相

互关系。



（图1—4）

§1—3 动态规划的基本思想

在日常生活中，大家都有这样的经验，如果 从宿舍门口出发，经过图书馆、实验大楼、科研楼，院办公大楼到食堂这条路线是从宿舍到食堂的最短路线，当然谁也不会怀疑从科研楼到食堂的最短路线为：

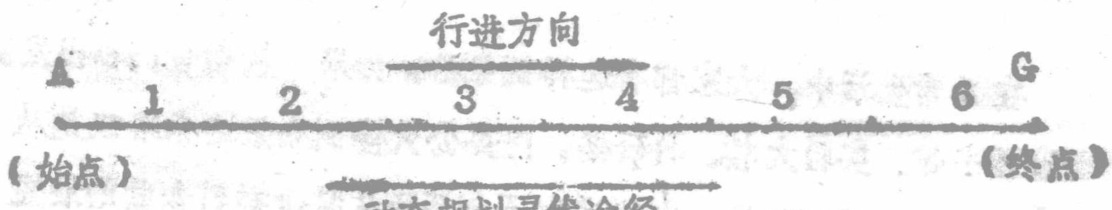
科研楼—院办公大楼—食堂

生活中这种平常的事例，深刻揭示了最短路线的重要特性。即如果最短路线在第K站通过D_k，则由点P_k出发到达终点的这条路线，对于从点P_k出发到达终点的所有可能选择的不同路线来说，必定也是最短路线。

如在第一节路线问题中（见图1—2），找到了$A—B_2—C_2—D_2—E_2—F_2—G$为最短路线，则$D_2—E_2—F_2—G$应该是由D_2出发到G点所有可能选择的不同路线中的最短路线。此特性用反证法易证。因为如果不是这样，则从点D_2到点G有另一条更短的路线存在，把它和原来最短路线由A点到达D_2点的那部分（$A—B_2—C_2—D_2$）连接起来，就会形成一条由A点到G点的路线，这条路线比原来那条最短路线的距离还要短些，显然与假设矛盾。

最短路线这一特性，它启发我们如何去找最短路线。那就是从最后一段开始，由后向前逐步递推，求出各点到G点的最短路线，最后求得由A点到G点的最短路线。这一思想就是动态规划解决多阶段决策过程最优化的基本思想。

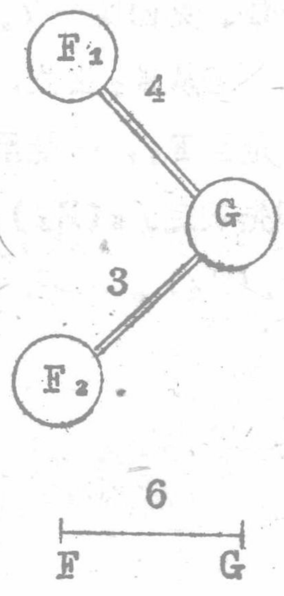
对于最短路线问题，动态规划的方法就是从终点逐段向始点寻找最短路线。如图1—5所示。



（图1—5）

下面我们按照动态规划的方法，将第一节中的路线问题从最后一段开始计算每点到终点的最短路线的距离，由后向前逐步推移至始点A，以求得全过程的最短路线。

当$k=6$时，从图1—2知，第6阶段有两个状态，即点F_1、点F_2。显而易见，由F_1至G的最短距离为$f_6(F_1)=4$。由F_2至G的最短距离为$f_6(F_2)=3$。见图1—6所示。



（图1—6）

当$k=5$时，第五阶段有E_1、E_2、E_3三个状态。由E_1至G有两个选择，一是走F_1，一是走F_2，为了确定决策变量$U_5(E_1)$，我们先求$f_5(E_1)$。即E_1到G的最短距离。

$$f_5(E_1)=min\left\{\begin{array}{l}d_5(E_1,F_1)+f_6(F_1)\\ d_5(E_1,F_2)+f_6(F_2)\end{array}\right\}$$

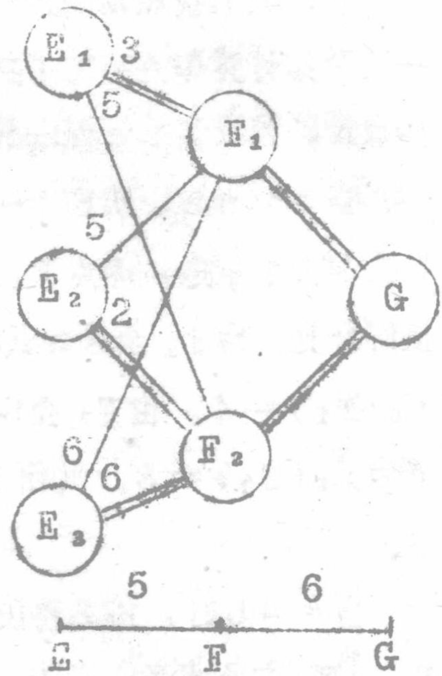
$$=min\left\{\begin{array}{c}3+4\\ 5+3\end{array}\right\}$$

$$=7$$

式中$d_5(E_1,F_1)$表示第5阶段由点E_1到F_1的距离，下以类推。

由此可见，E_1至G的最短距离为7个单位，且通过F_1，即$U_5(E_1)=F_1$。最短路线为$E_1—F_1—G$。见图1—7。

若从E_2出发，也有两个选择，一是至F_1，一是至F_2。同样，我们先确定$f_5(E_2)$，由此再确定$U_5(E_2)$。



（图1—7）

$$f_5(E_2)=min\left\{\begin{matrix}d_5(E_2,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_2,F_2)+f_6(F_2)\end{matrix}\right\}$$

$$=min\left\{\begin{matrix}5+4\\2+3\end{matrix}\right\}$$

$$=5$$

可见，E_2至G的最短距离为5个单位，且通过F_2。即$U_5(E_2)=F_2$。最短路线为$E_2—F_2—G$。见图1—7。

同理，从E_3出发，有