21世纪高等院校规划教材

概率论与数理统计

◎ 余 敏 刘修生 主编

Gailülun yu Shulitongji

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

概率论与数理统计

主　编　余　敏　刘修生
副主编　程良炎　陈金和

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/余　敏　刘修生　主编. -2 版
武汉:华中科技大学出版社,2006 年 2 月
ISBN 7-5609-3649-0

Ⅰ. 概…
Ⅱ. ①余…　②刘…
Ⅲ. 概率论;数理统计
Ⅳ. O21

概率论与数理统计　　余　敏　刘修生　主编

责任编辑:曾　光　张　毅　　封面设计:刘　卉
责任校对:吴　晗　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉万卷鸿图科技有限公司
印　刷:武汉首壹印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:8.375　　字数:198 000
版次:2006 年 2 月第 2 版　　印次:2006 年 2 月第 2 次印刷　　定价:13.00 元
ISBN 7-5609-3649-0/O・382

内 容 简 介

全书内容由两大部分组成，共分 8 章，前 5 章是概率论部分，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，后 3 章是数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念、参数估计与假设检验。

本书适合作为高等院校工科、理科（非数学专业）各专业教材，也可供自学者选用。

前　言

概率论与数理统计是研究现实世界中随机现象统计规律性的学科，是一门应用性较强的数学基础课。在社会、经济和科学技术中广泛存在着随机现象，需要用概率统计方法去分析和处理各种带随机干扰的数据，直至作出科学的决策。随着计算机技术的飞速发展，概率统计的应用领域不断拓展，研究内容也日益更新。因此，对原有的课程体系和教学内容进行改革，剔除陈旧的内容，吸收先进的成果，编写一本既能加强基础知识与提高应用能力，又能将传统知识与实际相结合起来，同时贴近学生接受能力，紧扣这门课程教学大纲的具有时代特色的概率统计教材，是工科数学教学改革的要求，也是我们追求的目标。

基于这个目标，本书在编写过程中遵循了如下原则：内容详略得当，叙述简明易懂，重点难点处理适度，例题习题选取兼顾基础与提高、理论与应用。

本书共8章，依据高等院校工科数学课程指导委员会审订的《概率论与数理统计教学基本要求》定为48学时，其分配如下：第1章8学时，第2章8学时，第3章7学时，第4章6学时，第5章3学时，第6章4学时，第7章6学时，第8章6学时。

本书由余敏、刘修生任主编，程良炎、陈金和任副主编。各章编写分工如下：第1章，舒和智；第2章，余敏；第3章，程良炎；第4章，刘修生；第5章，张晓燕；第6章，李慧、余敏；第7章，陈金和；第8章，卢旭升。全书由刘修生和余敏统稿。

在本书编写过程中得到了黄石理工学院教务处、数理学院的大力支持和协助，在此一并表示感谢。

限于编者水平，书中难免出现不当之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2005年12月8日

目　录

第 1 章　随机事件与概率

在日常生活以及科学研究活动中，人们常会遇到两类现象：一类是在一定条件下必然发生（或必然不发生）的现象，例如，向上抛一物体必然下落，同性电荷必不相互吸引等，这类现象称为确定性现象；另一类现象是在一定条件下其结果呈现出不确定性，例如，任意抛一枚硬币，其结果可能是"币值"面朝上，也可能是"徽花"面朝上，又如某工厂在同一种工艺条件下生产的产品的寿命，等等. 这种在一定条件下具有多种可能的试验结果，但事先无法确定会出现什么结果的现象称为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

随着科学技术的进步与发展，概率论与数理统计的理论和方法的应用越来越广泛，几乎遍及科学技术、工农业生产和国民经济的各个领域.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件的概念

为了揭示随机现象的规律性，就要对随机现象进行观察、试验. 为了叙述的方便，我们把对随机现象进行的观察或试验，都称为试验.

如果一个试验具有下列特点：

(1) 在相同的条件下可以重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，试验的所有可能结果事

先可以确定；

(3) 在进行每次试验之前，不能确定其中哪一种结果会出现。则称这种试验为**随机试验**，简称**试验**.

例 1 掷一枚骰子，观察出现的点数.

例 2 从装有 10 只红球、10 只白球的盒子中任意摸出 5 只球，记录其中的白球数.

例 3 观察灯泡厂生产出的一批灯泡的使用寿命.

例 4 多次用指定的测量工具测量某物体的长度，由于种种因素的干扰，各次测量得到的数值不一定相同，它们应该是在某值 l 附近的一个实数值.

上述四个试验都是随机试验. 今后我们通过随机试验对随机现象进行研究.

在随机试验中，可能发生也可能不发生（而在大量试验中具有某种规律性）的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 随机事件通常用英文大写字母 A,B,C 等表示.

在随机事件中，有些是试验中可能直接发生的结果. 例如：例 1 中，出现的点数“1 点”，“2 点”，…，“6 点”；例 2 中，取出的白球数 $i(i=0,1,2,3,4,5)$；例 3 中，灯泡的使用寿命 $\mu(\mu\geqslant 0)$；例 4 中，测量值 $x(l-\alpha<x<l+\alpha)$，这都是随机事件. 这一类最简单的事件在每次试验中，有且仅有一个会发生，称之为**基本事件**.

另一类随机事件是用来描述试验中所关心的某些可能发生的结果，它们可以看做是由某些基本事件组合而成的，可称之为**复合事件**. 如例 1 中，出现“偶数点”，记为 A，它也是随机事件，但它不是基本事件，它是由“2 点”、“4 点”、“6 点”这三个基本事件组成的，可记为 $A=\{2\text{点},4\text{点},6\text{点}\}$. 只要上面三个基本事件中的一个出现，复合事件“偶数点”就出现. 显然，基本事件是不能分解为其他事件组合的. 又如，灯泡的使用寿命在 1 000 小时以上也是复合事件，等等.

在每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，记做 Ω . 必然不发生的事件称为**不可能事件**，记做 ϕ. 应该指出，必然事件和不可能事件都具有确定性，但是为了今后研究的方便，我们将这两种事件看做特殊的随机事件.

1.1.2 样本空间

随机试验中所有可能发生的基本结果的全体，也就是基本事件的全体称为试验的**样本空间**，记做 Ω . 样本空间的每一个元素，即试验的每一个可能发生的基本结果，称为**样本点**. 为了表达的方便，可以用适当的记号或数字来表示样本点，用样本点的集合来表示样本空间.

例 1 中，用 e_i 表示"出现 i 点"，则

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

例 2 中，记白球的个数为 $i(i = 0,1,2,3,4,5)$ 则

$$\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$$

例 3 中，用 t 表示灯泡的寿命，则

$$\Omega = \{t \geqslant 0 \mid t \text{ 的取值单位为小时}\}$$

例 4 中，某物体长度的理论值为 l，测量值为 x，则

$$\Omega = \{x \mid l - \alpha < x < l + \alpha, \alpha \text{ 为很小的实数}\}$$

由于样本空间 Ω 包含试验的所有可能发生的基本结果，而每次试验总有其中一个结果会发生，所以 Ω 为必然事件.

样本空间是概率论中一个重要的概念，它把事件与集合联系起来，用集合来表达和分析事件. 例如，前面描述的复合事件是由某些基本事件组合的，所以，复合事件可看做样本空间 Ω 的子集，而基本事件是 Ω 的单点子集，不可能事件 ϕ 看做空集. 设 A 为样本空间 Ω 的任一子集，当 A 中所含基本事件之一发生，则事件 A 就发生.

1.1.3 事件间的关系及其运算

在实际问题中,往往要同时研究几个随机事件及它们之间的关系.例如,在检查某些圆柱形产品时,要求它的长度和直径都符合规格才算合格,那么,“产品合格”与“长度合格”及“直径合格”等事件之间是有联系的,因此,有必要讨论事件之间的关系及运算.

(1) 如果事件A发生必然导致事件B发生,则称事件B**包含**事件A,或称事件A是事件B的**子事件**,记做$A \subset B$(或$B \supset A$).

如果$A \subset B$且$B \subset A$,则称事件A与事件B**相等**,记做$A = B$.对任一事件A,规定$\phi \subset A$,而$A \subset \Omega$.

(2) 事件A与事件B中至少有一个发生所构成的事件,称为事件A与B的**和事件**,记做$A \cup B$.例如

$$\{\text{产品不合格}\} = \{\text{直径不合格}\} \cup \{\text{长度不合格}\}$$

类似可规定有限个事件$A_i(i = 1,2,\cdots,n)$的和,并记做$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.可数多个事件$A_i(i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$的和,记做$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots$,简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(3) 事件A与事件B同时发生所构成的事件称为事件A与B的**积事件**,记做$A \cap B$,或简记做AB.例如,$\{$产品合格$\} = \{$直径合格$\} \cap \{$长度合格$\}$.

类似可规定有限个事件$A_i(i = 1,2,\cdots,n)$的积,并记做$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$,简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.可数多个事件$A_i(i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$的积,记做$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i \cap \cdots$,简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 如果事件A与事件B不能同时发生,即$AB = \phi$,则称事件A与B**互斥**(**或互不相容**),例如,“直径不合格”与“产品合格”互斥.

对于互斥事件A与B,可以把$A \cup B$记做$A + B$.如果一组事件

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个都互斥，则称这组事件**两两互斥**，这时，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，记做 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

样本空间中基本事件是两两互斥的.

(5) 如果事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \phi$，则称事件 A 与 B **互逆(或对立)**，记做 $A = \bar{B}$，或 $B = \bar{A}$. 例如“直径合格”与“直径不合格”是互逆事件.

注意　互斥事件与互逆事件之间的相互关系是互逆则一定互斥，但反之不然.

(6) 由事件 A 发生，而事件 B 不发生所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记做 $A - B$. 例如

{直径合格但长度不合格} = {直径合格} - {长度合格}

显然，$A - B = A\bar{B}$，$\bar{A} = \Omega - A$.

为了直观，我们用平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的点表示基本事件，则事件间的关系及运算可用类似于集合的直观图形表示，如图 1-1 所示，图中两个小圆形分别表示事件 A 与事件 B.

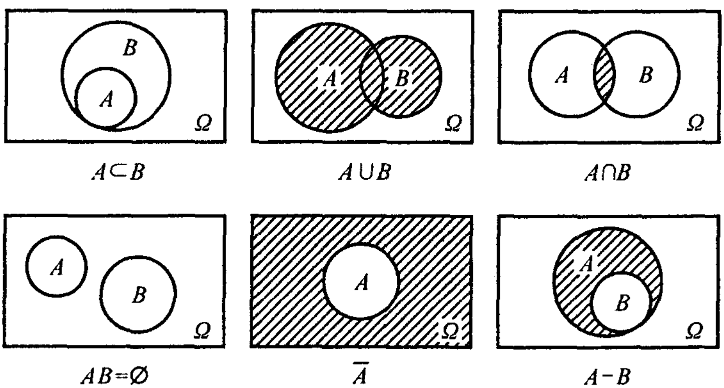

图 1-1

由于随机事件是样本空间Ω的子集,不可能事件用空集表示,而必然事件可以用样本空间Ω(作为它自身的子集)来表示.那么,把随机事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算比较,可以看到两者的关系及运算是一致的.所以关于集合的一些术语记号,也可以描述事件之间的关系及运算.从而,集合之间的运算性质,对随机事件的运算都成立,列举以下几条性质.

(1) 传递关系:若$A \subset B, B \subset C$,则$A \subset C$.

(2) 交换律:$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(3) 结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(4) 分配律:$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5) 对偶律:$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

注意 对偶律可推广到任意有限多个及可数个事件.

例5 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回),设事件$A_i(i = 1,2,3)$表示第i次取到合格品.试用A_1, A_2, A_3表示下列事件.

(1) 三次都取到了合格品.

(2) 三次中至少有一次取到了合格品.

(3) 三次中恰有两次取到了合格品.

(4) 三次中最多有一次取到了合格品.

(5) 三次中不多于两次取到了合格品.

解 (1) "三次都取到了合格品"即事件A_1, A_2, A_3都发生,所以这事件可以表示为$A_1A_2A_3$.

(2) "三次中至少有一次取到了合格品"即事件A_1, A_2, A_3中至少有一个发生,所以事件可以表示为$A_1 \cup A_2 \cup A_3$,也可以表示为$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$.

(3)“三次中恰有两次取到了合格品”即三个事件 A_1,A_2,A_3 中,有其中两个事件发生,另一个事件不发生,所以这事件可以表示为 $A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$.

(4)“三次中最多有一次取到了合格品”即三个事件 A_1,A_2,A_3 中,有其中一个事件发生,而另两个事件不发生,或三个事件都不发生,所以这事件可以表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$,也可以表示为 $\overline{A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3}$.

(5)“三次中不多于两次取到了合格品”即三个事件 A_1,A_2,A_3 都发生的逆事件,所以这事件可以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$,也可以表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

1.2 随机事件的概率

虽然随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,这表现了随机事件偶然性的一面,但在大量重复的试验中,人们还是可以发现它内在的规律性,即随机事件发生的可能性大小是可以“度量”的. 随机事件的**概率**就是度量随机事件发生的可能性大小的一个数字.

概率论中的一个最基本的问题就是给随机事件的概率一个科学的“度量”.

本节将以概率论的历史发展过程为背景,给出概率的古典定义、统计定义和公理化定义.

1.2.1 概率的古典定义

具有以下特征的一类简单的随机试验模型,称为**古典概型**(概型是概率模型的简称).

(1)试验的样本空间中只有有限个基本事件;

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.