

21 世纪高等院校规划教材

概率论与数理统计

◎ 余 敏 刘修生 主编

Gailülun
yu Shulitongji

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

概率论与数理统计

主 编 余 敏 刘修生
副主编 程良炎 陈金和

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/余 敏 刘修生 主编. -2 版
武汉:华中科技大学出版社,2006 年 2 月
ISBN 7-5609-3649-0

I. 概…

II. ①余… ②刘…

III. 概率论;数理统计

IV. O21

概率论与数理统计

余 敏 刘修生 主编

责任编辑:曾 光 张 毅

封面设计:刘 卉

责任校对:吴 晗

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉万卷鸿图科技有限公司

印 刷:武汉首壹印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:8.375

字数:198 000

版次:2006 年 2 月第 2 版

印次:2006 年 2 月第 2 次印刷

定价:13.00 元

ISBN 7-5609-3649-0/O · 382

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

全书内容由两大部分组成,共分8章,前5章是概率论部分,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理,后3章是数理统计部分,内容包括数理统计的基本概念、参数估计与假设检验。

本书适合作为高等院校工科、理科(非数学专业)各专业教材,也可供自学者选用。

前 言

概率论与数理统计是研究现实世界中随机现象统计规律性的学科,是一门应用性较强的数学基础课。在社会、经济和科学技术中广泛存在着随机现象,需要用概率统计方法去分析和处理各种带随机干扰的数据,直至作出科学的决策。随着计算机技术的飞速发展,概率统计的应用领域不断拓展,研究内容也日益更新。因此,对原有的课程体系和教学内容进行改革,剔除陈旧的内容,吸收先进的成果,编写一本既能加强基础知识与提高应用能力,又能将传统知识与实际相结合起来,同时贴近学生接受能力,紧扣这门课程教学大纲的具有时代特色的概率统计教材,是工科数学教学改革的要求,也是我们追求的目标。

基于这个目标,本书在编写过程中遵循了如下原则:内容详略得当,叙述简明易懂,重点难点处理适度,例题习题选取兼顾基础与提高、理论与应用。

本书共8章,依据高等院校工科数学课程指导委员会审订的《概率论与数理统计教学基本要求》定为48学时,其分配如下:第1章8学时,第2章8学时,第3章7学时,第4章6学时,第5章3学时,第6章4学时,第7章6学时,第8章6学时。

本书由余敏、刘修生任主编,程良炎、陈金和任副主编。各章编写分工如下:第1章,舒和智;第2章,余敏;第3章,程良炎;第4章,刘修生;第5章,张晓燕;第6章,李慧、余敏;第7章,陈金和;第8章,卢旭升。全书由刘修生和余敏统稿。

在本书编写过程中得到了黄石理工学院教务处、数理学院的大力支持和协助,在此一并表示感谢。

限于编者水平,书中难免出现不当之处,欢迎读者批评指正。

编 者

2005年12月8日

目 录

第 1 章 随机事件与概率	(1)
1.1 随机事件及其运算	(1)
1.1.1 随机事件的概念	(1)
1.1.2 样本空间	(3)
1.1.3 事件间的关系及其运算	(4)
1.2 随机事件的概率	(7)
1.2.1 概率的古典定义	(7)
1.2.2 概率的统计定义	(11)
1.2.3 概率的公理化定义	(12)
1.3 条件概率	(15)
1.3.1 条件概率	(15)
1.3.2 乘法定理	(17)
1.3.3 全概率公式	(18)
1.3.4 贝叶斯公式	(21)
1.4 独立性与贝努里概型	(22)
1.4.1 事件的相互独立性	(22)
1.4.2 贝努里概型	(25)
习题 1	(27)
第 2 章 随机变量及其分布	(35)
2.1 随机变量	(35)
2.2 离散型随机变量	(37)
2.2.1 离散型随机变量及其分布律	(37)
2.2.2 几个常见的离散型随机变量及其分布	(39)

2.3	随机变量的分布函数	(44)
2.3.1	分布函数的定义	(44)
2.3.2	分布函数的性质	(48)
2.4	连续型随机变量	(48)
2.4.1	连续型随机变量及其概率密度	(48)
2.4.2	几个常见的连续型随机变量的分布	(51)
2.5	随机变量函数的分布	(61)
2.5.1	离散型随机变量函数的分布	(61)
2.5.2	连续型随机变量的函数及其概率密度	(62)
	习题2	(64)
第3章	多维随机变量及其分布	(72)
3.1	二维随机变量	(72)
3.1.1	二维随机变量及其分布	(72)
3.1.2	二维离散型随机变量及其分布	(74)
3.1.3	二维连续型随机变量及其概率密度	(77)
3.2	条件分布	(81)
3.2.1	离散型随机变量的条件分布	(82)
3.2.2	连续型随机变量的条件分布	(84)
3.3	随机变量的独立性	(85)
3.4	两个随机变量函数的分布	(88)
	习题3	(96)
第4章	随机变量的数字特征	(102)
4.1	数学期望	(102)
4.1.1	离散型随机变量的数学期望	(102)
4.1.2	连续型随机变量的数学期望	(105)
4.1.3	二维随机变量的数学期望	(107)
4.1.4	随机变量函数的数学期望	(108)
4.1.5	数学期望的性质	(111)

4.2	方差	(115)
4.2.1	方差的定义	(115)
4.2.2	方差的性质	(117)
4.3	协方差与相关系数	(123)
4.3.1	协方差	(124)
4.3.2	相关系数	(124)
4.4	矩 协方差矩阵	(127)
	习题4	(131)
第5章	大数定律与中心极限定理	(138)
5.1	契比雪夫不等式	(138)
5.2	大数定律	(139)
5.3	中心极限定理	(143)
	习题5	(148)
第6章	数理统计的基本概念	(151)
6.1	总体与样本	(152)
6.2	统计量与直方图	(153)
6.2.1	统计量	(153)
6.2.2	直方图	(154)
6.3	抽样分布	(156)
	习题6	(164)
第7章	参数估计	(167)
7.1	点估计	(167)
7.1.1	点估计	(167)
7.1.2	矩法	(168)
7.1.3	极大似然估计法	(170)
7.2	估计量的评价标准	(173)
7.2.1	无偏性	(173)
7.2.2	有效性	(175)

7.2.3 一致性	(176)
7.3 区间估计	(177)
7.3.1 置信区间确定方法	(177)
7.3.2 单个正态总体均值 μ 的置信区间	(179)
7.3.3 单个正态总体方差 σ^2 的置信区间	(181)
7.3.4 两个正态总体均值差的置信区间	(182)
7.3.5 两个正态总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间	(185)
习题 7	(187)
第 8 章 假设检验	(191)
8.1 假设检验的基本概念	(191)
8.1.1 假设检验问题的提出	(191)
8.1.2 假设检验的基本思想及其推理方法	(192)
8.1.3 显著水平与两类错误	(193)
8.1.4 假设检验的处理步骤	(194)
8.2 单个正态总体均值与方差的假设检验	(195)
8.2.1 σ^2 已知, 对单个正态总体均值 μ 的 U 检验法 ..	(195)
8.2.2 σ^2 未知, 对单个正态总体均值 μ 的 t 检验法 ..	(198)
8.2.3 均值 μ 未知, 对单个正态总体方差 σ^2 的 χ^2 检验法	(200)
8.3 两个正态总体均值与方差的假设检验	(201)
8.3.1 两个正态总体均值的比较	(202)
8.3.2 两个正态总体方差齐性的假设检验	(206)
8.3.3 置信区间与假设检验	(208)
8.4 总体分布假设的 χ^2 检验法	(209)
习题 8	(217)
习题答案	(223)

附表 1	标准正态分布表	(237)
附表 2	普阿松分布表	(239)
附表 3	χ^2 分布表	(241)
附表 4	t 分布表	(244)
附表 5	F 分布表	(246)
参考文献		(258)

第 1 章 随机事件与概率

在日常生活以及科学研究活动中,人们常会遇到两类现象:一类是在一定条件下必然发生(或必然不发生)的现象,例如,向上抛一物体必然下落,同性电荷必不相互吸引等,这类现象称为确定性现象;另一类现象是在一定条件下其结果呈现出不确定性,例如,任意抛一枚硬币,其结果可能是“币值”面朝上,也可能是“徽花”面朝上,又如某工厂在同一种工艺条件下生产的产品的寿命,等等.这种在一定条件下具有多种可能的试验结果,但事先无法确定会出现什么结果的现象称为随机现象.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

随着科学技术的进步与发展,概率论与数理统计的理论和方法的应用越来越广泛,几乎遍及科学技术、工农业生产和国民经济的各个领域.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件的概念

为了揭示随机现象的规律性,就要对随机现象进行观察、试验.为了叙述的方便,我们把对随机现象进行的观察或试验,都称为试验.

如果一个试验具有下列特点:

- (1) 在相同的条件下可以重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个,试验的所有可能结果事

先可以确定;

(3) 在进行每次试验之前,不能确定其中哪一种结果会出现. 则称这种试验为随机试验,简称试验.

例 1 掷一枚骰子,观察出现的点数.

例 2 从装有 10 只红球、10 只白球的盒子中任意摸出 5 只球,记录其中的白球数.

例 3 观察灯泡厂生产出的一批灯泡的使用寿命.

例 4 多次用指定的测量工具测量某物体的长度,由于种种因素的干扰,各次测量得到的数值不一定相同,它们应该是在某值 l 附近的一个实数值.

上述四个试验都是随机试验. 今后我们通过随机试验对随机现象进行研究.

在随机试验中,可能发生也可能不发生(而在大量试验中具有某种规律性)的结果称为随机事件,简称事件. 随机事件通常用英文大写字母 A, B, C 等表示.

在随机事件中,有些是试验中可能直接发生的结果. 例如:例 1 中,出现的点数“1 点”,“2 点”, $\dots$ “6 点”;例 2 中,取出的白球数 i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$);例 3 中,灯泡的使用寿命 μ ($\mu \geq 0$);例 4 中,测量值 x ($l - \alpha < x < l + \alpha$),这都是随机事件. 这一类最简单的事件在每次试验中,有且仅有一个会发生,称之为基本事件.

另一类随机事件是用来描述试验中所关心的某些可能发生的结果,它们可以看做是由某些基本事件组合而成的,可称之为复合事件. 如例 1 中,出现“偶数点”,记为 A ,它也是随机事件,但它不是基本事件,它是由“2 点”、“4 点”、“6 点”这三个基本事件组成的,可记为 $A = \{2 \text{ 点}, 4 \text{ 点}, 6 \text{ 点}\}$. 只要上面三个基本事件中的一个出现,复合事件“偶数点”就出现. 显然,基本事件是不能分解为其他事件组合的. 又如,灯泡的使用寿命在 1 000 小时以上也是复合事件,等等.

在每次试验中必然发生的事件称为必然事件,记做 Ω . 必然不发生的事件称为不可能事件,记做 ϕ . 应该指出,必然事件和不可能事件都具有确定性,但是为了今后研究的方便,我们将这两种事件看做特殊的随机事件.

1.1.2 样本空间

随机试验中所有可能发生的基本结果的全体,也就是基本事件的全体称为试验的样本空间,记做 Ω . 样本空间的每一个元素,即试验的每一个可能发生的基本结果,称为样本点. 为了表达的方便,可以用适当的记号或数字来表示样本点,用样本点的集合来表示样本空间.

例 1 中,用 e_i 表示“出现 i 点”,则

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

例 2 中,记白球的个数为 i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 则

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

例 3 中,用 t 表示灯泡的寿命,则

$$\Omega = \{t \geq 0 \mid t \text{ 的取值单位为小时}\}$$

例 4 中,某物体长度的理论值为 l ,测量值为 x ,则

$$\Omega = \{x \mid l - \alpha < x < l + \alpha, \alpha \text{ 为很小的实数}\}$$

由于样本空间 Ω 包含试验的所有可能发生的基本结果,而每次试验总有其中一个结果会发生,所以 Ω 为必然事件.

样本空间是概率论中一个重要的概念,它把事件与集合联系起来,用集合来表达和分析事件. 例如,前面描述的复合事件是由某些基本事件组合的,所以,复合事件可看做样本空间 Ω 的子集,而基本事件是 Ω 的单点子集,不可能事件 ϕ 看做空集. 设 A 为样本空间 Ω 的任一子集,当 A 中所含基本事件之一发生,则事件 A 就发生.

1.1.3 事件间的关系及其运算

在实际问题中,往往要同时研究几个随机事件及它们之间的关系.例如,在检查某些圆柱形产品时,要求它的长度和直径都符合规格才算合格,那么,“产品合格”与“长度合格”及“直径合格”等事件之间是有联系的,因此,有必要讨论事件之间的关系及运算.

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 是事件 B 的子事件,记做 $A \subset B$ (或 $B \supset A$).

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记做 $A = B$.
对任一事件 A ,规定 $\phi \subset A$,而 $A \subset \Omega$.

(2) 事件 A 与事件 B 中至少有一个发生所构成的事件,称为事件 A 与 B 的和事件,记做 $A \cup B$.例如

$$\{\text{产品不合格}\} = \{\text{直径不合格}\} \cup \{\text{长度不合格}\}$$

类似可规定有限个事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的和,并记做 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$,简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$.可数多个事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 的和,记做 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots$,简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(3) 事件 A 与事件 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的积事件,记做 $A \cap B$,或简记做 AB .例如, $\{\text{产品合格}\} = \{\text{直径合格}\} \cap \{\text{长度合格}\}$.

类似可规定有限个事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的积,并记做 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$,简记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.可数多个事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 的积,记做 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots$,简记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB = \phi$,则称事件 A 与 B 互斥(或互不相容),例如,“直径不合格”与“产品合格”互斥.

对于互斥事件 A 与 B ,可以把 $A \cup B$ 记做 $A + B$.如果一组事件

$A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个都互斥, 则称这组事件两两互斥, 这时, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 记做 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

样本空间中基本事件是两两互斥的.

(5) 如果事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \phi$, 则称事件 A 与 B 互逆(或对立), 记做 $A = \bar{B}$, 或 $B = \bar{A}$. 例如“直径合格”与“直径不合格”是互逆事件.

注意 互斥事件与互逆事件之间的相互关系是互逆则一定互斥, 但反之不然.

(6) 由事件 A 发生, 而事件 B 不发生所构成的事件, 称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记做 $A - B$. 例如

{直径合格但长度不合格} = {直径合格} - {长度合格}

显然, $A - B = A\bar{B}$, $\bar{A} = \Omega - A$.

为了直观, 我们用平面上的一个矩形表示样本空间, 矩形内的点表示基本事件, 则事件间的关系及运算可用类似于集合的直观图形表示, 如图 1-1 所示, 图中两个小圆形分别表示事件 A 与事件 B .

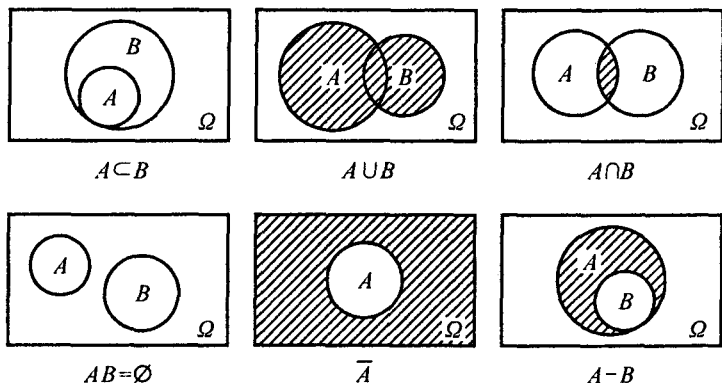


图 1-1

由于随机事件是样本空间 Ω 的子集,不可能事件用空集表示,而必然事件可以用样本空间 Ω (作为它自身的子集) 来表示. 那么,把随机事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算比较,可以看到两者的关系及运算是是一致的. 所以关于集合的一些术语记号,也可以描述事件之间的关系及运算. 从而,集合之间的运算性质,对随机事件的运算都成立,列举以下几条性质.

(1) 传递关系:若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(3) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

(4) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

注意 对偶律可推广到任意有限多个及可数个事件.

例 5 从一批产品中每次取出一个产品进行检验 (每次取出的产品不放回), 设事件 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示第 i 次取到合格品. 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件.

(1) 三次都取到了合格品.

(2) 三次中至少有一次取到了合格品.

(3) 三次中恰有两次取到了合格品.

(4) 三次中最多有一次取到了合格品.

(5) 三次中不多于两次取到了合格品.

解 (1) “三次都取到了合格品”即事件 A_1, A_2, A_3 都发生, 所以这事件可以表示为 $A_1 A_2 A_3$.

(2) “三次中至少有一次取到了合格品”即事件 A_1, A_2, A_3 中至少有一个发生, 所以事件可以表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 也可以表示为 $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$.

(3) “三次中恰有两次取到了合格品”即三个事件 A_1, A_2, A_3 中,有其中两个事件发生,另一个事件不发生,所以这事件可以表示为 $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$.

(4) “三次中最多有一次取到了合格品”即三个事件 A_1, A_2, A_3 中,有其中一个事件发生,而另两个事件不发生,或三个事件都不发生,所以这事件可以表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$,也可以表示为 $\overline{A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3}$.

(5) “三次中不多于两次取到了合格品”即三个事件 A_1, A_2, A_3 都发生的逆事件,所以这事件可以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$,也可以表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

1.2 随机事件的概率

虽然随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,这表现了随机事件偶然性的一面,但在大量重复的试验中,人们还是可以发现它内在的规律性,即随机事件发生的可能性大小是可以“度量”的. 随机事件的概率就是度量随机事件发生的可能性大小的一个数字.

概率论中的一个最基本的问题就是给随机事件的概率一个科学的“度量”.

本节将以概率论的历史发展过程为背景,给出概率的古典定义、统计定义和公理化定义.

1.2.1 概率的古典定义

具有以下特征的一类简单的随机试验模型,称为古典概型(概型是概率模型的简称).

- (1) 试验的样本空间中只有有限个基本事件;
- (2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.