数学古今谈

鲁又文编著

数学古今谈

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

数学古今谈

鲁又文　编著

·

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

·

开本 787×1092毫米　1/32　印张 10.125　插页 1　字数215,000

一九八四年九月第一版

一九八四年九月第一次印刷

印数：1—13,500

书号：~~15212·04~~　定价：1.20元

13212·81

序

研究科学的人大都喜欢读一点科学史，特别是自己所钻研的那门学科的历史。这样不仅可以了解学科的过去和发展趋势，而且还可以从前人的工作中，学习他们的思想方法和工作方法；而后者往往是更重要的。拉普拉斯曾经说过："认识一位天才的研究方法，对于科学的进步……并不比发现本身更少用处。科学研究的方法经常是极富兴趣的部分"（《宇宙体系论》）。

然而写一本科学史并不容易，这需要充分占有资料，需要有很好的理解、整理和组织这些资料的能力，此外，还需要有相当的文彩来叙述它们。过于专业化容易使人感到枯燥无味，而太追求故事情节又可能流于庸俗。尤其象数学这样历史悠久、分支繁多、抽象难懂的学科，要写它的历史，自然更是难事。这也许是多年来我们期待国内出版一部较好的世界数学史而迟迟未能如愿的原因吧！但这种情况近来逐渐有所好转，国内已陆续出版了几种这方面的书，展现在读者面前的这本"数学古今谈"就是其中之一。

本书搜集了相当丰富的资料，有些内容过去较少见到。特别是我国古代在数学上有过卓越的贡献，但外国人写的数学史中，关于这一点往往语焉不详，或者根本避而不谈；本书则对此叙述得比较翔实，这对鼓舞我国青少年攀登数学高峰是很有作用的。本书叙事流畅，通俗易懂，富有思想性

和趣味性。一些古代数学问题，由于年代久远，符号古老，往往很难看懂，书中用现代的符号将它们布列出来，使人一目了然。书中在叙述数学发展主流的同时，夹叙一些数学和数学家的故事，读起来既受益又有趣。书中对现代数学作了一些概括和普及性的介绍，有助于了解现代数学的内容、特点和各分支间的相互关系。当然，要较全面而深入地介绍现代数学的重要成果，则不是一本书和一位作者所能胜任的。

凡具有中学文化程度的人，便可以阅读全书或其中若干章节；专业水平较高的数学教师和研究人员也可能从中了解到一些过去所不知道的细节。因此，本书可以雅俗共赏，适应于很广泛的读者范围，这对数学教学和科研都会有所增益。

王梓坤

一九八一年十月

目　录

一、数学的故乡与人类文明的发源地

总观数学各学科的发展情况，使人不由想起一株巍然挺立的大树．它从大地汲取营养，由树干而分枝、分杈，枝繁叶茂，亭亭如盖．各个枝杈又时常互相交汇，不断在细分中发展，在发展中分合．时至今日，有些分支之间，似乎已然没有任何共通之处，以至不仅使非专业的人感到难以理解和接受；即使是同搞数学而分支不同的人，也有隔“支”如隔山之感．但细细推敲起来，各个分支之间却又是你中有我，我中有你．数学发展的历史恰恰是这样：社会的需要和理论彼此间的渗透把数学推向前进，并揭示出这些理论所反映的现实世界中各种关系的丰富多彩．如果溯本求源，这棵大树的幼芽，只不过是最简单的算术和几何而已．各分支的千变万化，脱离不了“数”与“形”的概念；不过在近世数学中，此二者的含义已愈加丰富罢了．

那么，哪里是这棵大树生根的故乡呢？

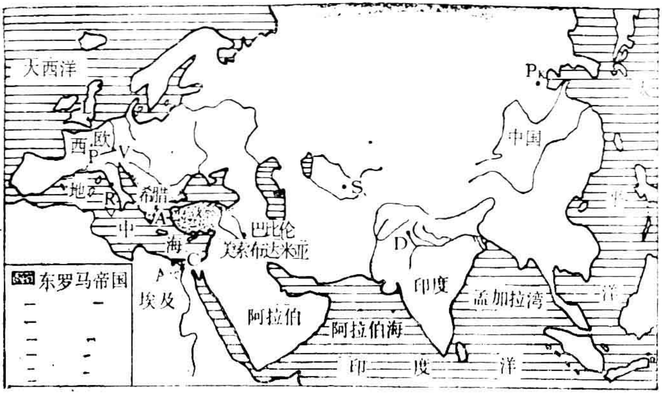
这要从人类社会的发展历史谈起．

根据现代科学的研究，人类社会已经经历了大约一百万年以上的发展历史．在这样漫长的岁月中，只是近五、六千年，人类才脱离了原始社会阶段．正如恩格斯所指出：“科学的发生和发展，一开始就是由生产决定的”．数与形的最初观念可以追溯到旧石器时代（距今几十万年以上直至一万年

前）．当时，穴居的人类已能够制造工具并开始用火．他们为了采集食物而狩猎、捕鱼．要在这种集体化、社会化的劳动中互相联系、彼此交往和协调行动，于是就产生了语言．随着生产力的发展，渔猎品收获日益增加，人们为了分配和贮存，便开始产生了数的观念．到了旧石器时代后期，又出现了简单的记事的形式．考古学家在这一时期的许多洞穴中，发现了不少形象十分生动的动物壁画．这一古代艺术反映了当时人类对于图形的初步知识．

大约在一万年前，亚非欧一些地区进入了新石器时代．这时，社会生产力发生的重大变革是畜牧业和农业的出现，生产工具已有了磨制石器和石木结合的复合工具．特别是到了后期，由于金属工具的出现，使社会生产力有了更大规模的发展．农业实践促进了人类对于气候、季节和历法的认识；并在交换产品的基础上，由计数而引申到记数和计算方法的出现；房屋的建筑及冶金、制陶、纺织、运输的发展，则加深了人们对于度量和几何图形的认识．

也正是在这一时期，在需要兴建水利工程的大河流域和商业发达的交通要地，最先产生了奴隶制国家．数学最早的幼芽，就萌发在这些地区，它们也是人类文明的发源地——东亚的黄河、长江流域，南亚次大陆的印度河、恒河流域，西南亚的两河（幼发拉底河和底格里斯河）流域，东非的尼罗河流域，以及位于西亚、濒临里海、波斯湾的伊朗高原和位于南欧、伸入地中海的希腊半岛．此外，美洲和黑非洲，以及稍后些时候的西欧，也都对人类文明的发展做出了自己的贡献（图一）．



图一

（一）金字塔之谜（埃及）

在东非广阔的土地上，尼罗河由南向北倾泻而下，注入地中海．由尼罗河出海口上溯一千二百余公里的沿河狭长地带，是古埃及人活动的场所．尼罗河每年定期泛滥一次，不仅使两岸的土地得以灌溉，而且沉淀下来的淤泥有利于农作物的生长，促进了这一地区农业的发展．“计算尼罗河水的涨落期的需要，产生了埃及的天文学”（马克思：《资本论》）．而正确制订历法、丈量尼罗河泛滥被冲掉的地界以及建筑金字塔所需要的高超技巧，都促成了古埃及数学的迅速发展．我们现在对埃及古代数学的了解，主要根据上一世纪中期和末期发现的两卷纸草卷：一卷是苏格兰人兰德（A. H. Rhind）于1858年获得的，故称“兰德草卷”．它被认为是古埃及人在公元前1650年前后写成的①，包含85个数学问题．由于这

① 关于此年代众说不一

一草卷的标题部分注有：“如何发现藏在黑暗中的事物以及一切神秘事物的指南……本书的著者为秘书官阿梅斯（Ahmes）”，故也称“阿梅斯草卷”.另一卷是俄国人格列尼切夫（Голеницев）于1893年获得的，并于1912年存入莫斯科博物馆，故称“莫斯科草卷”.它被认为比“兰德草卷”还早约两世纪，包含25个问题.从这两卷文献中，可以看到古埃及数学的以下几个特征：

（1）采用十进位制的记数法，每一较高位用一个特殊的符号表示.如1234表示为

要注意的是，这不是位值制，而是与罗马记数法相同的所谓“累积法”（后一写法至今仍可在某些书籍的卷、章号和老式座钟上见到）.

（2）基于加法的正整数运算.乘法是通过加法求得的，如计算11×5时，分别用11乘以2、4（即每次倍之），然后将后者加在原数上求得.用现代的方法表示①，即为

$$11\times 5=11\times 1+11\times 4=11+44=55.$$

（3）分数运算是独特而又复杂的，所有分数均被简化为分子是1的所谓“单位分数”之和，如

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

① 除另有注明外，本书中各公式均按现代的表示法给出.

由此判断当时一定存在一种特殊的辅助用表，以帮助古埃及人获得这些结果。

（4）许多问题是求解未知数，而且多数相当于现在的一元一次方程求解。某些问题表现了一些等差级数和等比级数的概念以及求和运算的初步知识。

（5）几何问题多是讲度量法，涉及到田地的面积、谷仓的容积和有关金字塔的计算等，古埃及人已经知道：

三角形的面积等于底乘高之半。

直径为 d 的圆面积按照 $\left(d-\frac{d}{9}\right)^2$ 计算，即给出圆周率 $\pi=\frac{256}{81}=3.1605$；而在计算某些圆柱体和圆锥体体积时，也常取 $\pi=3$。"莫斯科草卷"中还载有半球表面积的计算公式。

最杰出的成绩是给出了正方底棱台的计算公式：$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$，其中 a、b 分别为二底的边长，h 为高。

知道直角三角形的锐角是被两个直角边的比值所决定的，即知道相似三角形。

有关古埃及的数学成就的其它文献极少，但是从上一世纪以来，一些西方学者对于举世闻名的埃及金字塔进行了考察，除向我们提供了一些有意义的数字外，还对这些约建于公元前三千年至两千年间的古建筑提出了一些所谓的难解之"谜"，尤其是围绕其中最大的胡夫（Khufu）大金字塔，他们指出许多不可思议的问题。如：

其塔底每边长230米，误差小于20厘米；塔高146.5米（相当于40层楼高），东南角与西北角的高度误差仅1.27厘

米．这样的精确度，是现代建筑也望尘莫及的．

用以砌塔的巨石达230万块之多，它们的重量从2.5吨到50吨不等，石块间的接缝处密得连削铅笔刀也难插入．

其高度的十亿倍，恰好等于地球到太阳的距离；其底边与高度之比的二倍，近似等于3.14159，这是直到公元三世纪时，人们才得到的圆周率π的最好精度．

穿过塔的子午线，恰好把地球上的陆地与海洋分为均匀的两半；而塔的重心，正好座落在各大陆的引力中心上．

长期以来，对于古埃及人何以能达到如此高超的水平看法不一．一些资产阶级学者极力把它渲染为某种“神力”的创造．但据较近代的考察，胡夫金字塔如同我国的长城一样，乃是古代劳动者的杰出创造．那是在胡夫在位的二十二年间，以每年尼罗河泛滥的三个月为期，每期征用十万人，辛勤劳动达二十年所建成的．在金字塔的大石块上，已发现了建塔者所组织的队名．前述的谜底，也基本揭晓．

根据公元前五世纪曾游历过埃及的古希腊学者希罗多德的记叙，古埃及人建造大金字塔时，是使角锥每一面的面积都等于锥高的平方．于是，金字塔形成一个倾斜面为51°51′的四方角锥．而凡是倾斜角在52°左右的这种角锥，其底边与高度之比的二倍，都接近π的值．

胡夫金字塔高度的10亿倍为1465亿米，较地球到太阳的距离的平均值1496亿米，还差31亿米之多，而并非恰好相等．

又据考证，古埃及人是选定一颗或数颗恒星，借助器械观测它（们）在地平线上出没的位置，然后平分从观测点到恒星出没点形成的角度，便测出了子午线．胡夫金字塔位置

的选择，表明古埃及人具有丰富的天文学和数学知识.

总之，金字塔所显示的高超水平，说明古埃及人在“兰德草卷”和“莫斯科草卷”之前，就已经具备了一定的数学知识.这是人类文明发展史上最早的成就之一.

（二）揭开历史的面纱（美洲与黑非洲）

南北美洲和撒哈拉以南的黑非洲，自古以来便是印第安人和黑人各民族活动的区域．公元前一两千年，他们就在这两大区域建立了许多古代文化中心，创造了具有鲜明的民族特色的、光辉灿烂的印第安文化和黑人文化．只是由于十五世纪欧洲殖民主义者的入侵才“打断了他们的任何进一步的独立发展”（恩格斯：《家庭、私有制和国家的起源》）．白人殖民主义者诬蔑印第安人和黑人是什么“劣等民族”，极力贬低他们在人类文明史上曾经大放异彩的文化成就．在西方某些数学史家们所编写的数学史著作中，竟然不给他们以任何一角的地位．然而，据现今得到的一些史料（尽管由于殖民主义者的破坏，这些史料极其贫乏），说明这两大地区同样是人类文明的发源地.

约在公元前两三千年，从北美墨西哥经中美危地马拉到南美的安第斯山中部高原、沿太平洋海岸一带地区，就已出现了原始农业．古代印第安人从野生植物中培育的许多重要作物，如玉米、马铃薯、西红柿、向日葵、烟草、可可、落花生等，早已传遍全世界．在农业经济发展的基础上，古代美洲出现了三个具有代表性的文化中心，这就是以今墨西哥尤卡坦半岛和危地马拉等地为中心的古代马雅文化，以墨西哥山间盆地为中心的古代阿兹特克文化和包括今厄瓜多尔、秘

鲁、玻利维亚等地区的古代印卡文化。

古代马雅人曾对天象进行过精密的观测，建立了自己独特的历法。他们把一年分为十八个月，每月二十天，外加五天“忌日”，共三百六十五日。并且每四年加一天，与我们现代的历法十分相近。马雅人还计算出日食的时间和月球、金星及其它行星的运行周期，许多不抱偏见的现代学者，都承认马雅人的天文知识比中世纪的欧洲要先进得多。马雅人在计数时使用二十进位，并且采用位值制，他们使用零的概念也比欧洲人要早七、八百年。马雅人还创造了自己的文字体系，并写作了大量有关宗教、神话、历史、天文等文献。可惜这些宝贵的资料几乎被西班牙殖民者烧得一干二净，为研究印第安文化造成了巨大的困难。现仅从保存下来的古马雅城市的许多雄伟壮观的建筑遗迹中，我们仍可看到马雅文化的光辉成就。这包括在宽达八米的九十余级石阶上刻有两千多个象形文字符号的“象形文字梯道”和布满三间石室内壁的色彩绚烂的“波南帕克壁画”。

阿兹特克文化中心保留了从公元一世纪起陆续建成的城市提奥地华甘和十五世纪前后建成的城市铁诺奇第特兰。提奥地华甘占地六平方公里，在长达两公里的主要街道两旁，建有数座庞大的金字塔形的庙宇。其中最大的“太阳金字塔”，底边宽达220米，高达64米，和埃及最大的胡夫大金字塔占地面积差不多一样大。经历史学家考查，印第安人的这种“金字塔”，同埃及金字塔没有任何历史联系，它们显示了古代印第安人的聪明和才智。铁诺奇第特兰城修建在一个湖中岛上，有三条道路与陆地相通。城内建有四十座金字塔形庙宇，最高的一座要攀登144级台阶。城内的宫殿、大厦、