高等学校试用教材

# 高等数学

## （物理专业用）

## 上册

华中师范大学数学系
闵家麟　曾鉴清　编

高等教育出版社

## 内容提要

本书系根据高等师范院校物理专业高等数学教学大纲编写而成．全书共十四章，分上、下两册．上册包括变量与函数、极限与连续性、导数与微分、导数在函数研究中的应用、不定积分、定积分及其应用和无穷级数等七章．下册包括向量代数与空间解析几何、线性代数初步、向量函数的微分及其应用、多元函数微分学、常微分方程、重积分与含参变数的积分和场论等七章．

本书叙述清楚，便于自学．书中各节附有适当的习题，书末附有习题答案、积分表和一些常用的曲线．

本书可作为高等师范院校及师范专科学校物理专业高等数学课程的教材，也可供理工科院校相近专业使用．

高等学校试用教材

**高等数学**

（物理专业用）

上册

华中师范大学数学系

阎家麟　曾鉴清　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张13　字数 312 000

1987 年 8 月第 1 版　1987 年 8 月第 1 次印刷

印数　00 001— 5,110

书号　13010·01353　　定价 2.20 元

# 前　言

本书是根据高等师范院校物理专业高等数学教学大纲编写的，全书共十四章，分下、下两册，可以作为270学时左右的教材.

在内容的取舍和安排上，我们从物理专业教学的基本需要出发，并注意到数学本身的科学系统性，在阐述数学的系统知识的基础上，联系物理学中的某些问题，使理论与实际相结合. 本书除了几个较大的定理外，一般详细叙述了证明的主要细节，我们认为这样作不仅便于自学，而且有助于学习并掌握高等数学的基本方法。当然，对于物理专业的学生来说，重要的是理论的应用而不是理论本身. 如果学时较少，书中的某些证明可以留给学生自己阅读，书中的习题也是按照这个精神配置的. 线性代数初步一章紧接在空间解析几何之后，这样可以充分利用三维空间的直观背景. 其中我们采用了一些简捷的记法，使得篇幅减少了许多，只要学生开始注意熟悉并掌握书中的记号的意义，就不会产生太大的困难. 下册的一些内容是上册中相应内容的发展和推广，因此写得比较简洁，这不仅是为了节省篇幅，而且也出于教学法的理由. 我们希望学生能认真思考和类比，并能得出相应的结论来.

在本书编写过程中，华中师范大学数学系高等数学教研室的同志们给予了大力的支持，理科高等数学教材编审组审阅本书提出了不少宝贵意见，在此一并致谢.

由于我们水平所限，书中不妥之处，恳请批评指正.

编　者

1986.6.

# 目　　录

# 第一章　变量与函数

客观世界是物质的，而物质是在不停地运动和变化着的，许多事物的运动变化规律，可由其中变量间的相依关系，即函数关系表示出来、十七世纪，首先是由于研究运动产生了研究变量的数学分支微积分，它是本书的主要内容，因此函数概念将贯穿全书．本章首先介绍函数的概念和符号，然后在概述基本初等函数的基础上，介绍初等函数及函数的简单性质．

## §1-1　实　　数

### 1. 实数与数轴

实数的连续性是函数与极限(第二章)理论的基础，我们先从实数的直观描述开始．

正、负整数和零，以及正、负分数，统称**有理数**．所有有理数的全体，称为**有理数系**或**有理数集**．任何一个有理数总可以写成$\frac{p}{q}$的形式，其中$p$和$q$都是整数，且$q \neq 0$，或写成小数的形式，则是有尽小数或循环小数．

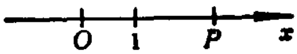


图　1-1

取一直线，在它上面选定：1）某一点$O$，称为原点；2)正方向，用箭头表示；3)长度单位，这样的直线叫**数轴**或**坐标轴**．习惯上，常把数轴水平置放，并以从左到右的方向为正方向(图1-1)．于是，数轴上任意一点$P$的位置，就由原点$O$到$P$的距离及$O$到$P$的方向(指向$O$的左边还是右边)来确定．从而任何有理数都可用数轴上的点表示．

当 $x$ 是正数时，用点$M$表示，该点在$O$点的右边，到$O$点的距离$|OM|=x$，当 $x$ 是负数时，用点$M'$表示，它在 $O$ 点的左边，到 $O$ 点的距离$|OM'|=-x$(图 1-2)．表示有理数的点称为有理点，任何有理点都不难用几何方法作出来．步骤是，先作出整数点 $0$，$\pm1$，$\pm2$，…，然后，将相邻的两个整数点间的线段分成 $q$ 等份，这些线段的端点便是形如$\frac{p}{q}$的有理点．

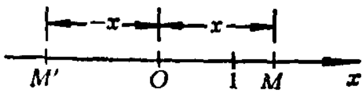

图 1-2

值得注意的是，数轴上的点并不都是有理点．例如，设 $d$ 是边长为 1 的正方形的对角线，那么长度等于 $d$ 的线段 $OD$ 的终点 $D$ 就不是有理点(图 1-3)．对此，只需证明 $d$ 不是有理数就够了．由勾股定理得知 $d^2=2$．假定 $d$ 是有理数，且等于$\frac{p}{q}$，这里 $p$ 和 $q$ 是没有公因数的正整数，就有$\frac{p^2}{q^2}=2$，即 $p^2=2q^2$，可见 $p^2$是偶数．因此 $p$ 是偶数，譬如 $p=2m$，则有$(2m)^2=2q^2$ 或 $2m^2=q^2$，这又说明 $q$ 也是偶数．于是 $p$ 与 $q$ 均能被 2 整除，这与 $p$ 和 $q$ 没有公因数的假定相矛盾．这一矛盾是由于假定 $d$ 是有理数引起的，所以 $d$ 不可能是有理数，记作$d=\sqrt{2}$．

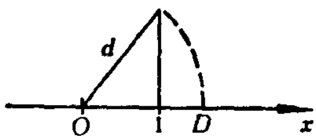

图 1-3

两个量，如果它们的比是有理数，就叫做**可通约的**．上面的例子说明，存在着与度量单位不可通约的线段．此外，如单位立方体的对角线长$\sqrt{3}$，单位圆的面积 $\pi$ 等都不是有理数（证明 $\pi$ 不是有理数要复杂得多)．由此可见，有理数对于量的度量来说是不够的，必须扩充数系，以满足度量的需要．于是，在有理数之外，又引进了无理数，作为与度量单位不可通约量的数值．

有理数与无理数的全体，称为**实数系**或**实数集**．设$P$是数轴

上的任意一点，那么由原点$O$到它的距离$|OP|$，与单位长或者可通约或者不可通约，二者必居其一．所以数轴上的点不是有理点便是代表无理数的无理点，即实数与直线上的点之间一一对应．实数系的这个性质叫做连续性．也就是说，全体实数按照大小顺序排列起来，像直线上的点一样是连续分布的，而不像有理点那样其间还有空隙．实数系对于量的度量已经完全够用了，体现了量的连续变化．

**2．区间**

往后，实数的几何表示将起着很重要的作用．

既然实数和数轴上的点是一一对应的，我们就可以把实数和数轴上的对应点看做是等同的，不再区分数和代表它的点，并且常常使用几何语言，如将数$a$称为点$a$，$a<b$说成$a$在$b$的左边等．

此外，我们还将使用集这个术语，某些对象（如数、点、线等等）的集体称为**集**或**集合**。集合中的对象称为它的**元素**，用记号$x\in A$表示$x$是集$A$的元素．今后常常遇到如下形式的集．

设$a<b$是任意两个实数，适合下列条件中任何一个的一切实数$x$的集，统称为以$a$，$b$为端点的**区间**：

i) $a<x<b$;　　ii) $a\leqslant x\leqslant b$;

iii) $a<x\leqslant b$;　　iv) $a\leqslant x<b$.

即区间是由位于$a$和$b$之间的一切点组成的．其中i)不含端点$a$，$b$，叫作**开区间**，用记号$(a,b)$表示．ii)包含端点$a$，$b$，叫做**闭区间**，用记号$[a,b]$表示．iii)和iv)分别叫做左开和右开的**半开区间**，它们中的每一个都只含有一个端点(图1-4)，分别用记号$(a,b]$，$[a,b)$表示．

当不必明确指出所讨论的区间是否包含端点$a$，$b$的时候，我们就简单的说成区间$(a,b)$，这时记号$(a,b)$可以代表上述四种区

间中的任何一种.

类似地,适合条件

$$a<x$$

的全部实数 $x$ 的集,用记号

$$a<x<+\infty \quad 或 \quad (a,+\infty)$$

表示,叫做以 $a$ 为左端点的**半开无界区间**. 而适合条件

$$a\leqslant x$$

的所有实数 $x$ 的集,用记号

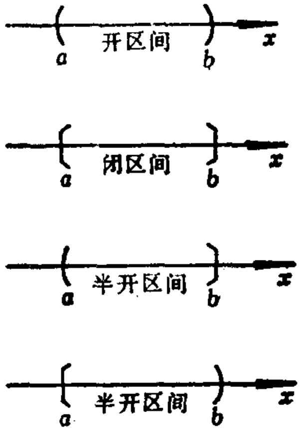

图 1-4

$$a\leqslant x<+\infty \quad 或 \quad [a,+\infty)$$

表示,叫做以 $a$ 为左端点的**半闭无界区间**(图 1-5). 同样的,可以了解记号 $-\infty<x<b$ 或 $(-\infty,b)$ 及 $-\infty<x\leqslant b$ 或 $(-\infty, b]$ 的意

图 1-5

义. 整个数轴是无界区间,用记号

$$-\infty<x<+\infty \quad 或 \quad (-\infty,+\infty)$$

表示.

应当指出,记号 $+\infty$(读作正无穷)或 $-\infty$(读作负无穷),只起示意的作用,而不是数. 因为不存在能使关系式 $a<+\infty$ 或 $-\infty<a$ 对一切实数 $a$ 都成立的数 $+\infty$ 或 $-\infty$.

### 3. 绝对值

绝对值的概念和性质是今后经常要用到的知识.

**定义** 实数 $a$ 的绝对值,用记号 $|a|$ 表示,并且

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

除 $a=0$ 外, $|a|$ 总是一个正数, 并且 $|a|=|-a|$. $|a|$ 的几何意义是点 $a$ 到原点的距离.

**定理 1** i) 乘积的绝对值等于各因子绝对值的乘积，即

$$|ab|=|a||b|.$$

ii) 商的绝对值等于被除数和除数绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

**证** i) 与ii)的证明完全是类似的，我们只证明 i). 分三种情况：

a) 当 $ab>0$ 时，$a$ 与 $b$ 同号，所以

如果 $a>0,b>0$，则 $|ab|=ab=|a||b|$;

如果 $a<0,b<0$，则 $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a||b|$.

b) 当 $ab<0$ 时，$a$ 与 $b$ 反号，所以

如果 $a>0,b<0$，则有 $|ab|=-(ab)=a(-b)=|a||b|$;

如果 $a<0,b>0$，则有 $|ab|=-(ab)=(-a)b=|a||b|$.

c) 当 $ab=0$ 时，显然 $|ab|=|a||b|$ 成立，于是定理得证.

**定理 2** 设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充要条件是

$$-a<x<a.$$

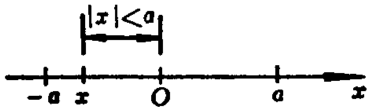

图 1-6

这个定理的几何解释是，到原点的距离小于 $a$ 的所有点 $x$ 组成区间 $(-a,a)$；反之，也只有这个区间内的点到原点的距离才小于 $a$.

**证** 先证必要性. 由 $|x|<a$，可知

当 $x>0$ 时，有 $-a<|x|=x<a$，即 $-a<x<a$;

当 $x<0$ 时，有 $-a<|x|=-x<a$，即 $-a<x<a$.

合起来就是 $-a<x<a$.

再证充分性. 由双重不等式 $-a<x<a$ 得 $-a<x$ 即 $-x<a$，和 $x<a$. 于是

当 $x\geqslant 0$ 时，有 $|x|=x<a$;

当 $x<0$ 时，有 $|x|=-x<a$.

总之，对满足不等式 $-a<x<a$ 的一切 $x$，都有 $|x|<a$ 成立. 于是定理得证.

**推论** 设 $a>0$，则 $|x|\leqslant a$ 的充要条件是

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

**例 1** 求 $\left|\dfrac{x+2}{2x+3}\right|<2$ 的全部解.

**解** 根据定理 2，由 $\left|\dfrac{x+2}{2x+3}\right|<2$，得

$$-2<\frac{x+2}{2x+3}<2.$$

用 $2x+3$ 遍乘不等式，得

$$-2(2x+3)<x+2<2(2x+3) \text{ 和 } 2x+3>0 \qquad (1)$$

或

$$-2(2x+3)>x+2>2(2x+3) \text{ 和 } 2x+3<0. \qquad (2)$$

将(1)中的三个不等式分开，可以写成

$$-4x-6<x+2,\ x+2<4x+6,\ 2x+3>0,$$

即

$$-8<5x,\quad -4<3x \text{ 和 } x>-\frac{3}{2}.$$

由此得出(1)的全部解:

$$x>-\frac{4}{3} \text{ 或 } \left(-\frac{4}{3},+\infty\right).$$

同样地，可以求出(2)的全部解是

$$x<-\frac{8}{5} \quad \text{或} \quad \left(-\infty,\ -\frac{8}{5}\right).$$

于是所求不等式的全部解是$\left(-\infty,-\dfrac{8}{5}\right)$和$\left(-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

根据定理 2，若 $a$ 是任意的实数，$\delta>0$，则满足不等式

$|x-a|<\delta$ 的一切实数 $x$ 构成以点 $a$ 为中心，以 $\delta$ 为半径的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，称为点 $a$ 的 $\delta$ **邻域**(图 1-7).

在点 $a$ 的 $\delta$ 邻域内去掉中心点 $a$.以后，叫做点 $a$ 的以 $\delta$ 为半径的**空心邻域**. 显然，其中的任何实数 $x$，总满足不等式

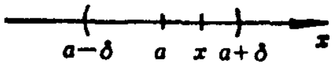

图 1-7

$$0<|x-a|<\delta.$$

**定理 3** 设 $a$，$b$ 是任意实数，则

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

**证** 因为 $|a|=a$ 或 $-a$，可以写成 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$. 同理有 $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$. 将这两个不等式相加，得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据定理 2 的推论，这个不等式等价于不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

于是定理得证.

**推论 1** 如果 $a$，$b$ 是任意实数，则

$$|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

**证** 将 $a-b$ 写成 $a+(-b)$，应用定理 3 即得

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|.$$

**推论 2** 如果 $a$，$b$ 是任意实数，则

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|.$$

**证** 根据定理 3 的推论 1，我们有

$$|a|=|a+b-b|\leqslant|a+b|+|b|.$$

于是

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|.$$

同时，我们还可得到

$$-|a+b|\leqslant|a|-|b|.$$

由定理 2 的推论，即得

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|.$$

**4. 有界集·上确界和下确界**

**定义** 设 $A$ 是某些实数的集. 如果集 $A$ 中的每个元素 $x$ 都不超过一个定数 $M$，即 $x\leqslant M$，则称集 $A$ 是**上有界**的，数 $M$ 称为它的一个**上界**；如果集 $A$ 中的每个元素都不小于一个定数 $N$，即 $x\geqslant N$，则称集 $A$ 是**下有界**的，数 $N$ 称为它的一个**下界**. 如果集 $A$ 既是上有界的又是下有界的，则称集 $A$ 是**有界**的.

例如正实数的集 $[0,+\infty)$ 是上无界、下有界的，0 或任何一个负实数都是它的下界.

集 $B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \cdots\right\}$ 是有界的，1 或大于 1 的任何数都是它的上界. 但没有比 1 再小的上界，即 1 是最小的上界. 0 或任何负数都是它的下界，但任何一个比零大的数都不是它的下界，即 0 是最大的下界. 由此引出如下概念：

**定义** 如果数 $L$ 是集 $A$ 的上界，但比 $L$ 小的数都不是 $A$ 的上界，则称 $L$ 为集 $A$ 的**上确界**(或最小上界)；类似地，如果数 $K$ 是集 $A$ 的下界，但比 $K$ 大的数都不是 $A$ 的下界，则称 $K$ 为集 $A$ 的**下确界**(或最大下界).

一个有界的数集是否一定有上、下确界，这与我们在什么样的范围内研究这个集有关. 例如平方小于(或大于) 2 的正有理数的集合，其上(或下)确界是 $\sqrt{2}$. 但在有理数系里，这个集合没有上确界(或下确界)，因为 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 而实数系没有空隙，所以不会发生这种情况，于是实数系的连续性可用下述公理表述出来.

**上(下)确界公理** 任何上(或下)有界的实数集合，在实数系里必有上(或下)确界.

从上面列举的几个例子中可以看出，一个集的上(下)确界不一定属于该集.如果属于该集，它便是这个集中的最大(小)值，否则这个集就没有最大(小)值.

集$A$的最大值记作$\max A$，最小值记作$\min A$，如$\max\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}=1$.

## 习 题 1-1

1. 用不等式表示下列区间，并作图：

(1) $(3,7)$； (2) $[-3,5]$；

(3) $(-2,+\infty)$； (4) $[0,+\infty)$；

(5) $(-\infty,6]$； (6) $(-\infty,-10)$.

2. 证明：

(1) $|a|^2=a^2$； (2) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. 应用定理 2，证明：

(1) $|a|=|b|$的充要条件是$a=\pm b$；

(2) $|a|-(|b|+|c|)\leqslant|a+b+c|$.

4. 解下列不等式：

(1) $|x+1|<0.01$； (2) $|x|>|x+1|$；

(3) $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$； (4) $|x-1|+|x+1|<2$；

(5) $|x-2||x+3|>0$； (6) $0<(x-2)^2\leqslant 4$；

(7) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$.

# §1-2 函数和它的图形

### 1. 变量与常量

我们经常碰到的各种量，如长度、质量、时间、速度、面积、体积、温度等等，它们的共性是可以度量，如§1-1所述的那样，度量的结果就得到这些量的数值(实数).下文里凡是提到量，就都是指

它们的数值.

我们把在所要研究的问题里，取不同数值的量，即数值不断变化的量叫**变量**；始终保持同一数值的量叫**常量**．例如在自由落体运动中，物体的质量是常量，而其下落的路程和速度则因时间不同而取不同的值，也就是说路程、速度和时间都是变量．

在某些问题中，有的量虽然是变化的，但其变化幅度很小，对问题的影响微不足道，因而常常将它看做常量．这样既可使问题简化，容易解决，又不致影响结果的正确性．例如在自由落体运动中，当下落距离不大(与地球半径相比很小)时，重力加速度总是看作不变的等．

需要注意的是，常量和变量是在一定条件下讲的，同样名称的量，在这个问题里可能是常量，而在另外一些问题里却可能是变量．譬如，在自由落体运动中速度是变量，但在匀速运动中速度是常量．

通常用字母 $a$、$b$、$c$ 等表示常量，$x$、$y$、$z$、$u$、$v$ 等表示变量．

在所考虑的问题里，某个变量所能取的值，叫做这个变量的**变化范围**．例如，设单位圆内正多边形的边数为 $x$，则 $x$ 的变化范围是不小于 3 的一切自然数．又如对密闭容器中的气体加热，使其温度由 5°C上升到 45°C. 在这一过程中，温度 $T$ 的变化是逐渐通过从 5 到 45 之间的一切实数．这样，$T$ 的变化范围就是区间 $[5, 45]$.

如果变量的变化范围只是一个数，那么它就是一个常量．因此常量又可当作变量的一个特殊情形看待．

**2. 函数**

我们常常需要研究某一自然现象或技术问题中出现的各个量之间的互相联系．现在先来考虑问题只含有两个变量的情形，到第九章以后，再进一步考虑多于两个变量的情形．

**例 1**　一定量的气体在等温条件下，其体积 $V$ 与压强 $p$ 是同时变化的量，当 $V$ 不太小($V \geqslant V_0$，$V_0$ 为某一确定的正数)时，依波义耳-马略特定律，它们之间存在如下的关系：

$$pV = k$$

或

$$p = \frac{k}{V}, \tag{1}$$

其中 $k$ 为常数．式(1)给出一定量的气体在等温条件下，压强 $p$ 与体积 $V$ ($V \geqslant V_0$)之间的依从关系．根据这一关系式，对于 $V \geqslant V_0$ 的每一个确定值，都能求出 $p$ 的相应的值．

**例 2**　物体从高 $h$ 处自由下落，下落的距离 $s$ 和所经时间 $t$ 之间，在不计空气阻力的情况下，满足如下关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g = 9.8$ 米/秒$^2$ 是重力加速度．依照这个公式，由时间 $t$ 的值可以算出下落的距离 $s$．但当 $s = h$ 即 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时，物体就已到达地面，所以时间 $t$ 应满足条件 $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

**例 3**　水的沸点 $T_b$(°C)随外界压强 $p$ 增加而升高的情况如下表：

| 压强 $p$ (大气压) | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 沸点 $T_b$(°C) | 100 | 120 | 143 | 158 | 170 | 179 | 211 |

我们可以从这个表中直接读出在所列压强下水的沸点．

这几个例子说明许多自然现象都可以用量与量之间的对应关系表示出来．可见，认识这种关系该是多么重要了．但是不可忽略的是：这种关系只存在于变量的一定变化范围内．

**定义** 如果两个变量 $x$，$y$ 之间存在一个确定的对应关系，对于变量 $x$ 在其变化范围内的每一个值，依照这个对应关系，正好能够确定变量 $y$ 的一个值，则称这样的对应关系为**函数**，其中 $x$ 叫**自变量**，自变量的变化范围叫函数的**定义域**；$y$ 叫**因变量**，因变量的变化范围叫函数的**值域**.

在例 1 中，公式$p=\dfrac{k}{V}$所表示的 $p$ 与 $V$ 的反比关系，是一个函数，$V$ 是自变量，$p$ 是因变量，定义域是 $V\geqslant V_0$.

在例 2 中，公式$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 所表示的 $s$ 与 $t^2$ 的正比关系，也是一个函数，$t$ 是自变量，$s$ 是因变量，定义域是$\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$.

例 3 的表格列出了压强 $p$ 与水的沸点 $T_b$ 的对应值，给出了 $p$ 与 $T_b$ 间的对应关系，它也表示一个函数，$p$ 为自变量，$T_b$ 为因变量.

我们常用字母 $f$，$F$，$\varphi$ 等表示函数，以 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量的函数 $f$ 或 $\varphi$ 记作

$$y=f(x) \quad 或 \quad y=\varphi(x)$$

等等，简称 $y$ 是 $x$ 的函数.

其次，函数记号 $y=f(x)$ 中的等号还表示，$f(x)$ 与 $y$ 的意义相同. 即 $f(x)$ 代表对应于自变量 $x$ 的因变量 $y$，特别是数 $f(a)$ 代表 $x=a$ 时 $y$ 的对应值，称为$x=a$时的函数值. 比如以 $f(p)$ 表示例 3 中的函数，则 $f(2)=120$.

对于函数 $y=f(x)$，只有当 $x$ 属于它的定义域时，$f(x)$ 才有意义. 今后我们碰到的函数，常常是由公式表示的，即给出了计算 $f(x)$ 的公式，这个公式称为函数的**解析表示式**. 如例 1 和例 2 中的函数都是用公式表示的. 但是，这两个例子说明，对于实际问题，表示函数的公式本身并未给出函数的定义域，要具体给出函数，还必