

微分几何初步

● 陈维桓 编著

北京大学出版社

北京大学教材

微分几何初步

陈维桓 编著

G9/17

北京大学出版社

内 容 提 要

本书是北京大学数学系微分几何课程的教材,主要讲述三维欧氏空间中曲线和曲面的局部理论,内容包括:预备知识,曲线论,曲面的第一基本形式,曲面的第二基本形式,曲面论基本定理,测地曲率和测地线,活动标架和外微分法,另有附录叙述了本书所用的微分方程的定理,并介绍了张量的概念.本书力图向近代微分几何的语言和方法靠近,因此在讲述时尽量结合现代流形的概念,并且自始至终使用附属在曲线、曲面上的标架场,对外微分形式有相当详细的介绍.本书叙述深入浅出,条理清楚,论证严密,突出几何想法,便于读者理解与掌握.

本书可作为综合大学及高等师范院校的微分几何课程教材,也可作为高等教育自学考试的教学参考书.

北京大学教材 微分几何初步

陈维桓 编著

责任编辑:刘 勇

*

北京大学出版社出版发行
(北京大学校内)

中国科学院印刷厂印刷

新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 9.125印张 240千字

1990年10月第一版 1997年10月第三次印刷

印数:8,001—11,000册

ISBN 7-301-01229-2/O·204

定价:12.00元

中国科学院印刷厂

序

本书的前身是我在北京大学数学系讲授过多次的“微分几何”课程的讲义。根据我系的新教学计划，这个课程放在二年级下学期，因此我们所选定的内容是三维欧氏空间中曲线、曲面的局部理论。这部分内容已有悠久的历史，但是无论在生产实际中还是在数学、力学的理论中仍不失它的重要价值。例如在几何造型、计算机辅助设计中，参数曲线、参数曲面的概念占据重要的地位。尽管我们的课程不涉及几何造型的内容，但是所研究的刻画曲线、曲面形状的概念和方法却是几何造型的基础。我们这个课程的重点是曲面论，其中曲面论基本定理是课程的核心。一方面我们围绕基本定理，叙述描写曲面形状的方法和手段，最终给出决定曲面形状的微分不变式的完全系统。另一方面从曲面的 Gauss 方程导致著名的 Gauss 定理，从而揭示了研究曲面的内蕴几何的必要性。这些内容都有在高维的推广。虽然大范围微分几何学、流形上的几何学是当前研究工作的主流，但是曲线、曲面的局部理论为这种研究提供了基础和背景，仍然应该得到重视。

“微分几何”课程的内容应该经常作一些改变，以便与研究工作的进步相适应。我们在本书采取了以下的做法：

1. 比较多地运用了线性代数的语言和理论。例如比较普遍地使用了矩阵记号，第四章用自共轭线性变换的理论处理了主曲率、主方向。
2. 自始至终把曲线、曲面上的附属标架场放在中心的地位。这样做在实践上、在理论上都有它的重要意义。
3. 强调参数变换的作用。这种强调有两方面的意义：一方面突出了几何不变量的含义，另一方面为过渡到微分流形理论打

下基础。在附录中增加了张量一节就是为了对于坐标变换规律作一个总结性说明。

4. 在所用语言上尽可能与流形上的几何学统一起来，例如曲面上的切向量、切空间，映射的切映射等等。特别是对 du , dv 作了较多的解释。

5. 增加了“活动标架和外微分法”一章。外微分应该是数学分析的内容，但是在微分几何课中才得到了充分的应用。现在，它已成为微分几何、力学的重要工具，因此应该在微分几何课中讲授。

我们感觉到，如果全部采用外微分、活动标架方法去处理曲线、曲面的局部理论，则初学者不易接受；另外，如果已知曲线、曲面的参数方程，则向量分析是更自然而有效的方法。所以我们采取两者结合的办法。由于这个课程的基础性质，我们只求学生了解活动标架的意义，会用外微分去解决问题。因此我们在本书最后一章着重讲解了标架族的结构方程，以及在判断曲面方程的可积性、计算曲面的 Gauss 曲率和曲线的测地曲率方面的应用。虽然在这一章没有更多的新的几何内容，但是却介绍了不少处理比较困难的问题的新方法，并且从理论上对曲面论作了一个总结。虽然外微分和活动标架法的威力在本书还没有得到充分的体现，但是我们相信这一章对初学者是有帮助的。

在习题的选编方面，除了吸收国内已有教材的部分内容外，还添进了一些我们历年所用的微分几何考题，也参考了一些国外的教材。这方面还有待今后逐年积累。

全书内容是按照每周四学时的一学期课程安排的。最后一章估计要用10—12个学时。在学时不够时，可以略去最后一章，将它作为自学教材。

在本书出版之际，我要特别感谢导师吴光磊教授。二十多年来，无论是他传授的知识，还是他严谨的治学态度，都使我受益不浅。早在六十年代，他为我们开设的活动标架、外微分课程就

使我萌发了普及这部分内容的想法，后来成为我在这基础课程讲授的组成部分。在本书完稿之后，吴光磊教授还仔细地进行了审阅，提出了许多宝贵意见。我还要感谢田畴教授，他在六十年代给我们上的微分几何课以及他于1979年在中国科技大学编写的微分几何讲义，对我的教学工作有很大影响。

这本教材在北京大学虽然用过多次，但是疏漏不妥之处，甚至于错误仍有可能存在。我诚恳地欢迎各位同仁无保留地提供批评和指正。

最后我对北京大学出版社对这本教材的出版给予的热情支持以及编辑刘勇同志付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

陈维桓

1989年2月于北京大学

绪 论

如何描述图形、物体的形状始终是几何学的一个基本问题。在欧氏几何范畴内，我们要研究的是图形在刚体运动群的作用下不变的性质，进而从这些不变性质中找出一组适当的、足以决定空间中两个图形在刚体运动下是否合同的条件。例如：在欧氏平面几何中，决定两个三角形全等的判定条件是三条边对应相等，或两边夹一角对应相等。在笛卡儿发明了解析几何之后，我们就有了使图形数量化的手段，因而使我们能够研究比直线形复杂的图形，例如二次曲线和二次曲面。如果把二次曲线和二次曲面用方程来表示，则用方程的系数可以构造一些量，这些量不依赖于笛卡儿坐标系的选取，从而与图形的位置无关。我们把这些量称为图形的不变量，图形的形状就按照这些不变量进行区分。现在我们要学习的微分几何学是用微积分作为工具来研究一般的曲线和曲面的形状，找出决定曲线、曲面形状的不变量系统。

微分几何学几乎是与微积分同时诞生的。事实上，Newton和Leibniz当初发明微积分的目的之一就是为了处理曲线所围的面积、曲线的切线和长度等等几何问题。微积分在几何学中的应用后来就逐渐发展成我们在本书要讲授的曲线论和曲面论。在十八世纪，Euler和Monge及其学生对于曲线和曲面理论的研究作出了决定性的贡献。例如曲面在一点的各个切方向上的法曲率的变化规律是Euler发现的（即Euler公式，参看本书第四章§3）。曲线的局部理论是Serret和Frenet在十九世纪五十年代完成的。在曲面论的研究方面，真正的突破是由Gauss在1827年作出的。Gauss经过复杂的计算发现，曲面的总曲率（即Gauss曲率）是由曲面的第一基本形式决定的（参看本书第五章§5）。

Gauss 的这个精彩结果表明了曲面和曲线有本质上的区别，曲面的度量本身就蕴含着一定的弯曲性质。

Riemann 在1854年把 Gauss 的这个“内蕴几何学”的光辉思想发扬光大，创立了黎曼几何学。Riemann 的理论后来由 Christoffel, Ricci 发展成一套张量分析的算法。在本书不可能讲述黎曼几何学的一般理论，但是在第五章、第六章运用张量记号叙述了曲面的基本方程和曲面的内蕴几何，这些内容很容易推广到高维黎曼空间的情形。

1870年，F. Klein 提出：几何学的主要问题是研究变换群的不变量。融合 Riemann 与 Klein 的工作于大成的一位大师是 E. Cartan，他精巧地发展了外微分法和活动标架理论，把李群和微分几何结合了起来。我们在第七章比较系统地介绍了外微分法和活动标架理论的初步概念及其在曲面论中的应用。

在步入二十世纪40年代之后，微分几何的一个发展趋势是所谓的大范围微分几何学，其基础是现代的微分流形理论。微分几何的新概念和新方法层出不穷，现在已经成为一个极其重要的研究领域，而且它又为其它数学领域及物理、力学的研究提供了各种空间模式和研究工具。此外，在计算机图形学蓬勃发展的今天，各种复杂精美的外形设计已大量地用于生产。这方面也是经典的曲线、曲面理论能够发挥重要作用的场所。

目 录

绪 论	1
第一章 预备知识	1
§ 1 标架	1
§ 2 向量函数	6
第二章 曲线论	10
§ 1 参数曲线	10
§ 2 曲线的弧长	15
§ 3 曲线的曲率和 Frenet 标架	18
§ 4 挠率和 Frenet 公式	25
§ 5 曲线论基本定理	30
§ 6 曲线在一点的标准展开	35
§ 7 平面曲线	41
第三章 曲面的第一基本形式	46
§ 1 曲面的定义	46
§ 2 切平面和法线	53
§ 3 曲面的第一基本形式	58
§ 4 曲面上正交参数曲线网的存在性	64
§ 5 保长对应和保角对应	67
§ 6 可展曲面	76
第四章 曲面的第二基本形式	82
§ 1 第二基本形式	82
§ 2 法曲率	89
§ 3 Gauss 映射和 Weingarten 映射	95
§ 4 主方向和主曲率的计算	101
§ 5 Dupin 标形和曲面在一点的标准展开	110
§ 6 某些特殊曲面	117

第五章	曲面论基本定理	125
§ 1	自然标架的运动公式	125
§ 2	曲面的唯一性定理.....	134
§ 3	曲面论基本方程.....	136
§ 4	曲面的存在性定理.....	142
§ 5	Gauss 定理.....	146
第六章	测地曲率和测地线	156
§ 1	测地曲率和测地挠率.....	156
§ 2	测地线.....	167
§ 3	测地坐标系.....	175
§ 4	常曲率曲面.....	183
§ 5	曲面上向量场的平行移动	189
§ 6	Gauss-Bonnet 公式.....	195
第七章	活动标架和外微分法	203
§ 1	外形式	204
§ 2	外微分	214
§ 3	E^3 中的标架族	226
§ 4	曲面上的标架场	234
§ 5	曲面上的曲线.....	248
附录	257
§ 1	关于常微分方程的几个定理.....	257
§ 2	一阶偏微分方程组的可积性.....	262
§ 3	张量.....	270
索引	278

第一章 预备知识

§1 标 架

为了确定空间中点的位置，必须首先在空间中建立参考系。最简单的参考系就是空间直角坐标系，即笛卡儿坐标系。所谓三维欧氏空间 E^3 中的笛卡儿坐标系是指从一点 O 引出的三条彼此垂直的实数轴，这三条实数轴分别称为 X 轴、 Y 轴和 Z 轴。我们通常还要求笛卡儿坐标系是右手系，即在右手的食指、中指分别指向 X 轴、 Y 轴的正向时，大姆指恰好指向 Z 轴的正向。点 O 称为坐标原点。若 i, j, k 是分别表示 X 轴、 Y 轴、 Z 轴正向的单位向量，则笛卡儿坐标系也可以用 $\{O; i, j, k\}$ 来表示，后者称为 E^3 中的一个右手单位正交标架，简称为正交标架。

在空间 E^3 中固定一个正交标架 $\{O; i, j, k\}$ 之后，每一点 $p \in E^3$ 可以等同于一个向量 \vec{Op} 。我们称 \vec{Op} 为点 p 关于坐标原点 O 的向径。向径 \vec{Op} 可以唯一地表示成 i, j, k 的线性组合：

$$\vec{Op} = xi + yj + zk, \quad (1)$$

则 (x, y, z) 是向径 \vec{Op} 的分量，也称为点 p 在笛卡儿坐标系 $\{O; i, j, k\}$ 下的坐标。因此，在取定直角坐标系之后，空间 E^3 中的点与三个有序的实数构成的组 (x, y, z) 是成一一对应的，即 E^3 中的点可以看作对应的三个有序的实数。

现在来考察 E^3 中正交标架的集合。若 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 是另一个正交标架，它的位置可以如下确定：设

$$\begin{cases} \vec{OP} = a_1i + a_2j + a_3k, \\ e_1 = a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k, \\ e_2 = a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k, \\ e_3 = a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k. \end{cases} \quad (2)$$

因为 e_i 是彼此正交的单位向量, 所以

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

由于 e_1, e_2, e_3 成右手系, 所以

$$e_3 = e_1 \times e_2,$$

因而

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, e_3) &= (e_1 \times e_2) \cdot e_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

命

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

则 A 是其行列式为 1 的正交矩阵, 即 $A \in SO(3)$. 在取定的坐标系 $\{O; i, j, k\}$ 下, E^3 中的正交标架与矩阵对 (a, A) 是一一对应的, 因此 E^3 中的全体正交标架的集合可以与 $E^3 \times SO(3)$ 等同起来, 这是一个 6 维的空间.

E^3 中不同的正交标架给出了不同的笛卡儿坐标系; 设 $\{O; i, j, k\}$ 和 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 是 E^3 中的两个正交标架 (见图 1), 它

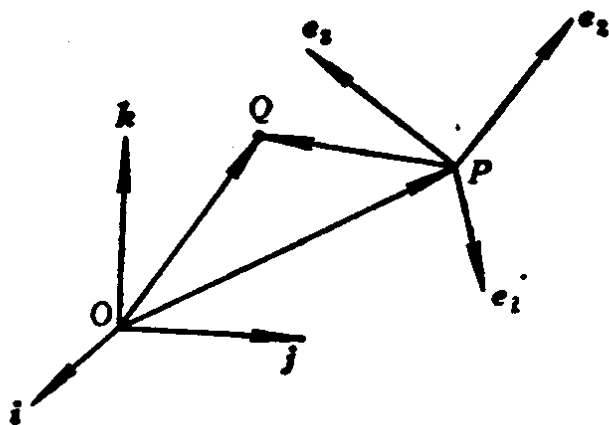


图 1

们的关系由 (2) 式给出. 设点 Q 关于 $\{O; i, j, k\}$ 的坐标是 (x, y, z) , 关于 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标是 (x', y', z') , 则

$$\vec{OQ} = xi + yj + zk = (x, y, z) \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix},$$

另一方面

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OP} + \vec{PQ} \\ &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} + (x', y', z') \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ &= [a + (x', y', z') \cdot A] \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此, 点 Q 的坐标 (x, y, z) 和 (x', y', z') 之间的关系是

$$(x, y, z) = a + (x', y', z') \cdot A, \quad (6)$$

或

$$\begin{cases} x = a_1 + x' a_{11} + y' a_{21} + z' a_{31}, \\ y = a_2 + x' a_{12} + y' a_{22} + z' a_{32}, \\ z = a_3 + x' a_{13} + y' a_{23} + z' a_{33}. \end{cases} \quad (6')$$

正交标架的重要性还在于它能表示欧氏空间 E^3 中的刚体运动. 所谓刚体运动原来是物理学上的一个概念. 如果一个物体在空间 E^3 中的运动不改变它的形状和大小, 只改变它在空间中的位置, 那么这个物体的运动就称为刚体运动. 要确定一个刚体在空间中的位置只要确定刚体上不共线的三个点的位置就行了. 这样, 在刚体上装一个正交标架, 则这个正交标架在空间中的位置就代表了这个刚体的位置. 空间中的任意一点都可以看作刚体上的一点在某时刻所处的位置. 当刚体在空间中运动时, 这个点随着刚体一起运动到一个新的位置. 这样, 我们得到空间 E^3 到它自身的一个变换. 假定一个刚体上的标架 $\{O; i, j, k\}$ 在运动之后变到标架 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 所在的位置 (见图 2), 把这个

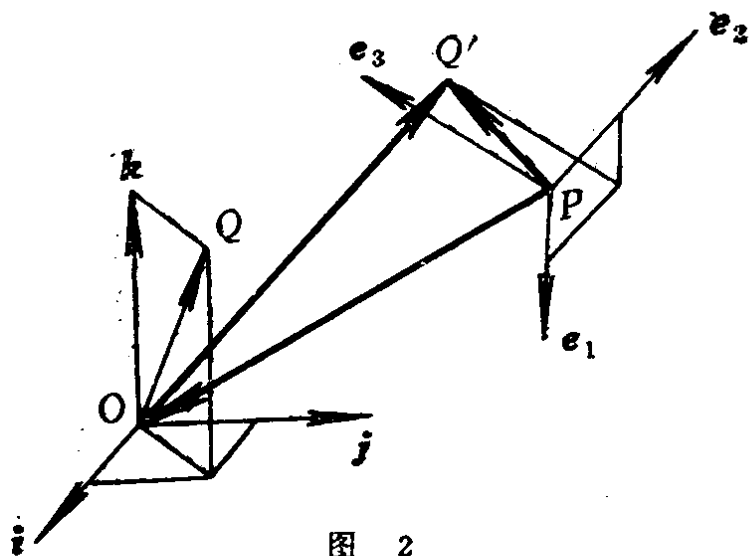


图 2

位移记作 σ . 那么空间 E^3 中任意一点 Q 在 σ 作用下的象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 的相对位置与 Q 关于 $\{O; i, j, k\}$ 的相对位置是一致的.

设

$$\vec{OQ} = (x, y, z) \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix},$$

则

$$\vec{PQ}' = (x, y, z) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \vec{OQ}' &= \vec{OP} + \vec{PQ}' \\ &= [a + (x, y, z)A] \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这就是说, 象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于 $\{O; i, j, k\}$ 的坐标是

$$(x', y', z') = a + (x, y, z)A, \quad (7)$$

或

$$\begin{cases} x' = a_1 + xa_{11} + ya_{21} + za_{31}, \\ y' = a_2 + xa_{12} + ya_{22} + za_{32}, \\ z' = a_3 + xa_{13} + ya_{23} + za_{33}. \end{cases} \quad (7')$$

因此，从 $\{O; i, j, k\}$ 变到 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 的刚体运动把点 $Q = (x, y, z)$ 变到点 $Q' = (x', y', z')$ ，而坐标 (x', y', z') 与 (x, y, z) 之间的关系是由 (7') 式给出的。注意到公式 (7) 和 (6) 有很大的相似性，但是它们的意义是完全不同的。这种公式上的相似性说明刚体运动在某种意义上可以看作是一个坐标变换。具体一点说，(7) 式可以看作关于 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 的坐标是 (x, y, z) 的点 Q' 的坐标变换问题。

我们可以把上面的讨论总结成如下的定理：

定理 1 E^3 中的刚体运动把一个正交标架变成一个正交标架；反之，对于 E^3 中任意两个正交标架，则必有 E^3 的一个刚体运动把其中一个标架变为另一个标架。

很明显，刚体运动看作空间 E^3 到它自身的变换时，保持空间中任意两点之间的距离不变。从 E^3 到它自身的一个变换，如果保持任意两点之间的距离不变，则称它是一个等距变换。容易证明，等距变换把共线的三点变为共线的三点，并且保持分比不变；进而可证等距变换是如 (7) 式给出的线性变换，其中只要求矩阵 A 是正交矩阵，不要求它的行列式是正的。因此，等距变换把一个单位正交标架变为一个单位正交标架，但是可能把右手系变为左手系。换句话说，等距变换是一个刚体运动或刚体运动与反射的合成。

在空间 E^3 中取定笛卡儿坐标系之后，几何图形就能用坐标来表示，几何图形所固有的性质自然也可以用坐标来表达，但是其表达式应该与所取的笛卡儿坐标系无关。反过来，几何图形的一个用坐标表示的量如果与坐标系的选取无关，因而它在图形的刚体运动下保持不变，这个量就是几何图形所固有的量。我们所研究的就是图形的这种几何不变量。

除了正交标架以外，我们还可以考虑仿射标架。所谓仿射标架是指一个点 P 以及放在点 P 的三个不共面的向量 e_1, e_2, e_3 所组成的图形 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ ，不要求这三个向量有单位正交性质。

命

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (8)$$

我们称 (g_{ij}) 为仿射标架 $\{P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 的度量系数. 空间 E^3 的刚体运动把仿射标架变为仿射标架, 并且保持它的度量系数不变以及保持标架的定向不变. 很明显, E^3 中的全体仿射标架的集合可以与 $E^3 \times GL(3)$ 建立一一对应, 其中 $GL(3)$ 表示非退化 3×3 矩阵的集合. 因此 E^3 中全体仿射标架的空间是一个 12 维的空间.

§2 向量函数

我们用 R^3 表示有序的三个实数组所构成的三维向量空间, 在其中定义了通常的数量积, 向量积和混合积. 设

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3), \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3), \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3), \end{aligned} \quad (1)$$

则 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的数量积是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (2)$$

\mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的向量积是一个向量, 它的定义是

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right), \quad (3)$$

因此

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b},$$

且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 成右手系, 以及

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (4)$$

向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积是

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

它的几何意义是向量 a, b, c 所张的平行六面体的体积。

因此，所谓向量函数实际上是指三个有序的实函数。设有向量函数 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, 如果函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 都是 t 的连续函数，则函数 $r(t)$ 就是连续的。向量函数 $r(t)$ 的微商和积分的定义与普通函数的微商和积分的定义相同：

$$\begin{aligned} \frac{dr(t_0)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} \\ &= (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \quad t_0 \in (a, b), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b r(t) dt &= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n r(t'_i) \Delta t_i \\ &= \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 是 $[a, b]$ 的任意一个分割, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t'_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 由此可见，向量函数的微商和积分分别归结为它的分量函数的微商和积分，因此向量函数的可微性和可积性归结为它的分量函数的可微性和可积性。

现在假定 $a(t), b(t), c(t)$ 是三个可微的向量函数，它们的数量积、向量积和混合积的微商有下列公式：

- 定理 1**
- (i) $(a(t) \cdot b(t))' = a'(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot b'(t)$;
 - (ii) $(a(t) \times b(t))' = a'(t) \times b(t) + a(t) \times b'(t)$;
 - (iii) $(a(t), b(t), c(t))' = (a'(t), b(t), c(t)) + (a(t), b'(t), c(t)) + (a(t), b(t), c'(t))$.

它们的证明是直接的。下面的命题给出了一些有特殊性质的向量函数的判定条件，以后会经常引用。

定理 2 设 $a(t)$ 是一个非零连续可微函数，则

- (i) 函数 $a(t)$ 的长度是常数，当且仅当 $a'(t) \cdot a(t) \equiv 0$;
- (ii) 函数 $a(t)$ 的方向不变，当且仅当 $a'(t) \times a(t) \equiv 0$;
- (iii) 函数 $a(t)$ 与一个确定的方向垂直，当且仅当 $(a(t),$