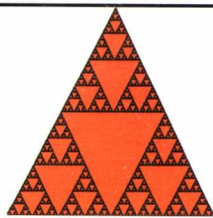


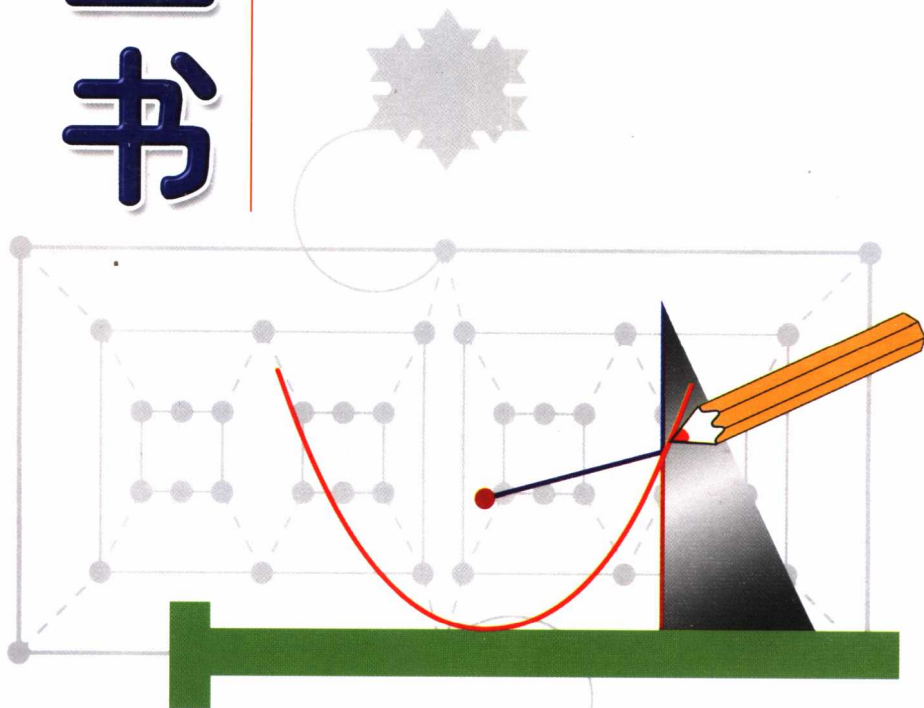
高中版 中卷



新编中学数学

解题方法全书

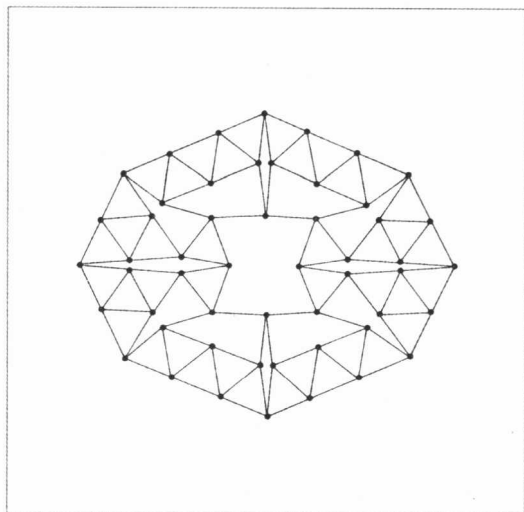
刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社

新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既以名之数矣，则又何为而不可穷也。故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，故有昭昭者存。夫昭昭者其自然之数也，非自然之数其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。

——李冶《测圆海镜序》

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共包括三部分:第三编解析几何,第四编立体几何,第五编复数及其应用。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书.中卷:高中版/刘培杰主编.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.10(2007.9重印)
ISBN 978-7-5603-2436-4

I.新… II.刘… III.数学课—高中—解题
IV.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 117913 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 刘 瑶
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 36.25 字数 818 千字
版 次 2006 年 11 月第 1 版 2007 年 9 月第 3 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2436-4
印 数 8 001~14 000 册
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



中 卷

第三编 解析几何

怎样求中点轨迹	3
怎样求多动点轨迹方程	9
怎样确定动点轨迹的范围	13
怎样求从动点的轨迹	17
怎样求伴随曲线的方程	20
怎样对两点间距离公式进行变形及应用	24
怎样巧用定比分点公式解题	27
怎样用解析几何方法求函数 $f(x) = \frac{u(t)-b}{t(x)-a}$ 的值域	33
怎样求关于直线的对称点	35
怎样应用两直线方程的合成	38
怎样用求二次函数的极值方法求点到直线的距离	40
怎样解一类斜率问题	42
怎样推导点到直线距离公式	44
怎样用点到直线距离公式的变形解题	46
怎样利用圆锥曲线的基本概念解题	48
怎样求曲线弦长	53
怎样用交轨法解圆锥曲线弦中点问题	55
怎样解有关抛物线的定长动弦问题	57
怎样解与抛物线对称轴上定点弦有关的问题	60
怎样利用焦点弦的性质解题	63
怎样用焦半径求焦点弦的长度	68
怎样使用圆锥曲线焦点弦弦长定理解题	72
怎样应用点对圆锥曲线的幂解题	75
怎样利用坐标的压缩变换解椭圆问题	79
怎样巧用 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 的切线公式解题	83
怎样用纯几何法证明有关椭圆的问题	85
怎样解有关圆锥曲线的割线方程问题	87

目 录

CONTENTS

目 录
CONTENTS

怎样利用两条二次曲线公共点的个数与方程的判别式解题	91
怎样用坐标转换法求圆锥曲线动弦中点轨迹	94
怎样解有关二次曲线的切点弦问题(I)	97
怎样解有关二次曲线的切点弦问题(II)	102
怎样利用圆锥曲线的定义解几类动圆圆心的轨迹问题	105
怎样用有心圆锥曲线的性质解题	108
怎样用圆锥曲线的极坐标方程解题	110
怎样证明解析几何的四点共圆问题(I)	113
怎样证明解析几何的四点共圆问题(II)	116
怎样解双二次曲线相交问题	120
怎样应用曲线系解题	124
怎样解决动曲线过定点问题	126
怎样用曲线系方程解题	129
怎样巧用曲线系方程解题	131
怎样应用曲线方程 $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$ 解题	133
怎样求一类曲线系的方程	136
怎样在曲线系中动中寻定	139
怎样在曲线系方程中应用退化圆锥曲线	142
怎样求曲线族在平面上扫过的范围	146
怎样用初等方法求某些曲线族包络	148
怎样求圆锥曲线族的公切线	151
怎样用零多项式解曲线系问题	154
怎样用直角坐标表示极坐标公式	157
怎样用极坐标方法证明平面几何问题	162
怎样应用直线参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \theta \\ y = y_0 + t \sin \theta \end{cases}$	164
怎样妙用直线参数方程	170
怎样用直线参数方程的变式解题	172
怎样利用直线系讨论参数方程的有解条件	176
怎样对含参数的曲线问题进行讨论	178
怎样选取求轨迹的参数(I)	183
怎样选取求轨迹的参数(II)	190
怎样解多个参数消去问题	192
怎样推导并应用抛物线参数方程	194
怎样在解析几何参数范围问题中建立不等关系	199
怎样解一类双参数曲线系过定点问题	202
怎样判定参数方程的等价性	206
怎样用韦达定理理解解析几何问题(I)	211
怎样用韦达定理理解解析几何问题(II)	214
怎样使用坐标增量解解析几何问题	221



怎样用对称元分析法解解析几何问题	225
怎样用非常规方法解解析几何问题	231
怎样优化解析几何试题解答过程	236
怎样解典型高考试题	241
怎样在解析几何解题中减少计算量	244
怎样用简单方法求关于点或直线对称的曲线方程	247
怎样对最值问题进行椭圆转化	250
怎样用构造解析几何模型求无理函数值域	254
怎样应用三线共点定理	258
怎样用三点共线充要条件解题	261
怎样解二维区域问题	264

第四编 立体几何

怎样在立体几何中使用反证法	271
怎样用反证法解立体几何问题	274
怎样用公式法求异面直线间的距离	277
怎样解异面直线有关问题	281
怎样推导和使用异面直线间的距离公式(I)	284
怎样推导和使用异面直线间的距离公式(II)	287
怎样用射影法求异面直线间的距离	290
怎样用极值法求异面直线间的距离	292
怎样求异面直线所成角	294
怎样在立体几何中计算角和距离	296
怎样确定点在平面上的射影位置	301
怎样用射影法解立体几何题	303
怎样作立体几何中的辅助垂线	306
怎样用体积方法解立体几何题	309
怎样利用立体几何中的基本体解题	312
怎样用基本图形解立体几何题(I)	315
怎样用基本图形解立体几何题(II)	319
怎样理解和应用体积比	322
怎样应用立体几何中的等积变换	327
怎样利用体积关系证立体几何问题	329
怎样应用立体几何中的三射线定理	332
怎样在非常态图上活用三垂线定理	335
怎样使用三垂线定理的逆定理的推广	337
怎样用构造图形法解立体几何问题	339
怎样利用一般方法解立体几何计算题	341

目录

CONTENTS

目
录
CONTENTS

怎样利用求四面体体积的新公式计算	345
怎样利用基面解立体几何问题	347
怎样作正方体的截面	351
怎样过正方体上任意三点作截面	354
怎样计算台体中平行于底的截面面积	356
怎样用侧面与底面夹角计算侧面积	358
怎样作棱柱与棱锥的截面图	359
怎样画多面体截面直观图	361
怎样学会画空间图形	363
怎样用棱长表示四面体的体积	365
怎样求一类特殊旋转体体积	369
怎样利用三棱锥体积公式解题	371
怎样用四面体的外接平行六面体解一类立体几何题	373
怎样使用四面体余弦定理	375
怎样计算锥体中的比例分配问题	378
怎样用割法推导公式 $V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1 + r_1^2)$	380
怎样求几何体公共部分的体积	383
怎样利用“三面角的余弦定理”解一类立体几何题	386
怎样使用推广后的射影定理	390
怎样确定三棱锥顶点在底面上射影的位置	393
怎样求二面角(Ⅰ)	396
怎样求二面角(Ⅱ)	399
怎样求二面角(Ⅲ)	401
怎样使用球面三角余弦公式	403
怎样应用“侧面积 = 底面积 / $\cos \alpha$ ”解题	406
怎样使用含有一个直二面角的三面角公式	408
怎样利用四面体计算空间图形	410
怎样用割补法解立体几何题	412
怎样解证立体几何中的折叠问题	413
怎样用三面角的余弦定理解高考题	419
怎样解立体几何中的极值问题	423
怎样解立体几何中的最值问题	426
怎样用函数思想和方法解立体几何最值问题	430
怎样在立体几何中应用角与射影的关系解题	433
怎样应用空间余弦定理	436
怎样解动态型的立体几何问题	438
怎样判断简单平面图形能否折叠成封闭多面体	441
怎样进行空间图形的变式	444
怎样用正方体解证立体几何题	449
怎样使用内切球半径公式	451



怎样解立体几何开放题	453
怎样将空间问题转化为平面问题	456
怎样计算平面垒球的高度	459
怎样应用立体几何中的“定比分点”公式	461
怎样解解析几何中的立体几何问题	463

第五编 复数及其应用

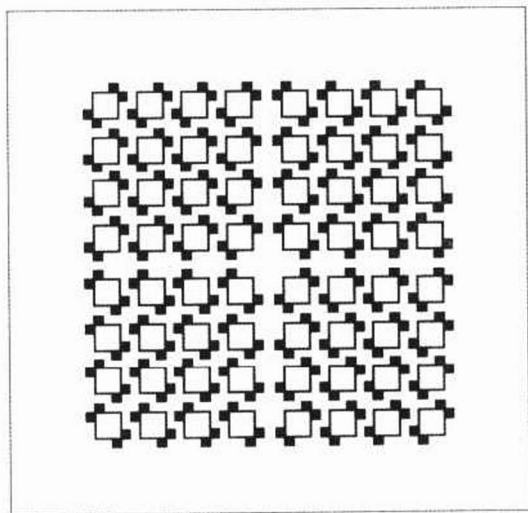
怎样用复数相等的定义证题	469
怎样利用复数的辐角解题	474
怎样用复数的常规解法解题	478
怎样证明某一复数为实数	482
怎样用化虚为实策略求解复数问题	485
怎样用共轭复数的性质解题	488
怎样巧化三角形式	491
怎样求复数的模和辐角范围	493
怎样对取模求点集问题进行讨论	496
怎样求复数模的极值	499
怎样使用复数模不等式	502
怎样进行复数语言的选择	505
怎样利用复数方程解题	508
怎样在圆的复数方程中使用配积技巧	511
怎样求复数方程中参数的取值范围	513
怎样利用复数变量代换求一类函数的最值	516
怎样利用复数求某些无理函数的最值	518
怎样用复数求一类函数的迭代式	521
怎样用复数乘除法的几何意义解题	523
怎样利用复数的除法证明三角不等式	528
怎样用复平面上正三角形的一个充要条件解题	532
怎样用复数解对称型问题	534
怎样在复平面做轴对称变换	536
怎样用复数解解析几何问题	538
怎样求复平面上的轨迹问题	542
怎样求复平面上有关动点轨迹	546
怎样运用复数求轨迹方程	549
怎样利用复数求一类伴随曲线的方程	551
怎样用复数解一类三角问题	555
怎样用复数法证明一类三角恒等式	558
怎样用复数解反三角函数问题	563
怎样用复数法解三角及解析几何试题	566
怎样利用复数比定理证平面几何题	569

目录

CONTENTS

第三编

解析几何



夫逢者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准乎，四时之始终，万物之祖宗，六艺之纲纪。稽群伦之聚散，考二气之降升，推寒暑之迭运，步远近之殊同，观天道精微之兆基，察地理从横之长短，采神祇之所在，极成败之符验，穷道德之理，究性命之情。

——甄鸾《孙子算经序》

怎样求中点轨迹

由曲线求方程是解析几何的一个基本问题,求动线段的中点的轨迹方程,又是这类问题中常见的一种.如何根据已知条件,选择恰当的方法,简捷地求出方程是值得探索的问题.

本节列举了八种解法,为了叙述方便,各种解法都给出了名称.

一、求端点坐标法

根据问题的条件,如果能确定动线段的两个端点的坐标,那么,可用中点公式,得出这点轨迹的参数方程,再消参数即得普通方程.

例 1 已知直线 $l_1: 2x + y - 1 = 0$, $l_2: x + 2y - 2 = 0$. 求倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交两直线 l_1, l_2 的线段的中点的轨迹方程.

解 由已知条件,可设动直线的方程为 $y = x + b$,解方程组

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-b}{3} \\ y = \frac{1+2b}{3} \end{cases}$$

故动线段的一个端点的坐标是 $M(\frac{1-b}{3}, \frac{1+2b}{3})$.

同样,解方程组

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2(1-b)}{3} \\ y = \frac{b+2}{3} \end{cases}$$

故动线段的另一端点的坐标是 $N(\frac{2(1-b)}{3}, \frac{b+2}{3})$.

设动线段 MN 的中点 P 的坐标为 (x, y) ,由中点坐标公式得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-b) \\ y = \frac{1}{2}(1+b) \end{cases}$$

相加得 $x + y = 1$,此即为所求轨迹的方程.

二、代入法

若动线段的一个端点 P 在已知曲线上运动,则可根据中点坐标公式,用线段的另一端及中点的坐标表达出点 P 的坐标,再代入已知曲线方程,即可得所求轨迹的方程.

例 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,求椭圆的右焦点和椭圆上点连线的中点的轨迹的方程.

解 设 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆上点,则有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{①}$$

$F(c, 0)$ 是椭圆的右焦点, MF 的中点为 $P(x, y)$,由中点公式得

$$\begin{cases} x = \frac{c + x_0}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}$$

从而得

$$\begin{cases} x_0 = 2x - c \\ y_0 = 2y \end{cases} \quad ②$$

把②代入①得

$$\frac{(2x - c)^2}{a^2} + \frac{(2y)^2}{b^2} = 1$$

即

$$\frac{(x - \frac{c}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

为所求轨迹的方程.

三、韦达定理法

在求二次曲线的动弦的中点的轨迹方程时,若利用“求端点坐标法”,则解法较繁琐.一般是把动直线方程代入二次曲线的方程,整理出一元二次方程后,应用韦达定理确定所求弦的中点的轨迹的参数方程,消去参数后可得普通方程.

例3 求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中,斜率为 k 的平行弦的中点的轨迹的方程.

解 如图1所示,设 P_1P_2 是平行弦的任意一条,它的方程是

$$y = kx + m \quad ①$$

这里 m 是参数,式①代入椭圆的方程得 $9x^2 + 16(kx + m)^2 = 144$,整理得

$$(16k^2 + 9)x^2 + 32mkx + 16m^2 - 144 = 0 \quad ②$$

方程②的两根就是 P_1, P_2 的横坐标,由韦达定理有

$$x_1 + x_2 = -\frac{32mk}{16k^2 + 9}$$

设 P_1P_2 中点是 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 从而 $x_0 = -\frac{16mk}{16k^2 + 9}$. 又 P 在

P_1P_2 上,所以, $y_0 = kx_0 + m$, 则 $y_0 = \frac{9m}{16k^2 + 9}$. 即

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{16mk}{16k^2 + 9} \\ y_0 = \frac{9m}{16k^2 + 9} \end{cases}$$

消去 m 得所求方程为 $9x + 16ky = 0$.

平行弦的中点的轨迹,是上述方程所表示的直线与椭圆的两个交点间的线段,此线段叫椭圆的直径.

四、几何法(直接求法)

有些线段中点的轨迹问题,如果由已知条件中的几何性质,能直接建立轨迹的方程,往往比引入参数建立轨迹方程简便.

例4 已知圆的方程 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$, 求过点 $A(-3, -5)$ 的直线交圆的弦的中点的轨迹的方程.

解 圆的方程化为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$, 圆心 $C(3,3)$, 设过 A 的直线交

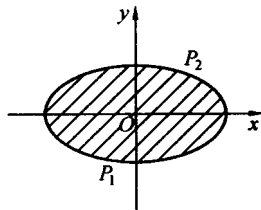


图1

圆于 P, Q 两点, $M(x, y)$ 是弦 PQ 的中点, 联结 CM , 由垂径定理知 $CM \perp PQ$, 如图 2 所示, 从而有

$$k_{CM} \cdot k_{PQ} = -1, \frac{y-3}{x-3} \cdot \frac{y+5}{x+3} = -1$$

整理得 $x^2 + (y+1)^2 = 25$

所求轨迹是圆 $x^2 + (y+1)^2 = 25$ 在已知圆内的弧.

五、极坐标法

如果动线段过二次曲线的焦点, 在求其中点轨迹的方程时, 引入二次曲线统一的极坐标方程去解, 有时比较简便.

例 5 求过抛物线的焦点 F 的弦的中点的轨迹方程.

解 以 F 为极点, F 为端点其反向延长线垂直于准线 l 的射线为极轴, 建立极坐标系, 如图 3 所示. 设 F 到准线 l 的距离为 p , 抛物线的极坐标方程是

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

设 $P_1(\rho_1, \theta_1), P_2(\rho_2, \theta_1 + \pi)$ 是过焦点的弦的端点, 则

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - \cos \theta_1}, \rho_2 = \frac{p}{1 + \cos \theta_1}$$

若 $M(\rho, \theta)$ 是 P_1P_2 的中点, 则 $\theta = \theta_1$, 即

$$\rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 - \cos \theta_1} - \frac{p}{1 + \cos \theta_1} \right) = \frac{p \cos \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1} = p \cot \theta_1 \csc \theta_1$$

所以 $\rho = p \cot \theta \csc \theta$ 为所求的轨迹方程.

注 当 $\rho_1 < \rho_2$ 时, $\rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} < 0$, 点 $M(\rho, \theta)$ 在极轴的下方, 这时极角 θ 的终边是 FM 的反向延长线.

六、使用直线的参数方程的解法

直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ 中 t 是参数, α 是直线的倾斜角, $M(x_0, y_0)$

是直线上一点, 参数 t 表示以 M 为起点, 直线上动点 $P(x, y)$ 为终点的有向线段的数量, 并规定直线向上的方向为正向.

例 6 用直线的参数方程解例 5.

解 设抛物线 $y^2 = 2px$, 焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 过 F 的弦的方程是

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases} \quad (1)$$

代入 $y^2 = 2px$ 后整理得

$$t^2 \sin^2 \theta - 2pt \cos \theta - p^2 = 0$$

设 t_1, t_2 是 P_1, P_2 两点分别对应的参数, 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = \frac{2p \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

设 t 是 P_1P_2 的中点 P 所对应的参数, 则有

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{p \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (2)$$

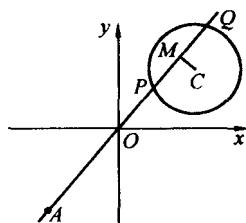


图 2

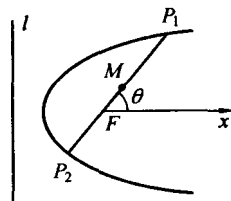


图 3

将②代入①得

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + p\cot^2\theta \\ y = p\cot\theta \end{cases}$$

消去 θ 得 $y^2 = px - \frac{p^2}{2}$,即为所求轨迹的方程.

应注意的是,由于直线参数方程中的参数 t 与极坐标方程中的极径 ρ 有不同的几何意义,故所对应的中点有不同的表达式,即

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}, \rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$$

有关二次曲线弦的中点轨迹问题,若动弦过定点,选择轨迹上的动点作为直线参数方程中的 $M(x_0, y_0)$,往往使解法更简便.

例7 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, l 是过 $M(5, 0)$ 的直线,求直线 l 交椭圆的弦的中点的轨迹方程.

解 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 5)$,若 $P(x_0, y_0)$ 是 l 交椭圆的弦的中点,则有

$$y_0 = k(x_0 - 5) \quad \text{①}$$

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$, t 是参数, α 是 l 的倾斜角,代入椭圆方程得

$$4(x_0 + t\cos\alpha)^2 + 9(y_0 + t\sin\alpha)^2 = 36$$

整理得 $4(\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha)t^2 + 2(4x_0\cos\alpha + 9y_0\sin\alpha)t + 4x_0^2 + 9y_0^2 - 36 = 0$

因为 $P(x_0, y_0)$ 是弦的中点,所以 $t_1 + t_2 = 0$.从而有

$$4x_0\cos\alpha + 9y_0\sin\alpha = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4x_0}{9y_0}$$

所以

$$k = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4x_0}{9y_0}$$

代入①得

$$y_0 = -\frac{4x_0}{9y_0}(x_0 - 5)$$

整理得

$$9y_0^2 + 4(x_0 - \frac{5}{2})^2 = 25$$

所以所求轨迹为方程

$$\frac{(x_0 - \frac{5}{2})^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y_0^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

表示的椭圆在已知椭圆内的部分.

此题若用例3或例5的解法,消去参数时比较麻烦.

七、多参数法

引入多个参数,建立多元方程组的参数方程,再消去参数,也是求动线段中点轨迹的一种方法.

例8 给定双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$,过点 $A(2, 1)$ 的直线 l 与给定双曲线交于 P_1, P_2 ,求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

解 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_0(x_0, y_0)$,由已知条件得

心得体会 拓广疑问

$$2x_1^2 - y_1^2 = 2 \quad ①$$

$$2x_2^2 - y_2^2 = 2 \quad ②$$

$$x_1 + x_2 = 2x_0 \quad ③$$

$$y_1 + y_2 = 2y_0 \quad ④$$

设直线 l 的斜率为 k , 则有

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k \quad ⑤$$

又有

$$y_0 = k(x_0 - 2) + 1 \quad ⑥$$

从①,②,③,④,⑤,⑥所组成的方程组中消去 x_1, x_2, y_1, y_2, k , 得所求轨迹的方程.

① - ② 后变形得

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} = -\frac{k}{2}$$

③ ÷ ④ 得

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{k}{2}$$

所以 $k = \frac{2x_0}{y_0}$ 代入⑥得

$$y_0^2 - 2x_0^2 - y_0 + 4x_0 = 0$$

所求轨迹方程为

$$2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$$

引入多个参数求轨迹的方程时, 应注意所列方程要便于消参数.

八、导数法

方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 两边对 x 求导得 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$.

设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_1P_2$ 是椭圆的弦, 其斜率为 k . 由拉格朗日中值定理知

$$y'_x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

所以 $y'_x = k$, 从而得

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} k = 0 \quad ①$$

当 x, y 作为变量时, 方程①表示直线.

易证方程①是椭圆具有斜率为 k 的平行弦的中点的轨迹方程, 即椭圆的直径的方程.

设 $M_1(x'_1, y'_1), M_2(x'_2, y'_2)$ 是椭圆平行于 P_1P_2 的弦, 由 $\frac{x'^2_1}{a^2} + \frac{y'^2_1}{b^2} = 1$,

$\frac{x'^2_2}{a^2} + \frac{y'^2_2}{b^2} = 1$ 相减得 $\frac{x'^2_2 - x'^2_1}{a^2} + \frac{y'^2_2 - y'^2_1}{b^2} = 0$. 从而得

$$\frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'_2 + x'_1}{y'_2 + y'_1}$$

设 $P'(x', y')$ 是弦 M_1M_2 的中点, 则 $x' = \frac{x'_1 + x'_2}{2}$, $y' = \frac{y'_1 + y'_2}{2}$, 故有 $k = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$, 从而得 $\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 0$.

所以 P' 在方程 ① 表示的直线上.

对于其他二次曲线也有类似的结论.

对于二次曲线方程两边求导, 解出 y'_x , 令 $y'_x = k$, 将它代入动弦所在直线的方程, 便得到所求的中点轨迹的方程.

例 9 用导数法解例 8.

设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, $P(x_0, y_0)$ 是 P_1P_2 的中点, 则有

$$y_0 - 1 = k(x_0 - 2) \quad \text{①}$$

方程 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 两边对 x 求导得 $2x - yy' = 0$. 因为它表示斜率为 $k = y'_x$ 的平行弦的中点的轨迹, 故有 $2x_0 - y_0k = 0$, 从而 $k = \frac{2x_0}{y_0}$, 代入 ① 得

$$2x_0^2 - y_0^2 - 4x_0 + y_0 = 0$$

所求轨迹的方程为

$$2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$$

本节列举的中点轨迹的八种解法大体可分为两类: 一是直接法, 二是间接法.

直接法的基本步骤是: 取点、列式、代换得方程. 例 4 就是用这种解法解的. 使用这种解法时, 根据问题的条件 (其中包括已知条件中直接给出的和隐含的图形性质中的), 找出等量关系, 列出便于用已知数量的轨迹上动点坐标代换的等式, 是解题的关键步骤.

间接法就是“引参数法”, 除例 4 外上述其他例题的解法, 都属于间接法. 在间接法中, 巧妙地选取参数是解题的关键. 引入参数, 建立轨迹上点的坐标与参数间的关系式, 就是轨迹的参数方程. 消去参数便得出轨迹的普通方程.

如何选择参数呢? 选取的参数必须是确定轨迹上每一点位置的变量; 选取的参数应易于建立参数与轨迹上点的坐标间的关系式, 本节例题中用到的参数有: 直线的截距、斜率、倾斜角、点的坐标、有向线段等. 另外, 角度、弧长、时间也是常用的参数.

怎样求多动点轨迹方程

求轨迹方程的实质就在于寻求满足一定条件的动点与“定点”(广义的)坐标之间的联系。动点再多也不例外,一个轨迹命题中,不管有多少动点,总可以分成两类,即主动点(轨迹方程往往已知或易知)和从动点(轨迹方程往往待求)。下面按动点之间的不同的形式结构分别叙述。

一、链式动点问题

这类问题中,动点虽然可以有多个,但主动点只有一个,并由之一个牵动一个,即动点之间呈所谓“链式结构”。此时只要能找出始末二动点间的联系,并用从动点的坐标去表示主动点的坐标,然后代入主动点所满足的方程整理即得。

例1 已知 Q 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点,定点 P 的坐标为 $(4,0)$,试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程。

解 主动点为 Q ,坐标设为 (x_1, y_1) ,从动点为 M ,坐标设为 (x, y) 。由于

$$\lambda = \frac{QM}{MP} = 1$$

所以

$$x_1 = 2x - 4, y_1 = 2y$$

将点 Q 的坐标代入其所满足的方程并整理得

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

这就是所求的点 M 的轨迹方程。

这道题并不难,但解法却很有代表性。

这里的圆可以换成任何一条曲线,曲线的方程也可采用各种不同的形式,而 λ 也可任意实数。

例2 P, Q 两点所表示的复数分别为 z 和 $2z + 3 - 4i$ 。若 P 在以原点为圆心, r 为半径的圆上移动,求点 Q 的轨迹与方程。

解 动点两个,一主一从,主动点 P 的方程为 $|z| = r$ 。记从动点 Q 所示的复数为 $\omega = 2z + 3 - 4i$,则 $z = \frac{\omega - (3 - 4i)}{2}$,代入点 P 的方程得

$$|\omega - (3 - 4i)| = 2r$$

这就是所求的点 Q 的轨迹方程,它表示以 $(3, -4)$ 为圆心, $2r$ 为半径的一个圆。

例3 如图1所示,从圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 $A(1,0)$ 引弦 AB ,过 A 作 $AC \perp AB$,取 $|AC| = |AB|$,求点 C 的轨迹方程。

分析 由例2我们看到了对于圆,采用复数式方程的优越性。

解 在复平面内设从动点 C 所示复数为 z ,主动点 B 所示复数为 z' ,则依题设有

$$z' - 1 = (z - 1)\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

所以 $z' = zi - i + 1$ 代入点 B 所满足的复数式方程 $|z'| = 1$ 得 $|zi - i + 1| = 1$,化为普通方程就是

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

同理可得 C' 的方程为

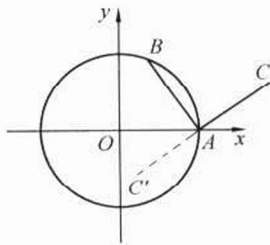


图1