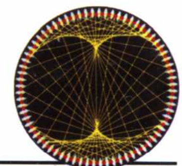
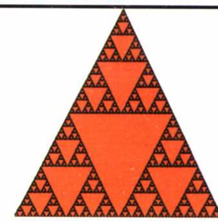
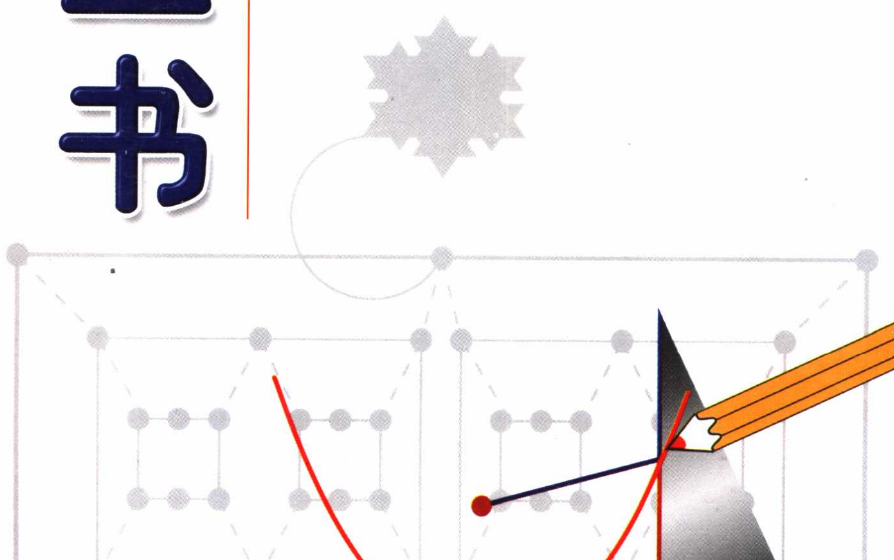


新编中学数学解题方法全书

高中版 中卷



刘培杰 主编

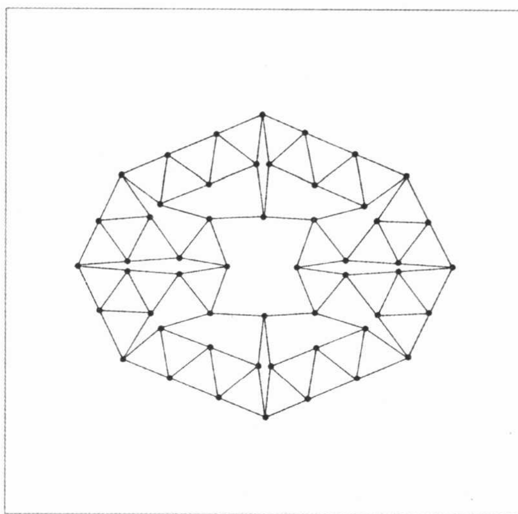


哈尔滨工业大学出版社

高中版 中卷

新编中学数学解题方法全书

刘培杰 主编



数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既以名之数矣，则又何为而不可穷也。故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，故有昭昭者存。夫昭昭者其自然之数也，非自然之数其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。

——李冶《测圆海镜序》

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书共包括三部分:第三编解析几何,第四编立体几何,第五编复数及其应用。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书.中卷:高中版/刘培杰主编.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.10(2007.9 重印)
ISBN 978-7-5603-2436-4

Ⅰ.新… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 117913 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫 刘 瑶
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 36.25 字数 818 千字
版 次 2006 年 11 月第 1 版 2007 年 9 月第 3 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2436-4
印 数 8 001~14 000 册
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

中　　卷

第三编　解析几何

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第四编　立体几何

目录
CONTENTS

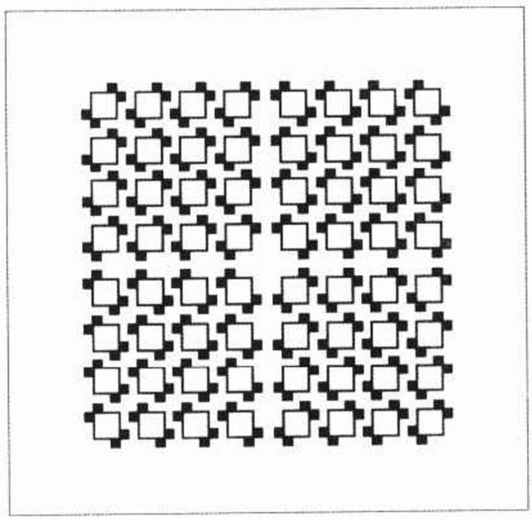
目录 CONTENTS

第五编　复数及其应用

目录
CONTENTS

第三编

解析几何



夫逢者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准乎，四时之始终，万物之祖宗，六艺之纲纪。稽群伦之聚散，考二气之降升，推寒暑之迭运，步远近之殊同，观天道精微之兆基，察地理从横之长短，采神祇之所在，极成败之符验，穷道德之理，究性命之情。

——甄鸾《孙子算经序》

心得 体会 拓广 疑问

怎样求中点轨迹

由曲线求方程是解析几何的一个基本问题，求动线段的中点的轨迹方程，又是这类问题中常见的一种．如何根据已知条件，选择恰当的方法，简捷地求出方程是值得探索的问题．

本节列举了八种解法，为了叙述方便，各种解法都给出了名称．

一、求端点坐标法

根据问题的条件，如果能确定动线段的两个端点的坐标，那么，可用中点公式，得出这点轨迹的参数方程，再消参数即得普通方程．

例 1 已知直线 $l_1: 2x+y-1=0$，$l_2: x+2y-2=0$．求倾斜角度是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交两直线 l_1, l_2 的线段的中点的轨迹方程．

解 由已知条件，可设动直线的方程为 $y=x+b$，解方程组

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y=x+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-b}{3} \\ y=\dfrac{1+2b}{3} \end{cases}$$

故动线段的一个端点的坐标是 $M(\frac{1-b}{3}, \frac{1+2b}{3})$．

同样，解方程组

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ y=x+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2(1-b)}{3} \\ y=\dfrac{b+2}{3} \end{cases}$$

得动线段的另一端点的坐标是 $N(\frac{2(1-b)}{3}, \frac{b+2}{3})$．

设动线段 MN 的中点 P 的坐标为 (x, y)，由中点坐标公式得

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(1-b) \\ y=\dfrac{1}{2}(1+b) \end{cases}$$

相加得 $x+y=1$，此即为所求轨迹的方程．

二、代入法

若动线段的一个端点 P 在已知曲线上运动，则可根据中点坐标公式，用线段的另一端及中点的坐标表达出点 P 的坐标，再代入已知曲线方程，即可得所求轨迹的方程．

例 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，求椭圆的右焦点和椭圆上点连线的中点的轨迹的方程．

解 设 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆上点，则有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \quad ①$$

$F(c, 0)$ 是椭圆的右焦点，MF 的中点为 $P(x, y)$，由中点公式得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\begin{cases} x = \dfrac{c + x_0}{2} \\ y = \dfrac{y_0}{2} \end{cases}$$

从而得

$$\begin{cases} x_0 = 2x - c \\ y_0 = 2y \end{cases} \quad ②$$

把②代入①得 $$\frac{(2x-c)^2}{a^2} + \frac{(2y)^2}{b^2} = 1$$

即 $$\frac{(x-\frac{c}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

为所求轨迹的方程.

三、韦达定理法

在求二次曲线的动弦的中点的轨迹方程时,若利用"求端点坐标法",则解法较繁琐.一般是把动直线方程代入二次曲线的方程,整理出一元二次方程后,应用韦达定理确定所求弦的中点的轨迹的参数方程,消去参数后可得普通方程.

例 3 求椭圆$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$中,斜率为 k 的平行弦的中点的轨迹的方程.

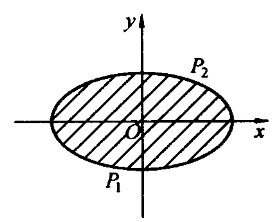


图 1

解 如图 1 所示,设 P_1P_2 是平行弦的任意一条,它的方程是

$$y = kx + m \quad ①$$

这里 m 是参数,式①代入椭圆的方程得 $9x^2 + 16(kx+m)^2 = 144$,整理得

$$(16k^2+9)x^2 + 32mkx + 16m^2 - 144 = 0 \quad ②$$

方程②的两根就是 P_1, P_2 的横坐标,由韦达定理有

$$x_1 + x_2 = -\frac{32mk}{16k^2+9}$$

设 P_1P_2 中点是 $P(x_0, y_0)$,则 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$.从而 $x_0 = -\frac{16mk}{16k^2+9}$.又 P 在 P_1P_2 上,所以,$y_0 = kx_0 + m$,则 $y_0 = \frac{9m}{16k^2+9}$.即

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{16mk}{16k^2+9} \\ y_0 = \dfrac{9m}{16k^2+9} \end{cases}$$

消去 m 得所求方程为 $9x + 16ky = 0$.

平行弦的中点的轨迹,是上述方程所表示的直线与椭圆的两个交点间的线段,此线段叫椭圆的直径.

四、几何法(直接求法)

有些线段中点的轨迹问题,如果由已知条件中的几何性质,能直接建立轨迹的方程,往往比引入参数建立轨迹方程简便.

例 4 已知圆的方程 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$,求过点 $A(-3,-5)$ 的直线交圆的弦的中点的轨迹的方程.

解 圆的方程化为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$,圆心 $C(3,3)$,设过 A 的直线交

圆于 P,Q 两点，$M(x,y)$ 是弦 PQ 的中点，联结 CM，由垂径定理知 $CM\perp PQ$，如图 2 所示，从而有

$$k_{CM}\cdot k_{PQ}=-1,\frac{y-3}{x-3}\cdot\frac{y+5}{x+3}=-1$$

整理得
$$x^2+(y+1)^2=25$$

所求轨迹是圆 $x^2+(y+1)^2=25$ 在已知圆内的弧.

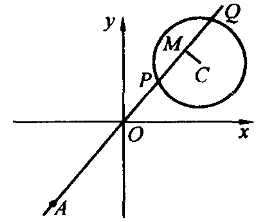


图 2

五、极坐标法

如果动线段过二次曲线的焦点，在求其中点轨迹的方程时，引入二次曲线统一的极坐标方程去解，有时比较简便.

例 5 *求过抛物线的焦点 F 的弦的中点的轨迹方程.*

解 以 F 为极点，F 为端点其反向延长线垂直于准线 l 的射线为极轴，建立极坐标系，如图 3 所示. 设 F 到准线 l 的距离为 p，抛物线的极坐标方程是

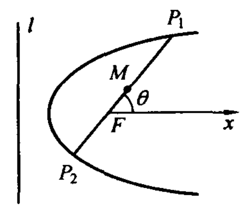


图 3

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

设 $P_1(\rho_1,\theta_1),P_2(\rho_2,\theta_1+\pi)$ 是过焦点的弦的端点，则

$$\rho_1=\frac{p}{1-\cos\theta_1},\rho_2=\frac{p}{1+\cos\theta_1}$$

若 $M(\rho,\theta)$ 是 P_1P_2 的中点，则 $\theta=\theta_1$，即

$$\rho=\frac{\rho_1-\rho_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-\cos\theta_1}-\frac{p}{1+\cos\theta_1}\right)=\frac{p\cos\theta_1}{1-\cos^2\theta_1}=p\cot\theta_1\csc\theta_1$$

所以 $\rho=p\cot\theta\csc\theta$ 为所求的轨迹方程.

注 当 $\rho_1<\rho_2$ 时，$\rho=\frac{\rho_1-\rho_2}{2}<0$，点 $M(\rho,\theta)$ 在极轴的下方，这时极角 θ 的终边是 FM 的反向延长线.

六、使用直线的参数方程的解法

直线的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ 中 t 是参数，α 是直线的倾斜角，$M(x_0,y_0)$ 是直线上一点，参数 t 表示以 M 为起点，直线上动点 $P(x,y)$ 为终点的有向线段的数量，并规定直线向上的方向为正向.

例 6 *用直线的参数方程解例5.*

解 设抛物线 $y^2=2px$，焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，过 F 的弦的方程是

$$\begin{cases}x=\frac{p}{2}+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}\quad ①$$

代入 $y^2=2px$ 后整理得
$$t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta-p^2=0$$
设 t_1,t_2 是 P_1,P_2 两点分别对应的参数，由韦达定理得

$$t_1+t_2=\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

设 t 是 P_1P_2 的中点 P 所对应的参数，则有

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{p\cos\theta}{\sin^2\theta}\quad ②$$

心得 体会 拓广 疑问

将②代入①得
$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{2} + p\cot^2\theta \\ y = p\cot\theta \end{cases}$$

消去 θ 得 $y^2 = px - \dfrac{p^2}{2}$,即为所求轨迹的方程.

应注意的是,由于直线参数方程中的参数 t 与极坐标方程中的极径 ρ 有不同的几何意义,故所对应的中点有不同的表达式,即
$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}, \rho = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$$

有关二次曲线弦的中点轨迹问题,若动弦过定点,选择轨迹上的动点作为直线参数方程中的 $M(x_0, y_0)$,往往使解法更简便.

例7 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$,$l$ 是过 $M(5,0)$ 的直线,求直线 l 交椭圆的弦的中点的轨迹方程.

解 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 5)$,若 $P(x_0, y_0)$ 是 l 交椭圆的弦的中点,则有
$$y_0 = k(x_0 - 5) \quad ①$$

设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$,$t$ 是参数,α 是 l 的倾斜角,代入椭圆方程得
$$4(x_0 + t\cos\alpha)^2 + 9(y_0 + t\sin\alpha)^2 = 36$$

整理得 $4(\cos^2\alpha + 9\sin\alpha)t^2 + 2(4x_0\cos\alpha + 9y_0\sin\alpha)t + 4x_0^2 + 9y_0^2 - 36 = 0$

因为 $P(x_0, y_0)$ 是弦的中点,所以 $t_1 + t_2 = 0$.从而有
$$4x_0\cos\alpha + 9y_0\sin\alpha = 0$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4x_0}{9y_0}$$

所以
$$k = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4x_0}{9y_0}$$

代入①得
$$y_0 = -\frac{4x_0}{9y_0}(x_0 - 5)$$

整理得
$$9y_0^2 + 4(x_0 - \frac{5}{2})^2 = 25$$

所以所求轨迹为方程
$$\frac{(x_0 - \frac{5}{2})^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$$
表示的椭圆在已知椭圆内的部分.

此题若用例3或例5的解法,消去参数时比较麻烦.

七、多参数法

引入多个参数,建立多元方程组的参数方程,再消去参数,也是求动线段中点轨迹的一种方法.

例8 给定双曲线 $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$,过点 $A(2,1)$ 的直线 l 与给定双曲线交于 P_1,P_2,求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

解 设 $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$,$P_0(x_0, y_0)$,由已知条件得

心得 体会 拓广 疑问

$$2x_1^2 - y_1^2 = 2 \quad ①$$

$$2x_2^2 - y_2^2 = 2 \quad ②$$

$$x_1 + x_2 = 2x_0 \quad ③$$

$$y_1 + y_2 = 2y_0 \quad ④$$

设直线 l 的斜率为 k,则有

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k \quad ⑤$$

又有

$$y_0 = k(x_0 - 2) + 1 \quad ⑥$$

从①,②,③,④,⑤,⑥所组成的方程组中消去 x_1, x_2, y_1, y_2, k,得所求轨迹的方程.

① - ② 后变形得

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} = -\frac{k}{2}$$

③ ÷ ④ 得

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{k}{2}$$

所以 $k = \frac{2x_0}{y_0}$ 代入 ⑥ 得

$$y_0^2 - 2x_0^2 - y_0 + 4x_0 = 0$$

所求轨迹方程为

$$2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$$

引入多个参数求轨迹的方程时,应注意所列方程要便于消参数.

八、导数法

方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 两边对 x 求导得 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$.

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, P_1P_2 是椭圆的弦,其斜率为 k. 由拉格朗日中值定理知

$$y'_x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + x_1}$$

所以 $y'_x = k$,从而得

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}k = 0 \quad ①$$

当 x, y 作为变量时,方程 ① 表示直线.

易证方程 ① 是椭圆具有斜率为 k 的平行弦的中点的轨迹方程,即椭圆的直径的方程.

设 $M_1(x'_1, y'_1)$, $M_2(x'_2, y'_2)$ 是椭圆平行于 P_1P_2 的弦,由 $\frac{x'^2_1}{a^2} + \frac{y'^2_1}{b^2} = 1$, $\frac{x'^2_2}{a^2} + \frac{y'^2_2}{b^2} = 1$ 相减得 $\frac{x'^2_2 - x'^2_1}{a^2} + \frac{y'^2_2 - y'^2_1}{b^2} = 0$. 从而得

$$\frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'_2 + x'_1}{y'_2 + y'_1}$$

心得 体会 拓广 疑问

设 $P'(x',y')$ 是弦 M_1M_2 的中点，则 $x' = \frac{x'_1 + x'_2}{2}, y' = \frac{y'_1 + y'_2}{2}$，故有 $k = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$，从而得 $\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 0$.

所以 P' 在方程①表示的直线上.

对于其他二次曲线也有类似的结论.

对于二次曲线方程两边求导，解出 y'_x，令 $y'_x = k$，将它代入动弦所在直线的方程，便得到所求的中点轨迹的方程.

例 9 用导数法解例8.

设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$，$P(x_0,y_0)$ 是 P_1P_2 的中点，则有

$$y_0 - 1 = k(x_0 - 2) \quad ①$$

方程 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 两边对 x 求导得 $2x - yy' = 0$. 因为它表示斜率为 $k = y'_x$ 的平行弦的中点的轨迹，故有 $2x_0 - y_0k = 0$，从而 $k = \frac{2x_2}{y_2}$，代入①得

$$2x_0^2 - y_0^2 - 4x_0 + y_0 = 0$$

所求轨迹的方程为

$$2x^2 - y^2 - 4x + y = 0$$

本节列举的中点轨迹的八种解法大体可分为两类：一是直接法，二是间接法.

直接法的基本步骤是：取点、列式、代换得方程. 例 4 就是用这种解法解的. 使用这种解法时，根据问题的条件(其中包括已知条件中直接给出的和隐含的图形性质中的)，找出等量关系，列出便于用已知数量的轨迹上动点坐标代换的等式，是解题的关键步骤.

间接法就是“引参数法”，除例 4 外上述其他例题的解法，都属于间接法. 在间接法中，巧妙地选取参数是解题的关键. 引入参数，建立轨迹上点的坐标与参数间的关系式，就是轨迹的参数方程. 消去参数便得出轨迹的普通方程.

如何选择参数呢？选取的参数必须是确定轨迹上每一点位置的变量；选取的参数应易于建立参数与轨迹上点的坐标间的关系式，本节例题中用到的参数有：直线的截距、斜率、倾斜角、点的坐标、有向线段等. 另外，角度、弧长、时间也是常用的参数.

怎样求多动点轨迹方程

求轨迹方程的实质就在于寻求满足一定条件的动点与“定点”(广义的)坐标之间的联系。动点再多也不例外,一个轨迹命题中,不管有多少动点,总可以分成两类,即主动点(轨迹方程往往已知或易知)和从动点(轨迹方程往往待求).下面按动点之间的不同的形式结构分别叙述.

一、链式动点问题

这类问题中,动点虽然可以有很多,但主动点只有一个,并由之一个牵动一个,即动点之间呈所谓“链式结构”.此时只要能找出始末二动点间的联系,并用从动点的坐标去表示主动点的坐标,然后代入主动点所满足的方程整理即得.

例1 已知 Q 为圆 $x^2+y^2=4$ 上的点.定点 P 的坐标为 $(4,0)$,试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

解 主动点为 Q,坐标设为 (x_1,y_1),从动点为 M,坐标设为 (x,y).由于

$$\lambda=\frac{QM}{MP}=1$$

所以
$$x_1=2x-4,y_1=2y$$

将点 Q 的坐标代入其所满足的方程并整理得

$$(x-2)^2+y^2=1$$

这就是所求的点 M 的轨迹方程.

这道题并不难,但解法却很有代表性.

这里的圆可以换成任何一条曲线,曲线的方程也可采用各种不同的形式,而 λ 也可是任意实数.

例2 P,Q 两点所表示的复数分别为 z 和 $2z+3-4\mathrm{i}$.若 P 在以原点为圆心,r 为半径的圆上移动.求点 Q 的轨迹与方程.

解 动点两个,一主一从,主动点 P 的方程为 $|z|=r$.记从动点 Q 所示的复数为 $\omega=2z+3-4\mathrm{i}$,则 $z=\dfrac{\omega-(3-4\mathrm{i})}{2}$,代入点 P 的方程得

$$|\omega-(3-4\mathrm{i})|=2r$$

这就是所求的点 Q 的轨迹方程,它表示以 $(3,-4)$ 为圆心,$2r$ 为半径的一个圆.

例3 如图1所示,从圆 $x^2+y^2=1$ 上的点 $A(1,0)$ 引弦 AB,过 A 作 $AC\perp AB$,取 $|AC|=|AB|$,求点 C 的轨迹方程.

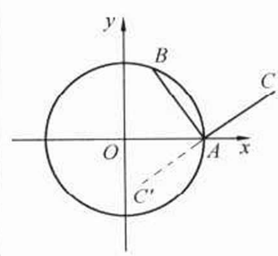


图1

分析 由例2我们看到了对于圆,采用复数式方程的优越性.

解 在复平面内设从动点 C 所示复数为 z,主动点 B 所示复数为 z',则依题设有

$$z'-1=(z-1)\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

所以 $z'=z\mathrm{i}-\mathrm{i}+1$ 代入点 B 所满足的复数式方程 $|z'|=1$ 得 $|z\mathrm{i}-\mathrm{i}+1|=1$,化为普通方程就是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

同理可得 C' 的方程为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com